

Teoría de Sistemas y Señales

Problemas resueltos – Serie 7

Problema: El diagrama de bloques de la figura es la representación en la denominada **Forma Directa II** de una ecuación en diferencias de segundo orden.

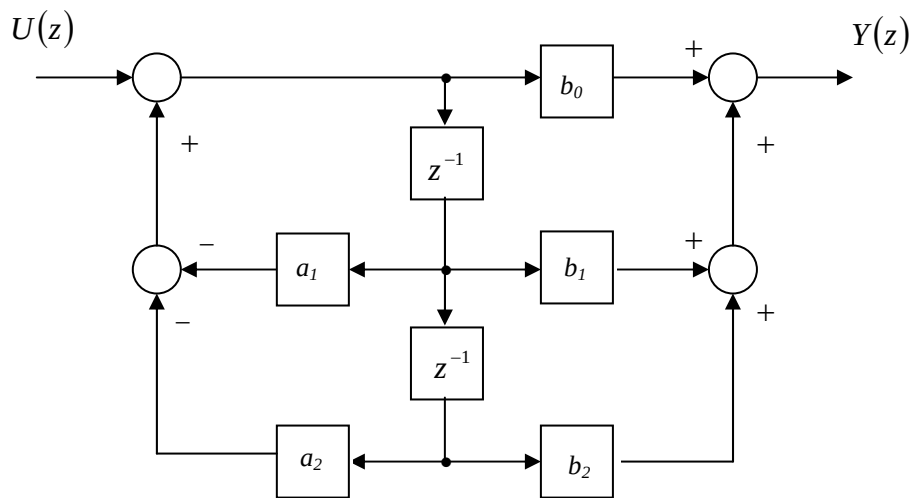
- Halle la expresión de la Función Transferencia Z del sistema.
- Halle la expresión de la ecuación en diferencias correspondiente al diagrama.
- Para los valores

$$a_1 = -0.7 \quad b_0 = 3$$

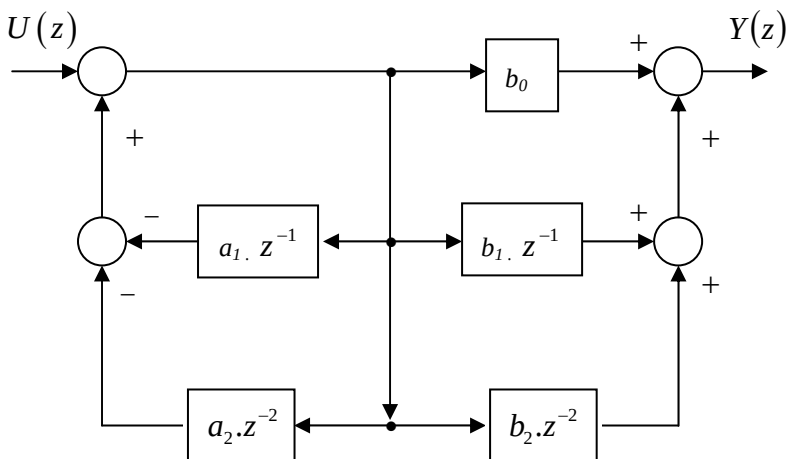
$$a_2 = 0.1 \quad b_1 = -1.2$$

$$b_2 = 0$$

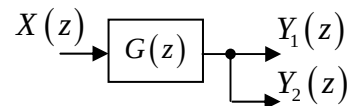
halle la respuesta del sistema a una entrada **escalón unitario** a partir de condiciones iniciales $y(-1)=0$, $y(-2)=1$.



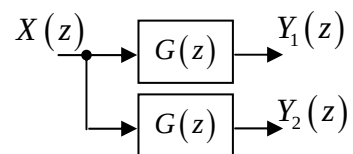
- Para hallar la función transferencia, comenzamos moviendo los bloques z^{-1} de forma de lograr separar las ramas realimentadas de las ramas en directa. Así,



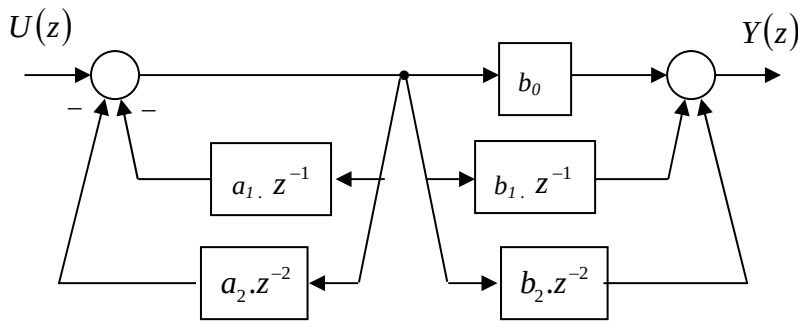
Propiedad:



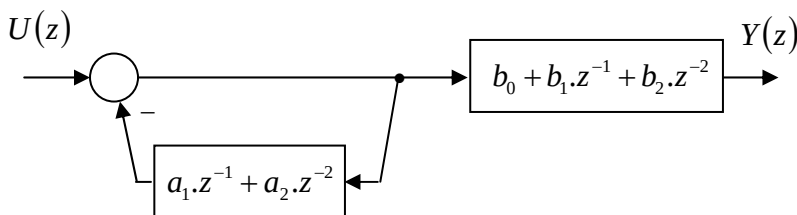
III



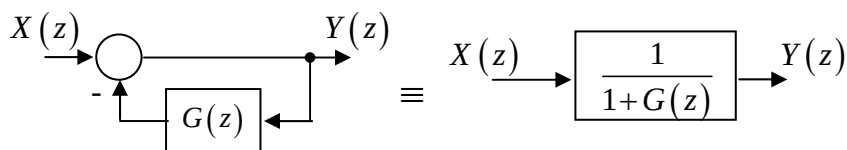
Agrupando los sumadores en serie a la entrada y a la salida, y uniendo los puntos de derivación, se llega al siguiente diagrama de bloques:



