Teoría de Sistemas y Señales

Problemas Resueltos - Serie 8

Problema:

Considere la señal:

$$x(t) = \frac{1}{\tau} \cdot |t| \cdot [\mu(t+\tau) - \mu(t-\tau)]$$

a. Determine su espectro de amplitud y fase y grafique X(jΩ) para τ=2.

b. Cree una señal periódica $x_p(t)$ con período fundamental $T_p > 2\tau$ de modo que *x(t)* sea igual a $x_p(t)$ para $|t| < T_p/2$. Demuestre que los coeficientes a_k de la serie de Fourier de $x_p(t)$ valen:

$$a_k = \frac{1}{T_p} \cdot X(j\Omega_k) \quad , \text{con } \Omega_k = \frac{2\pi}{T_p} k$$

Grafique a_k para T_p=20 seg. y T_p=40 seg. con τ=2.

c. Discretice la señal *x(t)* con un período de muestreo T_s y obtenga *x(n)*. A partir de $X(j\Omega)$ obtenga el espectro de la señal discreta. Grafique $X_d(\omega)$ para $T_s = \tau / 100$.

Solución:

a. Primeramente grafiquemos la señal *x(t):*

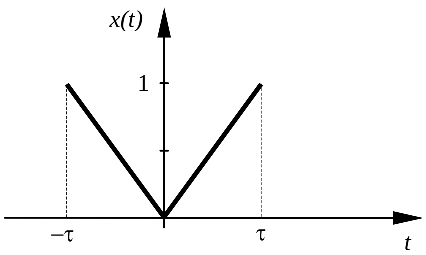

Figura 1: señal x(t).

Calculemos ahora la transformada de Fourier de *x(t)*. Tengamos en cuenta que *x(t)* es una señal real y par, por lo que su transformada también será real y par.

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\Omega t}\, dt = \int_{-\tau}^{+\tau} \frac{|t|}{\tau} e^{-j\Omega t}\, dt \,. \qquad (1)$$

Si separamos la integral en dos y recordando que

$$|t| = \begin{cases} t & , t \geq 0 \\ -t & , t < 0 \end{cases} ,$$

tenemos:

$$X(j\Omega) = -\int_{-\tau}^{0} \frac{t}{\tau} e^{-j\Omega t}\, dt + \int_{0}^{+\tau} \frac{t}{\tau} e^{-j\Omega t}\, dt \,. \qquad (2)$$

Intercambiando los extremos de la primer integral:

$$X(j\Omega) = \int_{0}^{-\tau} \frac{t}{\tau} e^{-j\Omega t}\, dt + \int_{0}^{+\tau} \frac{t}{\tau} e^{-j\Omega t}\, dt\,. \tag{3}$$

Recordemos ahora que:

$$\int t\, e^{at} = \frac{1}{a^2}(a\,t - 1)\, e^{at}\,.$$

Así, podemos calcular *X(jΩ)* como sigue:

$$\begin{aligned}
X(j\Omega) &= \frac{1}{\tau}\frac{1}{(-j\Omega)^2}(-j\Omega t - 1)\, e^{-j\Omega t}\Big|_{0}^{-\tau} + \frac{1}{\tau}\frac{1}{(-j\Omega)^2}(-j\Omega t - 1)\, e^{-j\Omega t}\Big|_{0}^{\tau} \\
&= \frac{1}{\tau\,\Omega^2}\left((-j\Omega\tau + 1)\, e^{j\Omega\tau} - 1 + (j\Omega\tau + 1)\, e^{-j\Omega\tau} - 1\right) \qquad (4) \\
&= \frac{1}{\tau\,\Omega^2}\left(-j\Omega\tau\, 2j\,\frac{\left(e^{j\Omega\tau} - e^{-j\Omega\tau}\right)}{2j} + 2\,\frac{\left(e^{j\Omega\tau} + e^{-j\Omega\tau}\right)}{2} - 2\right)
\end{aligned}$$

Finalmente, tenemos:

$$X(j\Omega) = \frac{2}{\tau\,\Omega^2}\left(\tau\,\Omega \cdot \sin(\tau\,\Omega) + \cos(\tau\,\Omega) - 1\right). \tag{5}$$

