Serie 9 – Problema 5:
Considere la señal periódica

$$x_p(n) = \cos\left(\frac{2\pi n}{10}\right) \qquad -\infty < n < \infty$$

con frecuencia $f = \dfrac{1}{10}$, y período fundamental N = 10 muestras. Determine la DFT con 10 puntos de la secuencia de longitud finita $x(n) = x_p(n)$, $0 \le n \le N-1$.

La DFT con 10 puntos de *x(n)* resulta:

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} = \sum_{n=0}^{9} \cos\left(\frac{2\pi n}{10}\right) e^{-j\frac{2\pi kn}{10}} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{9} e^{j\frac{2\pi n}{10}} e^{-j\frac{2\pi kn}{10}} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{9} e^{-j\frac{2\pi n}{10}} e^{-j\frac{2\pi kn}{10}} \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{9} e^{-j\frac{2\pi(k-1)n}{10}}}_{(1)} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{9} e^{-j\frac{2\pi(k+1)n}{10}}}_{(2)} \end{aligned}$$

con $k = 0, 1, \cdots, 9$. Consideremos primero el caso en que $k \ne 1$ y $k \ne 9$. Resulta:

$$\begin{aligned} X(k) &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{9}\left(e^{-j\frac{2\pi(k-1)}{10}}\right)^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{9}\left(e^{-j\frac{2\pi(k+1)}{10}}\right)^n \\ &= \frac{1}{2}\frac{1-\overbrace{e^{-j\frac{2\pi(k-1)10}{10}}}^{=1}}{1-e^{-j\frac{2\pi(k-1)}{10}}} + \frac{1}{2}\frac{1-\overbrace{e^{-j\frac{2\pi(k+1)10}{10}}}^{=1}}{1-e^{-j\frac{2\pi(k+1)}{10}}} = 0 \end{aligned}$$

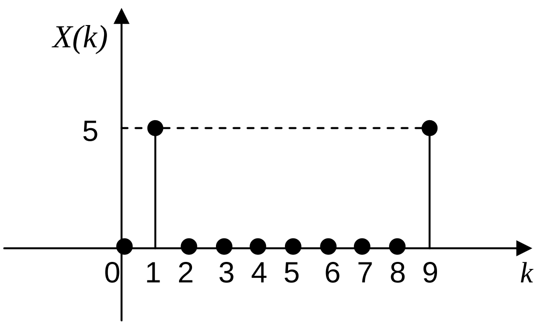
Para el caso $k = 1$, resulta:

$$X(1) = \frac{10}{2} + \frac{1}{2}\frac{1-\overbrace{e^{-j\frac{2\pi\times 2\times 10}{10}}}^{=1}}{1-e^{-j\frac{2\pi\times 2}{10}}} = \frac{10}{2}$$

En tanto que para $k = 9$, resulta:

$$X(9) = \frac{1}{2}\frac{1-\overbrace{e^{-j\frac{2\pi\times 8\times 10}{10}}}^{=1}}{1-e^{-j\frac{2\pi\times 8}{10}}} + \frac{10}{2} = \frac{10}{2}$$

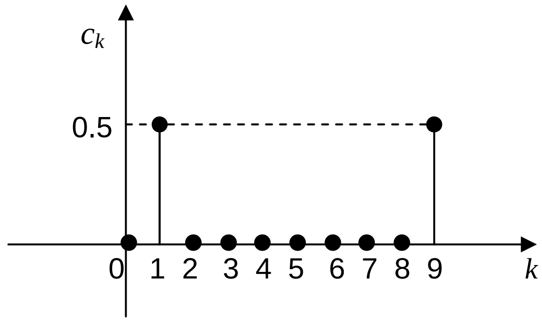
La gráfica del espectro resulta:



Calculemos los coeficientes de la serie de Fourier de $x_P(n)$. Se verifica que

$$x_p(n) = \cos\left(\frac{2\pi n}{10}\right) = \frac{1}{2}e^{j\frac{2\pi n}{10}} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi n}{10}}$$
$$= \frac{1}{2}e^{j\frac{2\pi\times 1\times n}{10}} + \frac{1}{2}e^{j\frac{2\pi\times(9-10)\times n}{10}} =$$
$$= \frac{1}{2}e^{j\frac{2\pi\times 1\times n}{10}} + \frac{1}{2}e^{j\frac{2\pi\times 9\times n}{10}}$$

de donde se puede concluir que: $c_1 = c_9 = \dfrac{1}{2}$, $c_0 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = c_6 = c_7 = c_8 = 0$

