

### Serie 9 – Problema 1:

Sea la señal analógica  $x_a(t) = e^{-A|t|}$ ,  $A > 0$

- Determine su espectro.
- Indique si la señal es limitada en banda o no limitada en banda.
- Determine el espectro de la señal muestreada con una frecuencia de muestreo  $F_s$ .
- Grafique ambos espectros para distintos valores de  $F_s$ .

a. La transformada de Fourier de  $x_a(t)$  resulta :

$$\begin{aligned} X_a(\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j\Omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{At} e^{-j\Omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-At} e^{-j\Omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{(A-j\Omega)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(A+j\Omega)t} dt \\ &= \frac{1}{(A-j\Omega)} e^{(A-j\Omega)t} \Big|_{-\infty}^0 - \frac{1}{(A+j\Omega)} e^{-(A+j\Omega)t} \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{(A-j\Omega)} + \frac{1}{(A+j\Omega)} \\ &= \frac{2A}{A^2 + \Omega^2} \end{aligned} \tag{1}$$

La gráfica del espectro (para  $A = 1$ ) se muestra en la Figura 1.

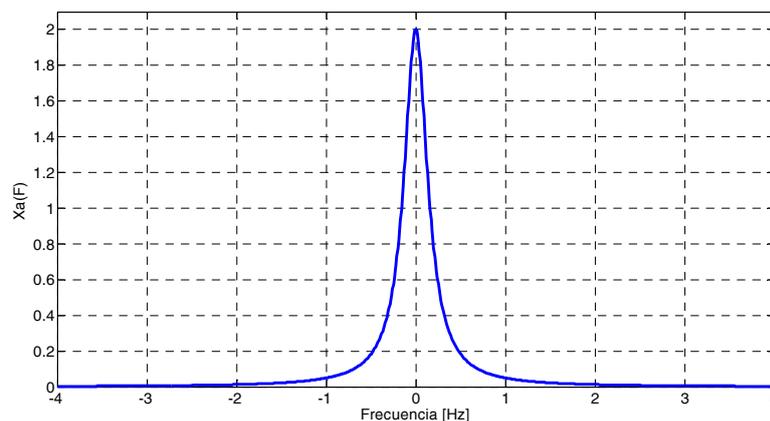


Figura 1: Espectro  $X_a(F)$  vs.  $F$  (para  $A = 1$ ).

b. De la expresión (1) podemos ver que la señal  $x_a(t)$  es no limitada en banda, aunque el contenido frecuencial por encima de, digamos, 4 Hz es despreciable. En efecto:

$$X_a(F) \Big|_{F=4 \text{ Hz}} = \frac{2}{1 + 4 \times \pi^2 \times 4^2} = 0.0032$$

c. La señal muestreada resulta

$$x(n) = e^{-AT|n|}, \quad A > 0, \quad T = \frac{1}{F_s}$$

y su Transformada de Fourier en Tiempo Discreto

$$\begin{aligned}
 X(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{-1} e^{ATn} e^{-j\omega n} + \sum_{n=0}^{\infty} e^{-ATn} e^{-j\omega n} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^0 e^{ATn} e^{-j\omega n} + \sum_{n=0}^{\infty} e^{-ATn} e^{-j\omega n} - 1 \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} e^{-ATm} e^{j\omega m} + \sum_{n=0}^{\infty} e^{-ATn} e^{-j\omega n} - 1 \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} e^{(-AT+j\omega)m} + \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(AT+j\omega)n} - 1 \\
 &= \frac{1}{1 - e^{(-AT+j\omega)}} + \frac{1}{1 - e^{-(AT+j\omega)}} - 1 \\
 &= \frac{1 - e^{-(AT+j\omega)} + 1 - e^{(-AT+j\omega)}}{\left| \left( 1 - e^{(-AT+j\omega)} \right) \right|^2} - 1 \\
 &= \frac{1 - e^{-(AT+j\omega)} + 1 - e^{(-AT+j\omega)}}{\left| \left( 1 - e^{-AT} \cos(\omega) - je^{-AT} \sin(\omega) \right) \right|^2} - 1 \\
 &= \frac{1 - e^{-(AT+j\omega)} + 1 - e^{(-AT+j\omega)}}{\left( 1 - e^{-AT} \cos(\omega) \right)^2 + e^{-2AT} \sin^2(\omega)} - 1 \\
 &= \frac{1 - e^{-AT} \cos(\omega) + je^{-AT} \sin(\omega) + 1 - e^{-AT} \cos(\omega) - je^{-AT} \sin(\omega)}{1 - 2e^{-AT} \cos(\omega) + e^{-2AT} \cos^2(\omega) + e^{-2AT} \sin^2(\omega)} - 1 \\
 &= \frac{2 - 2e^{-AT} \cos(\omega)}{1 - 2e^{-AT} \cos(\omega) + e^{-2AT}} - 1 \\
 &= \frac{1 - e^{-2AT}}{1 - 2e^{-AT} \cos(\omega) + e^{-2AT}}
 \end{aligned}$$

La gráfica del espectro para una frecuencia de muestreo de  $F_s = 8$  Hz se muestra en la Figura 2.