Grafiquemos ahora *X(jΩ)* para τ=2:

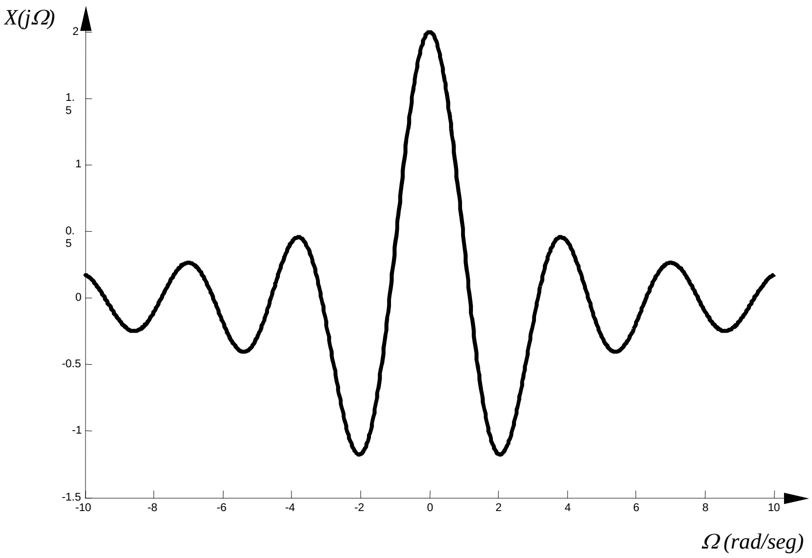

Figura 2: espectro de la señal x(t).

Nota: como se dijo anteriormente, *X(jΩ)* es real, por lo que no es necesario graficar |*X(jΩ)*| y ∠ *X(jΩ)*.

b. Consideremos ahora una señal periódica $x_p(t)$ con período fundamental $T_p > 2\tau$:

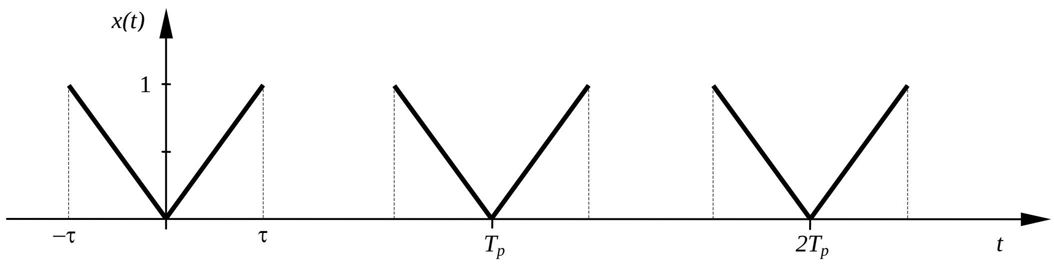

Figura 3: señal $x_p(t)$ (versión periódica de $x(t)$ con período *T_p).*

Al ser $x_p(t)$ periódica, puede descomponerse en una serie de Fourier:

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\, e^{j\Omega_k t}, \quad \Omega_k = \frac{2\pi}{T_p} k\ , \tag{6}$$

con:

$$a_k = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} x_p(t)\, e^{-j\Omega t} dt\ , \tag{7}$$

donde el intervalo de integración es cualquier segmento de tiempo de longitud T_p. Multiplicando por T_p a ambos miembros de esta última ecuación, nos queda:

$$\begin{aligned} a_k T_p &= \int_{T_p} x_p(t)\, e^{-j\Omega_k t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\Omega_k t}\, dt \end{aligned} \tag{8}$$

donde la ultima igualdad deriva del hecho que $x(t)$ es nula fuera del intervalo de tiempo $[-\frac{1}{2}T_p, \frac{1}{2}T_p]$. Así, comparando $a_k T_p$ con la definición de la transformada de Fourier, tenemos que:

$$a_k T_p = X(j\Omega_k) \quad , \text{con} \quad \Omega_k = \frac{2\pi}{T_p} k \tag{9}$$

Finalmente,

$$a_k = \frac{1}{T_p} X(j\Omega_k) \tag{10}$$

Reemplazando en la ecuación (5) obtenemos:

$$a_k = \frac{2}{T_p \tau \Omega^2}\left(\tau\,\Omega_k \cdot \sin(\tau\,\Omega_k) + \cos(\tau\,\Omega_k) - 1\right), \qquad \Omega_k = \frac{2\pi}{T_p} k$$

A continuación se muestra las gráficas de a_k para T_p=20 seg. y T_p=40 seg. con τ=2.