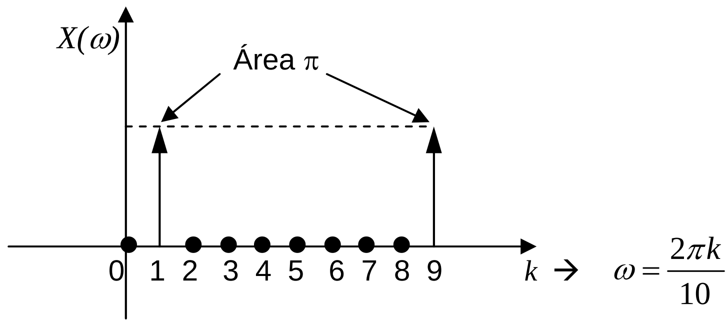


Comparando esta gráfica con la de la DFT con 10 puntos $X(k)$ de la señal, vemos que cuando el número de puntos de la DFT de la señal peródica coincide con el período de la señal (o un múltiplo entero de ese período), la DFT captura exactamente el contenido armónico de la señal.

Calculemos ahora la Transformada de Fourier en Tiempo Discreto de las señal periódica $x_P(n)$. Se verifica

$$X(\omega) = 2\pi \sum_{k=0}^{N-1} c_k \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N} - 2\pi\ell\right)$$
$$= \pi \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{10} - 2\pi\ell\right) + \pi \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi 9}{10} - 2\pi\ell\right)$$

cuya gráfica resulta



Serie 9 – Problema 8:

Sea $x(t)$ a una señal analógica con ancho de banda B = 3 KHz. Se quiere usar una DFT con N = puntos para computar el espectro de la señal con una resolución menor o igual que 50 Hz, recortando la señal con una ventana rectangular. Determine:

a. La mínima frecuencia de muestreo.

b. El mínimo número de muestras requeridas

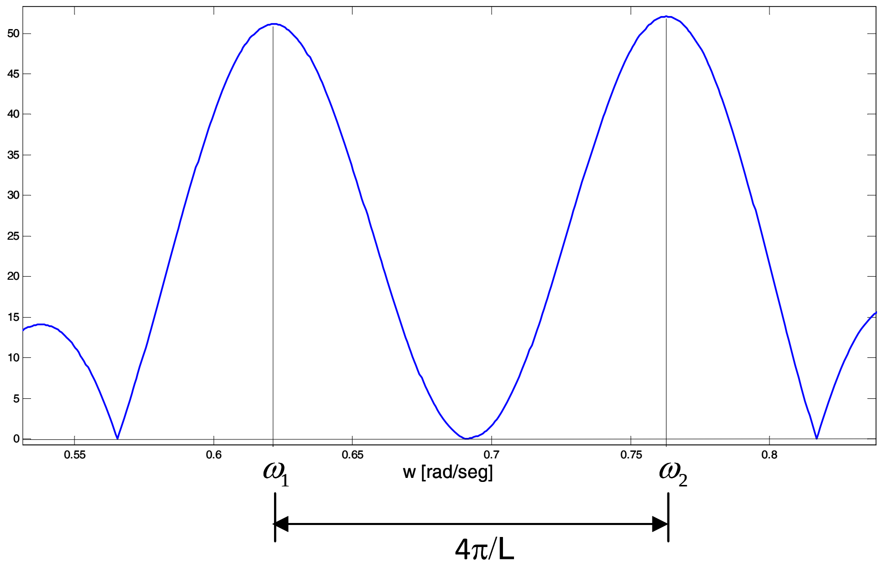
c. La mínima longitud de señal analógica que debe almacenarse

a. Como el ancho de banda de la señal es B = 3 KHz, para que no se produzca aliasing la frecuencia de muestreo debe ser $F_s \geq 2B = 6 \text{ KHz}$. Adoptemos, por ejemplo, $F_s = 10 \text{ KHz}$.

b. Para que se distingan dos frecuencias próximas en el espectro de la señal enventanada, las mismas deben estar separadas por lo menos el ancho del lóbulo principal del espectro de la ventana rectangular, es decir:

$$|\omega_2 - \omega_1| \geq \frac{4\pi}{L} \Rightarrow |f_2 - f_1| \geq \frac{2}{L} \Rightarrow |F_2 - F_1| \geq \frac{2F_s}{L}$$

donde L es la longitud de la ventana rectangular. Esta situación se muestra en la figura.



Luego, si se quiere tener una resolución de 50 Hz, resulta

$$resol_F = \frac{2F_s}{L} \Rightarrow L = \frac{2F_F}{resol_F} = \frac{2 \times 10000}{50} = 400 \text{ muestras}$$

c. Como deben almacenarse 400 muestras de la señal, esto equivale a un segmento de la misma de duración

$$T = \frac{L}{F_s} = \frac{400}{10000} \text{ seg} = 0.04 \text{ seg}$$