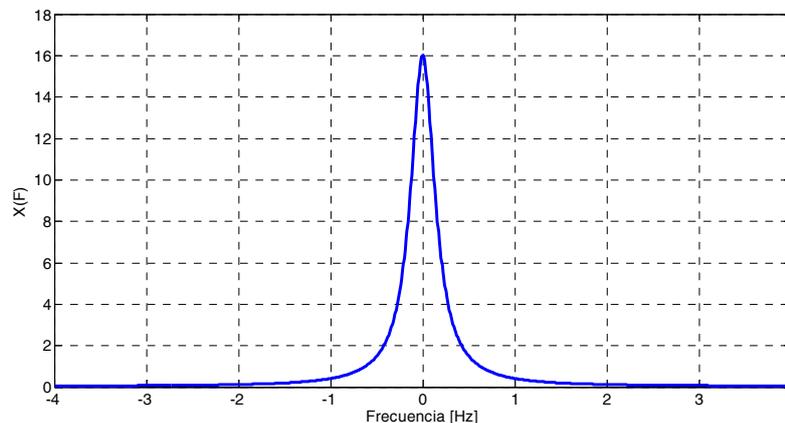


Figura 2: Espectro  $X(F)$  vs.  $F$  (para  $A = 1$  y  $F_s = 8$  Hz).

En la Figura 3 se representan los espectros  $F_s X_a(F)$  y  $X(F)$  vs.  $F$  (para  $A = 1$  y  $F_s = 8$  Hz), donde puede observarse que son indistinguibles uno del otro.

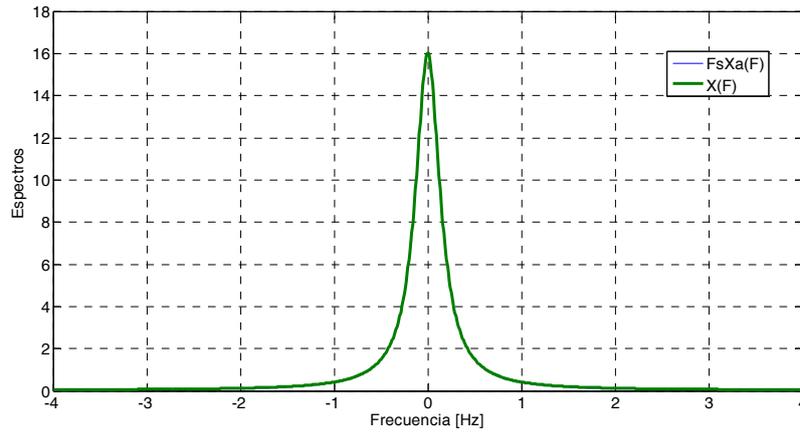


Figura 3: Espectros  $X(F)$  vs.  $F$  y  $F_s X_a(F)$  vs.  $F$  (para  $A = 1$  y  $F_s = 8$  Hz).

Consideremos ahora una frecuencia de muestreo  $F_s = 2$  Hz, y repitamos la gráfica de Figura 3. La gráfica resultante se muestra en Figura 4, donde puede observarse la periodicidad de  $X(F)$ .

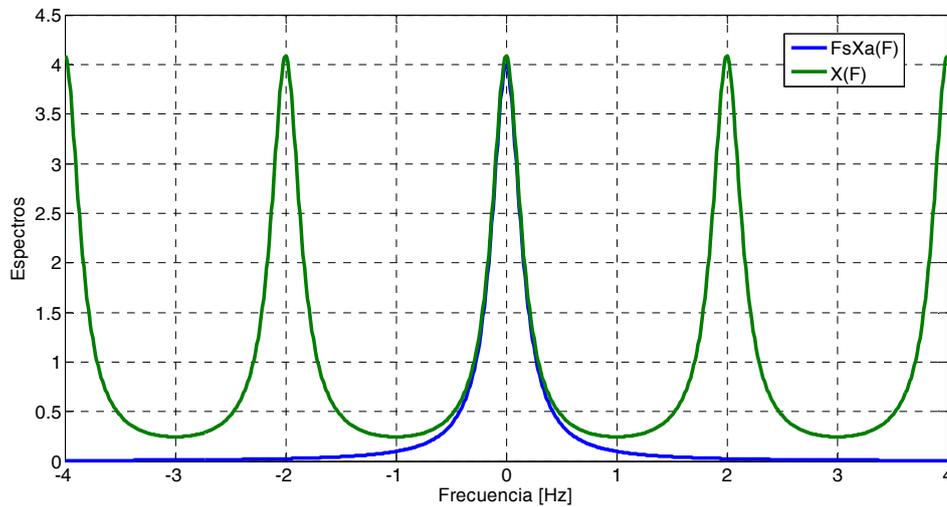


Figura 4: Espectros  $X(F)$  vs.  $F$  y  $F_s X_a(F)$  vs.  $F$  (para  $A = 1$  y  $F_s = 2$  Hz).