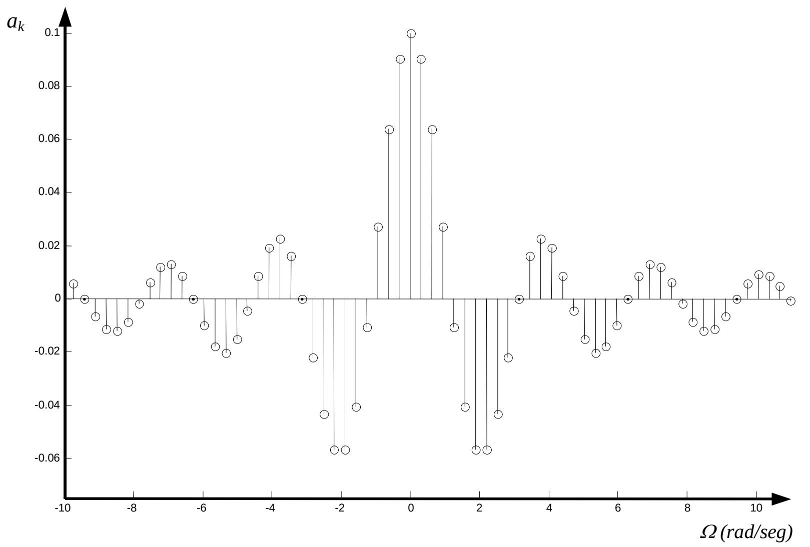

Figura 4: coeficientes a_k de la serie de Fourier de la señal periódica $x_p(t)$ para T_p=20 seg. y τ=2. Los valores a_k están definidos sólo para frecuencias múltiplos enteros de $\Omega_0 = 2\pi/T_p$.

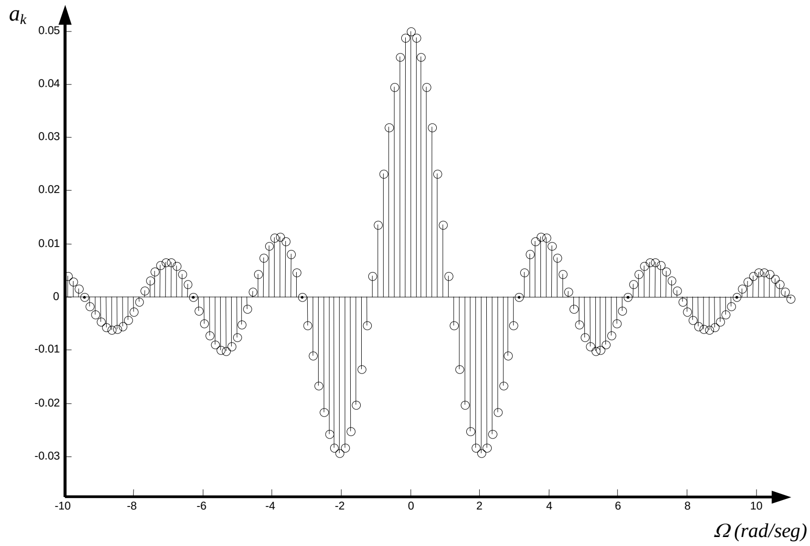

Figura 5: coeficientes a_k de la serie de Fourier de la señal periódica $x_p(t)$ para T_p=40 seg. y τ=2. Los valores a_k están definidos sólo para frecuencias múltiplos enteros de $\Omega_0 = 2\pi/T_p$.