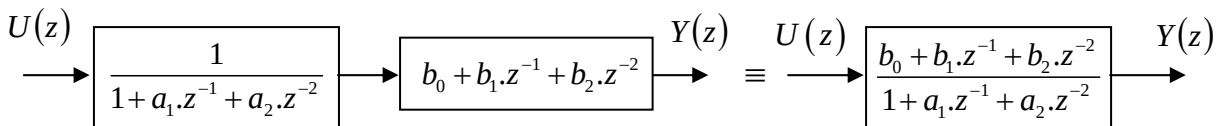
Ahora bien, tenemos 2 ramas en paralelo retroalimentadas en el sumador de la entrada y 3 ramas en paralelo entrando al sumador de la salida, con lo cuál en ambos casos se pueden sumar las ganancias de las ramas y se obtiene:



Luego, resolviendo el lazo simple de retroalimentación mediante la propiedad:



tenemos:



b. Conociendo la Función Transferencia $H(z)$ para hallar la ecuación en diferencias asociada simplemente antitransformamos de la siguiente manera:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1.z^{-1} + b_2.z^{-2}}{1 + a_1.z^{-1} + a_2.z^{-2}} \Rightarrow Y(z)(1 + a_1.z^{-1} + a_2.z^{-2}) = U(z)(b_0 + b_1.z^{-1} + b_2.z^{-2})$$

$$\downarrow Z^{-1}$$

$$y(n) + a_1.y(n-1) + a_2.y(n-2) = b_0.u(n) + b_1.u(n-1) + b_2.u(n-2)$$

c. Para hallar la respuesta del sistema al escalón teniendo en cuenta condiciones iniciales **no nulas**, trabajaremos en el dominio de la Transformada Z transformando ahora la ecuación en diferencias anteriormente hallada pero teniendo en cuenta las condiciones iniciales. Así:

$$y(n) + a_1.y(n-1) + a_2.y(n-2) = b_0.u(n) + b_1.u(n-1) + b_2.u(n-2)$$

$$\downarrow Z$$

$$\begin{aligned} Y(z) + a_1[z^{-1}.Y(z) + y(-1)] + a_2[z^{-2}.Y(z) + z^{-1}.y(-1) + y(-2)] &= \\ &= b_0.U(z) + b_1[z^{-1}.U(z) + y(-1)] + b_2[z^{-2}.U(z) + z^{-1}.y(-1) + y(-2)] \end{aligned}$$

Por tratarse de una entrada de tipo escalón $U(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$ y además $u(-1) = u(-2) = 0$. Por lo tanto, agrupando los términos que multiplican a $Y(z)$ y reemplazando se obtiene:

$$Y(z)(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}) + (a_1 + a_2 z^{-1})y(-1) + a_2 y(-2) = \left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right)(b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2})$$

Reemplazando por los valores de las constantes dados como datos:

$$Y(z)(1 - 0.7z^{-1} + 0.1z^{-2}) + 0.1 = \left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right)(3 - 1.2z^{-1})$$

$$Y(z)(1 - 0.7z^{-1} + 0.1z^{-2}) = \left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right)(3 - 1.2z^{-1}) - 0.1$$

$$Y(z)(1 - 0.7z^{-1} + 0.1z^{-2}) = \left(\frac{2.9 - 1.1z^{-1}}{1-z^{-1}}\right)$$

$$Y(z) = \frac{2.9 - 1.1z^{-1}}{(1-z^{-1})(1 - 0.7z^{-1} + 0.1z^{-2})} \frac{z^3}{z^3}$$

$$Y(z) = \frac{2.9z^3 - 1.1z^2}{(z-1)(z^2 - 0.7z + 0.1)}$$

$$\lambda^2 - 0.7\lambda + 0.1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} \begin{cases} 0.2 \\ 0.5 \end{cases}$$

$$Y(z) = \frac{2.9z^3 - 1.1z^2}{(z-1)(z-0.2)(z-0.5)}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{2.9z^2 - 1.1z}{(z-1)(z-0.2)(z-0.5)} = \frac{A}{(z-1)} + \frac{B}{(z-0.2)} + \frac{C}{(z-0.5)}$$

Igualando numeradores se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0.1A + 0.5B + 0.2C = 0 \\ -0.7A - 1.5B - 1.2C = -1.1 \\ A + B + C = 2.9 \end{cases} \quad \text{resultando} \quad \begin{matrix} A = 4.50000 \\ B = -0.4333 \\ C = -1.1667 \end{matrix}$$

Y antitransformando por fracciones simples:

$$Y(z) = \frac{A}{(1-z^{-1})} + \frac{B}{(1-0.2z^{-1})} + \frac{C}{(1-0.5z^{-1})}$$

$$\downarrow Z^{-1}$$

$$y(n) = A.\mu(n) + B.(0.2)^n.\mu(n) + C.(0.5)^n.\mu(n)$$