Serie 8 – Parte I - Problema 2: Considere la sinusoide rectificada de onda completa de la Figura 1.

a. Determine su espectro $Xa(F)$

b. Calcule la potencia de la señal

c. Grafique la densidad espectral de potencia

d. Compruebe la relación de Parseval para esta señal

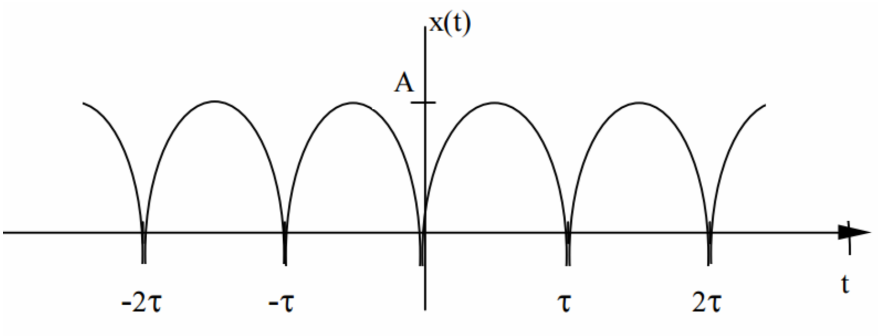

Figura 1: Señal senoidal rectificada onda completa.

Podemos ver que la señal es periódica con período τ. Los coeficiente de la serie de Fourier de la señal resultan:

$$
\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{\tau}\int_0^\tau x(t)e^{-j\frac{2\pi kt}{\tau}}dt = \frac{A}{\tau}\int_0^\tau \sin(\frac{2\pi t}{2\tau})e^{-j\frac{2\pi kt}{\tau}}dt \\
&= \frac{A}{j2\tau}\left[\int_0^\tau e^{j\frac{\pi t}{\tau}}e^{-j\frac{2\pi kt}{\tau}}dt - \int_0^\tau e^{-j\frac{\pi t}{\tau}}e^{-j\frac{2\pi kt}{\tau}}dt\right] \\
&= \frac{A}{j2\tau}\left[\int_0^\tau e^{-j\frac{\pi t}{\tau}(2k-1)}dt - \int_0^\tau e^{-j\frac{\pi t}{\tau}(2k+1)}dt\right] \\
&= \frac{A}{j2\tau}\left[-\frac{\tau}{j\pi(2k-1)}e^{-j\frac{\pi t}{\tau}(2k-1)}\Big|_0^\tau + \frac{\tau}{j\pi(2k+1)}e^{-j\frac{\pi t}{\tau}(2k+1)}\Big|_0^\tau\right] \\
&= \frac{A}{2\pi}\left[\frac{1}{(2k-1)}\left(e^{-j\pi(2k-1)}-1\right) - \frac{1}{(2k+1)}\left(e^{-j\pi(2k+1)}-1\right)\right] \\
&= \frac{A}{\pi}\left[-\frac{1}{(2k-1)}+\frac{1}{(2k+1)}\right] = \frac{A}{\pi}\frac{(-2k-1+2k-1)}{(2k-1)(2k+1)} \\
&= -\frac{A}{\pi}\frac{2}{(4k^2-1)}
\end{aligned}
$$

Los coeficientes de Fourier se muestran en la Figura 2 (para el caso A=1).

La componente de continua de la señal resulta:

$$x_{cc} = c_0 = \frac{2A}{\pi}$$

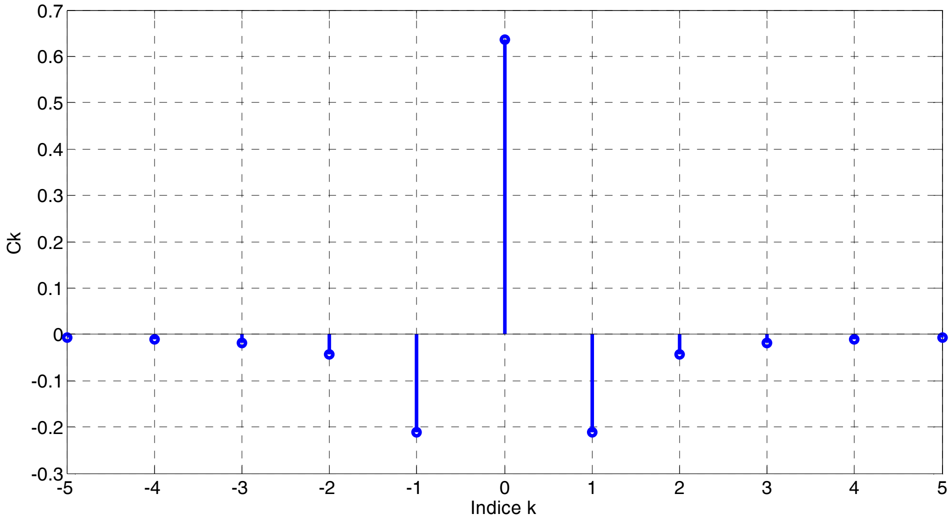

Figura 2: Coeficientes de Fourier.

La densidad espectral de potencia resulta:

$$S_{xx} = \left|c_k\right|^2 = \frac{4A^2}{\pi^2\left(4k^2-1\right)^2}$$

Su gráfica en función de k se muestra en la Figura 3.

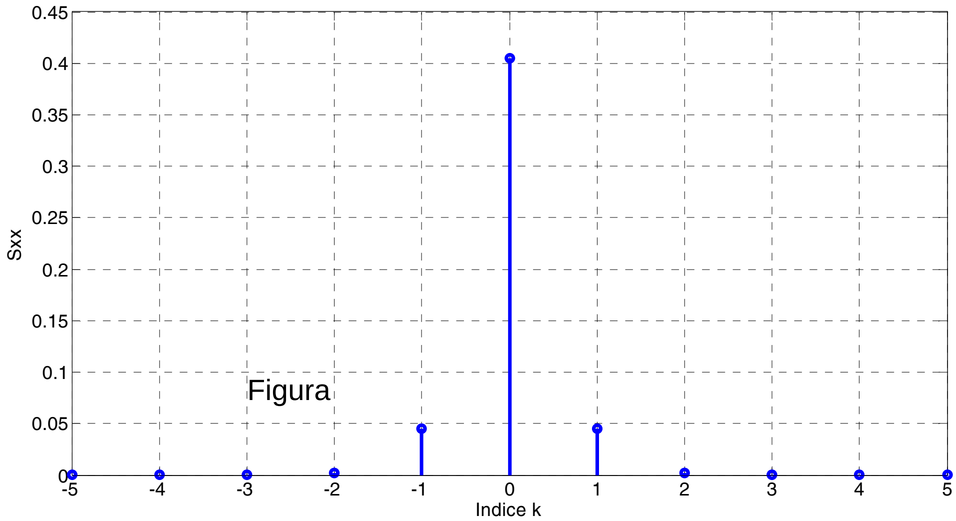

Figura 3: Espectro de densidad de potencia.

La potencia media en un período resulta:

$$P_{med} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|c_k\right|^2 = \frac{A^2}{2}$$

Si la calculamos en el dominio temporal resulta:

$$P_{med} = \frac{A^2}{\tau}\int_0^{\tau} \sin^2\left(\frac{2\pi}{2\tau}t\right)dt = \frac{A^2}{2\tau}\int_0^{\tau}\left[1-\cos\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right)\right]dt$$
$$= \frac{A^2}{2\tau}\int_0^{\tau} dt = \frac{A^2}{2}$$

Se verifica la Identidad de Parseval