Serie 9 – Problema 4:

La señal exponencial

$$x_a(t) = \begin{cases} e^{-t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

es muestreada con una frecuencia F_s = 20 muestras por segundo, y un bloque de 100 muestras es usado para estimar su espectro. Determine las características espectrales de la señal $x_a(t)$ computando la DFT de la secuencia de duración finita. Compare el espectro de la señal en tiempo discreto truncada con el espectro de la señal analógica.

El espectro de la señal resulta

$$X_a(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j\Omega t} dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(1+j\Omega)t} dt$$

$$= -\frac{1}{1+j\Omega} e^{-(1+j\Omega)t} \Big|_0^{\infty}$$

$$X_a(\Omega) = \frac{1}{1+j\Omega} \qquad (1)$$

La señal muestreada con frecuencia F_s resulta:

$$x(n) = x_a\left(\frac{n}{F_s}\right) = \begin{cases} e^{-\frac{n}{F_s}} & n \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

y su correspondiente espectro resulta:

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{n}{F_s}} e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\left(\frac{1}{F_s}+j\omega\right)n}$$

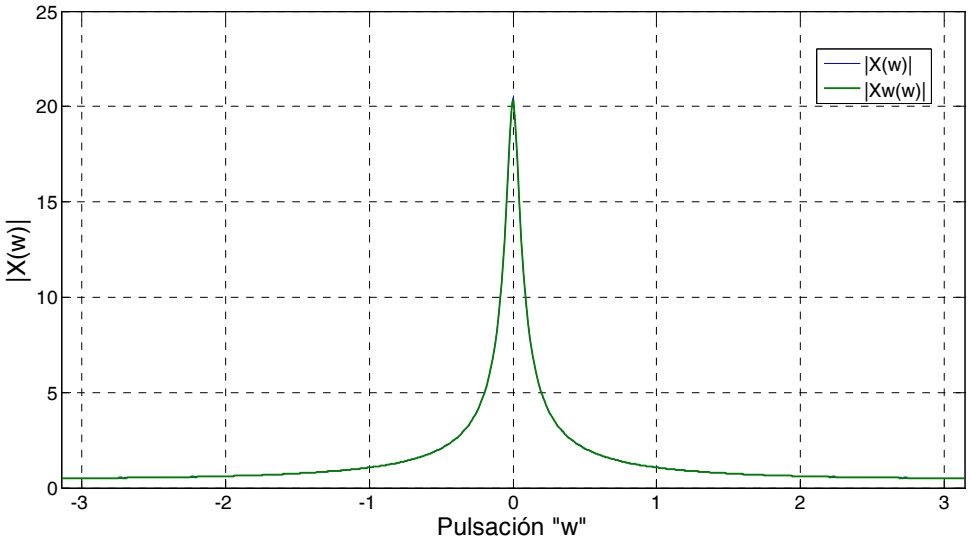
$$X(\omega) = \frac{1}{1-e^{-\left(\frac{1}{F_s}+j\omega\right)}} \qquad (2)$$

El espectro de la señal muestreada truncada a N = 100 muestras resulta

$$X_w(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\frac{n}{F_s}} e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\left(\frac{1}{F_s}+j\omega\right)n}$$

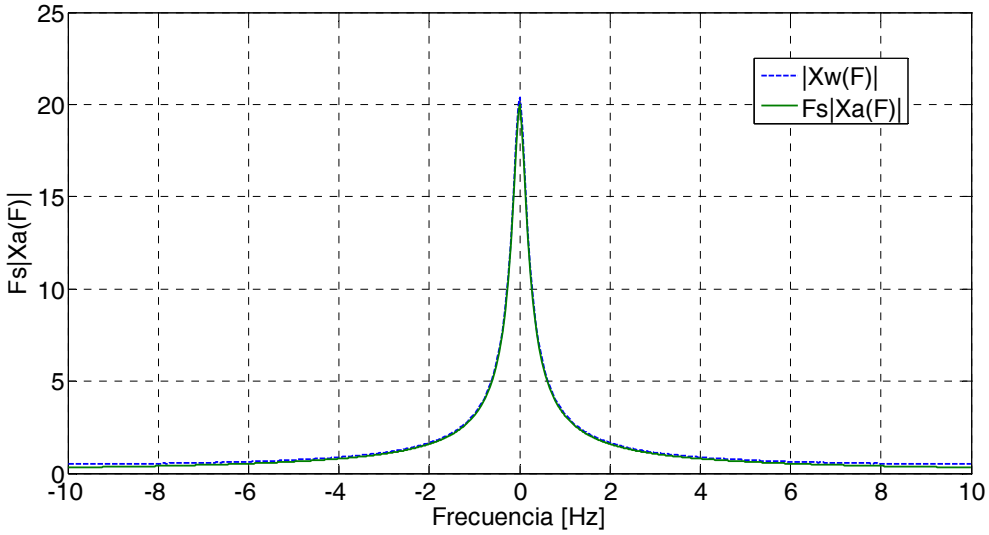
$$X_w(\omega) = \frac{1-e^{-\left(\frac{1}{F_s}+j\omega\right)N}}{1-e^{-\left(\frac{1}{F_s}+j\omega\right)}} \qquad (3)$$

Grafiquemos el módulo de $X(\omega)$ y $X_w(\omega)$ para el caso F_s = 20 Hz y N = 100 muestras



Podemos observar que son casi indistinguibles, es decir que tomando N = 100 muestras de la señal muestreada de longitud infinita nos permite aproximar su espectro $X(\omega)$ en (2) por el espectro $X_w(\omega)$ en (3) .

Grafiquemos ahora el espectro $F_s\ Xa(\Omega)$ y el espectro $X_w(\omega F_s)$



Podemos observar entonces que el espectro de la señal muestreada truncada a N = 100 muestras es una buena aproximación del espectro de la señal analógica escalada por F_s.

Esto se debe a que con F_s = 20 Hz el aliasing es despreciable ya que

$$\left|X_a(F)\right|_{F=10Hz} = \left|\frac{1}{1+ j2\pi\times 10}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+(20\pi)^2}} = 0.0159$$

es muy pequeño, y por otra parte el término en el numerador de (3)

$$e^{-\frac{N}{F_s}} = e^{-\frac{100}{20}} = 0.0067$$

también es muy chico por lo que (3) es una muy buena aproximación de (2).