Serie 8 – Parte II - Problema 5: Calcule la transformada de Fourier de las siguientes señales.

a. $x(n) = \mu(n) - \mu(n-6)$

Se verifica

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{5} e^{-j\omega n}$$
$$= \sum_{n=0}^{5} \left(e^{-j\omega}\right)^n = \frac{1-e^{-j6\omega}}{1-e^{-j\omega}}$$

En la Figura 1 se representa el espectro de módulo (grafica superior) y el espectro de fase (gráfica inferior).

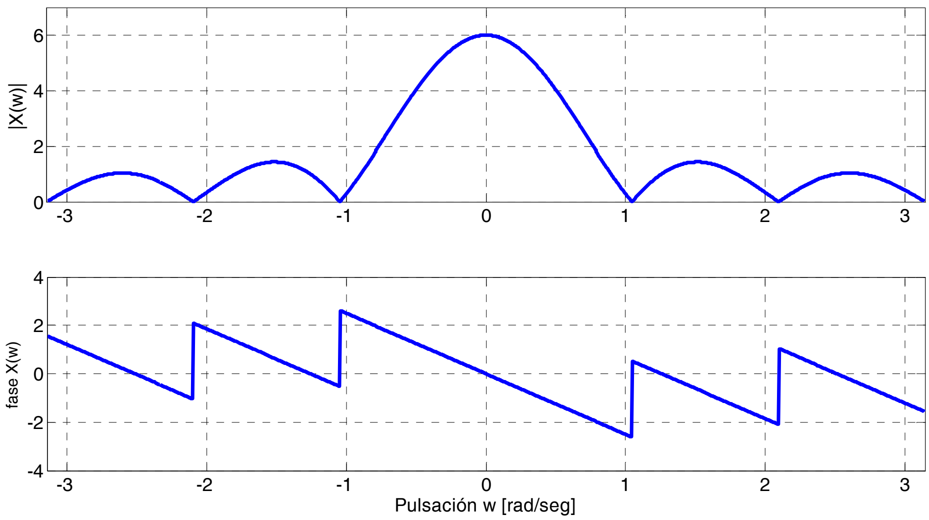

Figura 1: Espectro de módulo (gráfica superior) y Espectro de fase (gráfica inferior).

c. $x(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n \mu(n+4)$

Se verifica

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=-4}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n e^{-j\omega n}$$

Cambio de variable

$m = n+4$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{m-4} e^{-j\omega(m-4)} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-4} e^{j\omega 4} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^m e^{-j\omega m}$$
$$= 4^4 e^{j\omega 4} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4} e^{-j\omega}\right)^m = 4^4 \frac{e^{j\omega 4}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

En la Figura 2 se representa el espectro de módulo (grafica superior) y el espectro de fase (gráfica inferior).

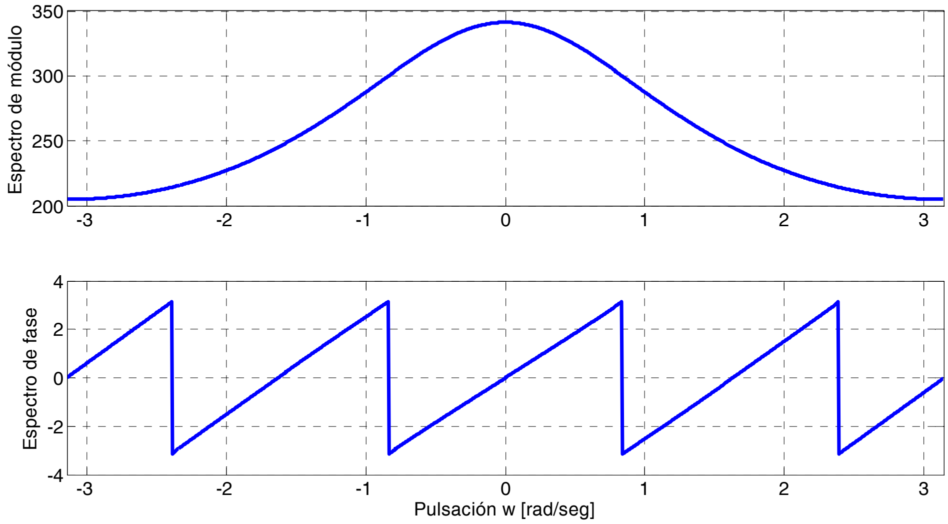

Figura 2: Espectro de módulo (gráfica superior) y Espectro de fase (gráfica inferior).

d. $x(n) = \alpha^n \sin(\omega_0 n)\mu(n) \quad , \quad 0 < \alpha < 1$

Se verifica

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \sin(\omega_0 n)e^{-j\omega n}$$

$$= \frac{1}{2j}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n e^{j\omega_0 n}e^{-j\omega n} - \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n e^{-j\omega_0 n}e^{-j\omega n}\right]$$

$$= \frac{1}{2j}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n e^{-j(\omega-\omega_0)n} - \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n e^{-j(\omega+\omega_0)n}\right]$$

$$= \frac{1}{2j}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\alpha e^{-j(\omega-\omega_0)}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\alpha e^{-j(\omega+\omega_0)}\right)^n\right]$$

$$= \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{1-\alpha e^{-j(\omega-\omega_0)}} - \frac{1}{1-\alpha e^{-j(\omega+\omega_0)}}\right]$$

En la Figura 3 se representa el espectro de módulo (grafica superior) y el espectro de fase (gráfica inferior), para $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$ y $\alpha = 0.8$.

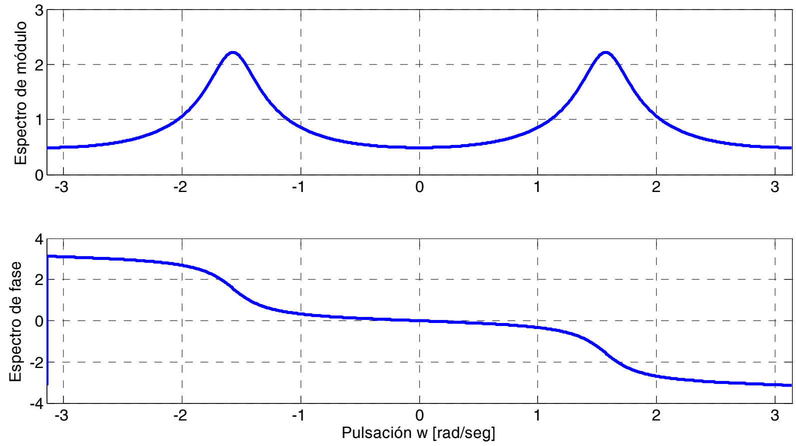

Figura 3: Espectro de módulo (grafica superior) y el espectro de fase (gráfica inferior), para $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$ y $\alpha = 0.8$.