

Problema resuelto: Serie 4 – Problema 3

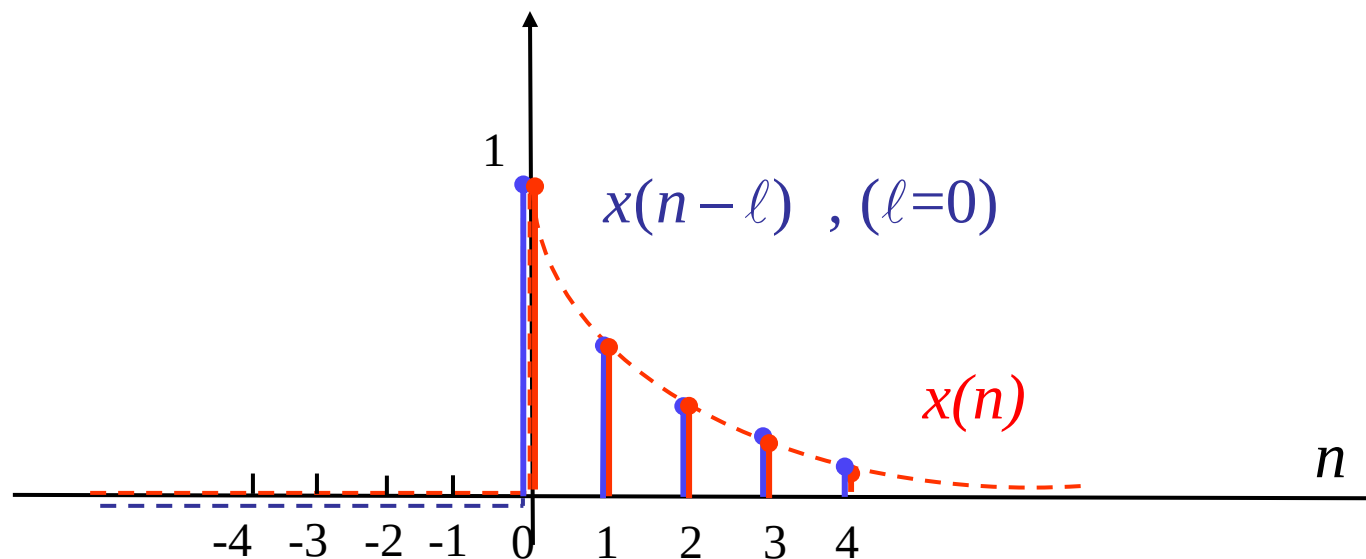
Determine la secuencia de autocorrelación de la señal

$$x(n) = a^n \mu(n) \quad , \quad 0 < a < 1$$

La secuencia de autocorrelación esta definida como

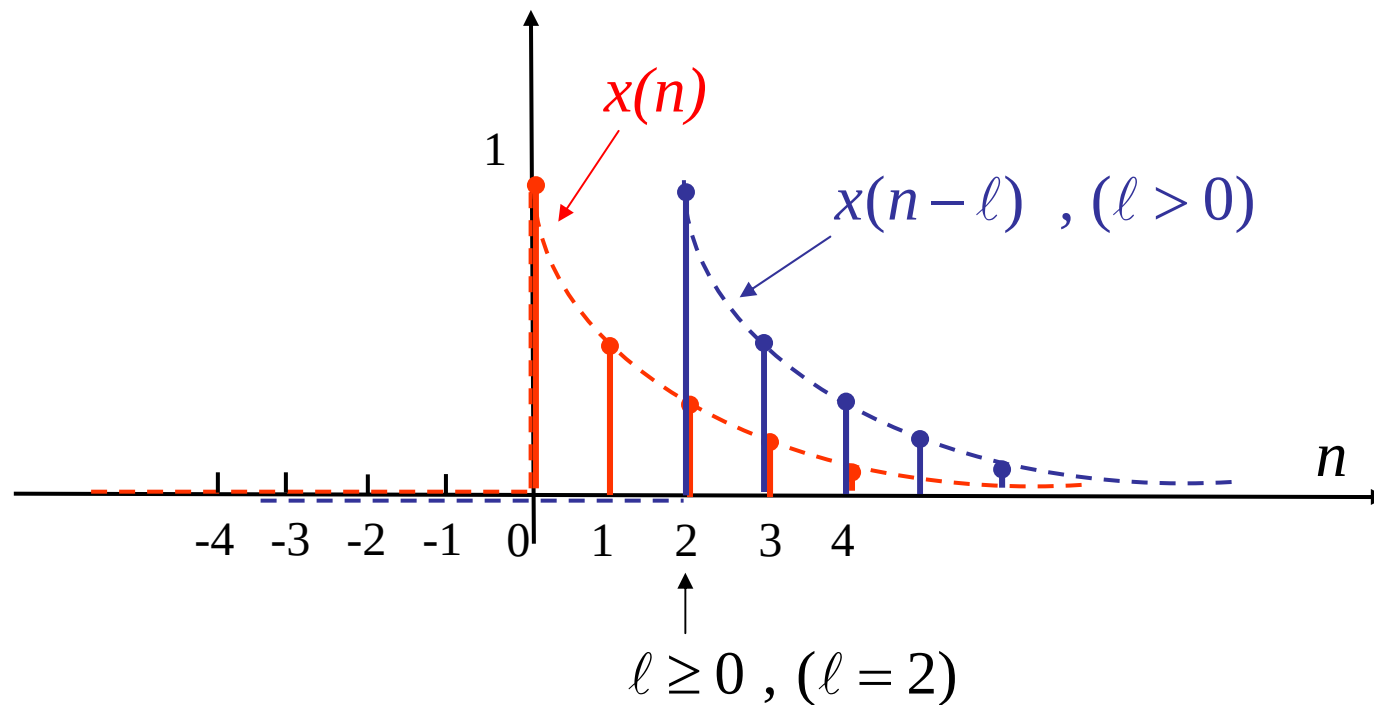
$$r_{xx}(\ell) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x(n-\ell) \quad (1)$$

Grafiquemos $x(n)$ y $x(n-\ell)$ para este caso.