Nota: en las figuras 4 y 5 se graficaron los coeficientes a_k en función de la variable Ω y no en función de k. La relación entre estas dos variables es:

$$\Omega_k = \frac{2\pi}{T_p} k = \Omega_0\, k \qquad , k \in \mathbb{Z} \tag{11}$$

c. Para discretizar la señal *x(t)* debemos reemplazar el argumento *t* por nT_s , donde T_s es el período de muestreo considerado.

$$x(n) = \frac{T_s}{\tau} \cdot |n| \cdot \left[\mu(n + \frac{\tau}{T_s}) - \mu(n - \frac{\tau}{T_s}) \right] . \qquad (12)$$

Nota: en el caso que τ/T_s no sea un número entero se deberá redondear dicha fracción al entero más cercano.

Ahora, a partir del espectro de la señal continua se puede deducir el espectro de *x(n)* a través de la siguiente relación:

$$X_d(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c\left(j \tfrac{\omega - 2\pi k}{T_S} \right) . \qquad (13)$$

Vemos que el espectro de la señal discreta es una repetición periódica del espectro escalado $1/T_S\ X_c(j\omega)$ de la señal en tiempo continuo.

También se puede obtener $X_d(\omega)$ a partir de su definición:

$$X_d(\omega) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\omega n} = \frac{T_s}{\tau} \sum_{-\tau/T_s}^{+\tau/T_s} |n| e^{-j\omega n} = ... \qquad (14)$$

A continuación graficamos el espectro $X_d(\omega)$ para $T_s = \tau / 100$.

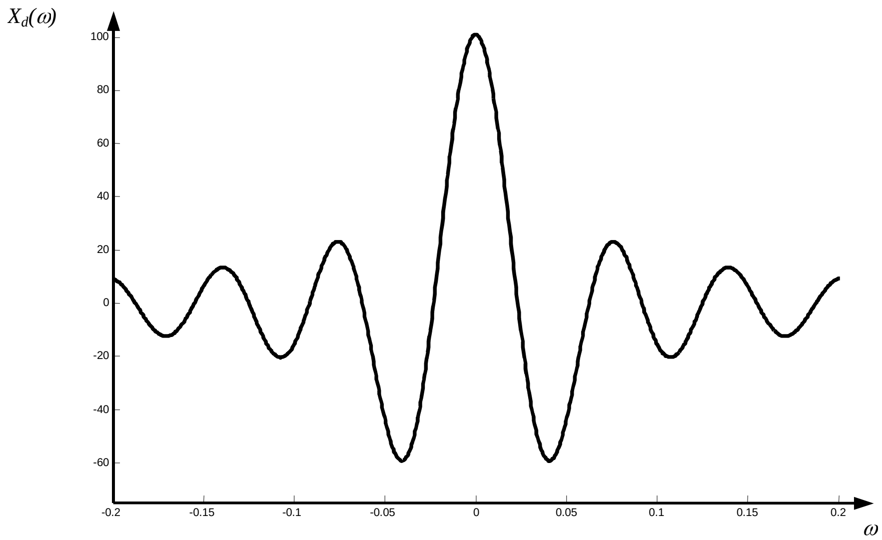

Figura 6: espectro $X_d(\omega)$ de la señal x(n) para τ=2 y $T_s = \tau/100$. Como sabemos, $X_d(\omega)$ es periódica con período 2π.

Análisis adicional por parte del alumno:

- Compare las figuras 4 y 5 con el espectro de la señal *x(t)* (figura 2). Todas están graficadas para un valor de τ=2 seg. Verifique que se cumpla la relación:

$$a_k = \frac{1}{T_p} X(j\Omega_k)$$

- Relacione el espectro de *x(t)* (figura 2) con el de *x(n)* (figura 6) y compruebe que se cumpla:

$$X_d(\omega) = \frac{1}{T_s} X_c\left(j \tfrac{\omega}{T_s} \right) \qquad , -\pi \leq \omega < \pi$$

Siendo $T_s = \tau / 100$. Vemos que esta última ecuación es una aproximación ya que resulta de tomar sólo un sumando ($k=0$) en la sumatoria de la ecuación (13). Sin embargo, si $X(j\Omega)$ es cercana a cero fuera del rango $[-½F_s , ½F_s]$ (siendo F_s la frecuencia de muestreo), dicha ecuación se cumple con gran exactitud.