Serie 6 - Problema 3:

Hallar el rango de valores de K para el cual todas las raíces del siguiente polinomio están en el semiplano izquierdo

$$a(s) = s^5 + 5s^4 + 10s^3 + 10s^2 + 5s + K$$

Una condición **necesaria** , pero no suficiente, para que las raíces de un polinomio estén en el semiplano izquierdo abierto es que el polinomio esté completo con todos los coeficientes del mismo signo. Luego, para que se verifique la condición necesaria debe ser $K > 0$.

Para verificar la condición necesaria y suficiente debemos construir la Tabla de Routh.

$$\begin{array}{llll} s^5 & 1 & 10 & 5 \\ s^4 & 5 & 10 & K \\ s^3 & b_1 & b_2 & \\ s^2 & c_1 & c_2 & \\ s^1 & d_1 & & \\ s^0 & e_1 & & \end{array}$$

$$b_1 = -\frac{\det\begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}}{5} = 8 \quad , \quad b_2 = -\frac{\det\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 5 & K \end{vmatrix}}{5} = \frac{25-K}{5} = 5 - \frac{K}{5}$$

$$c_1 = -\frac{\det\begin{vmatrix} 5 & 10 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1} = -\frac{5\left(5-\frac{K}{5}\right)-80}{8} = -\frac{25-K-80}{8} = \frac{55+K}{8}$$

$$c_2 = -\frac{\det\begin{vmatrix} 5 & K \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}}{b_1} = K$$

$$d_1 = -\frac{\det\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}}{c_1} = -\frac{b_1c_2 - c_1b_2}{c_1} = -\frac{8K - \left(\frac{55+K}{8}\right)\left(5-\frac{K}{5}\right)}{\frac{55+K}{8}}$$

$$e_1 = c_2 = K$$

La condición necesaria y suficiente para que todas las raíces estén en el semiplano izquierdo abierto es que no haya cambios de signo en la primera columna de la Tabla de Routh. Es decir, debe ser:

$$b_1 > 0 \text{ , } c_1 > 0 \text{ , } d_1 > 0 \text{ , } e_1 > 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{55+K}{8} > 0 \Rightarrow K > -55 \\ -\dfrac{8K - \left(\frac{55+K}{8}\right)\left(5-\frac{K}{5}\right)}{\frac{55+K}{8}} > 0 \Rightarrow (1) \\ K > 0 \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow 8K - \left(\frac{55+K}{8}\right)\left(5 - \frac{K}{5}\right) < 0$$

$$\Rightarrow 8K - \frac{275}{8} - \frac{5}{8}K + \frac{11}{8}K + \frac{1}{40}K^2 < 0$$

$$\Rightarrow K^2 + 320K - 25K + 55K - 1375 < 0$$

$$\Rightarrow K^2 + 350K - 1375 < 0 \Rightarrow -353.8854 < K < 3.8854$$

Luego, para que las raíces del polinomio estén en el semiplano izquierdo abierto debe ser:

$$0 < K < 3.8854$$