Como la autocorrelación de una señal tiene simetría par, es decir $r_{xx}(\ell) = r_{xx}(-\ell)$, la calcularemos sólo para $\ell \geq 0$

Desplazamos $x(n)$ hacia la derecha para obtener $x(n - \ell)$



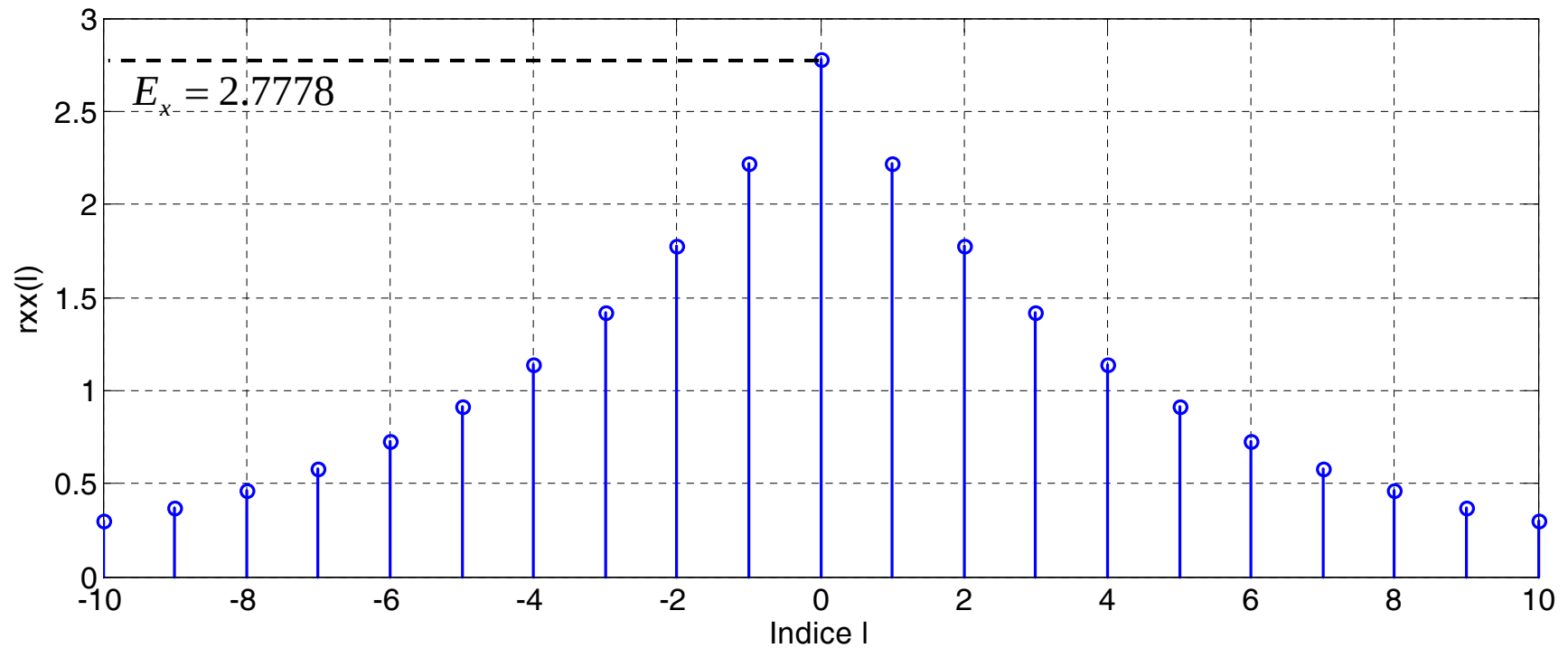
La autocorrelación resulta entonces:

$$\begin{aligned} r_{xx}(\ell) &= \sum_{n=\ell}^{\infty} a^n a^{n-\ell} = a^{-\ell} \sum_{n=\ell}^{\infty} a^{2n} \\ &\stackrel{\text{Cambio de variable } m = n - \ell}{=} a^{-\ell} \sum_{m=0}^{\infty} a^{2(m+\ell)} = a^{\ell} \sum_{m=0}^{\infty} a^{2m} \\ &= \frac{a^{\ell}}{1-a^2}, \quad \ell \geq 0 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la simetría, podemos escribir:

$$r_{xx}(\ell) = \frac{a^{|\ell|}}{1-a^2}, \quad \forall \ell$$

Grafiquemos la autocorrelación para $a = 0.8$



La energía de la señal resulta:

$$E_x = r_{xx}(0) = \frac{a^{|0|}}{1-a^2} = \frac{1}{1-0.8^2} = 2.7778$$