Serie 6 - Problema 10: La función transferencia de un SLE es

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} \quad , \quad 0<\xi<1$$

Verificar que el Ancho de Banda B_ω del sistema se puede calcular como:

$$B_\omega=\omega_n\sqrt{1-2\xi^2+\sqrt{2+4\xi^4-4\xi^2}}$$

Debemos calcular la frecuencia de potencia mitad, es decir la frecuencia para la cual la potencia es la mitad de la potencia a baja frecuencia (para este caso en que el sistema tiene un comportamiento pasabajos). Es decir

$$\frac{P(\omega)}{P_0}=\frac{1}{2}=\frac{|G(j\omega)|^2}{|G_0|^2}$$

Como la función transferencia tiene ganancia estática igual a 1, entonces $|G_0|=1$, y debemos entonces hallar ω tal que

$$\begin{aligned}
&|G(j\omega)|^2=\frac{1}{2}\\
&\Rightarrow\left|\frac{\omega_n^2}{\left(\omega_n^2-\omega^2\right)+j2\xi\omega_n\omega}\right|^2=\frac{1}{2}\\
&\Rightarrow\frac{\omega_n^4}{\left(\omega_n^2-\omega^2\right)^2+4\xi^2\omega_n^2\omega^2}=\frac{1}{2}\\
&\Rightarrow 2\omega_n^4=\omega_n^4+\omega^4-2\omega_n^2\omega^2+4\xi^2\omega_n^2\omega^2\\
&\Rightarrow \omega^4+\omega_n^2\left(4\xi^2-2\right)\omega^2-\omega_n^4=0
\end{aligned}$$

Vemos que un polinomio de orden 4 en ω. Definiendo $x=\omega^2$ se reduce a un polinomio de orden 2 en x

$$x^2+\omega_n^2\left(4\xi^2-2\right)x-\omega_n^4=0$$

cuyas raíces son (solo nos quedamos con la raíz positiva):

$$\begin{aligned}
&x=\omega^2=\frac{\omega_n^2\left(2-4\xi^2\right)+\sqrt{\omega_n^4\left(2-4\xi^2\right)^2+4\omega_n^4}}{2}\\
&\Rightarrow\omega=\omega_n\sqrt{1-2\xi^2+\sqrt{\left(1-2\xi^2\right)^2+1}}\\
&\Rightarrow\omega=\omega_n\sqrt{1-2\xi^2+\sqrt{2+4\xi^4-4\xi^2}}
\end{aligned}$$

Es decir, resulta

$$B_\omega=\omega_n\sqrt{1-2\xi^2+\sqrt{2+4\xi^4-4\xi^2}}$$

que era lo queríamos probar.

Consideremos un ejemplo numérico con los siguientes valores: $\omega_n=10$, $\xi=0.2$. La función transferencia resulta entonces:

$$G(s) = \frac{100}{s^2 + 4s + 100}$$

Y el ancho de banda resulta: $B_\omega = 15.0958$.

El diagrama de Bode de amplitud resulta