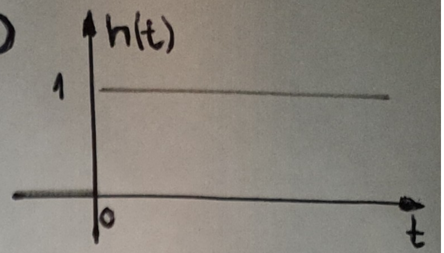
Problema 1:

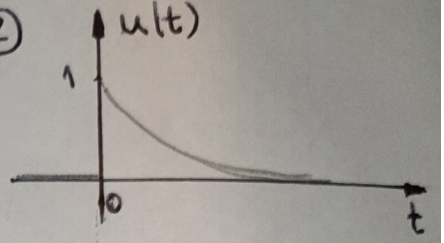
Dado un sistema (relajado) lineal con respuesta al impulso:

$$h(t) = \mu(t)$$

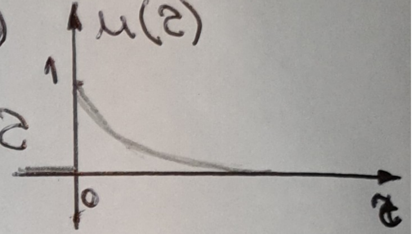
para una entrada:

$$u(t) = e^{-\alpha t} \cdot \mu(t)$$

①


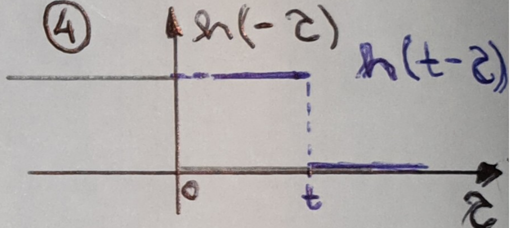
②


Como ya sabemos la respuesta de un sistema lineal y estacionario viene dada por la integral de convolución:

③


$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \cdot h(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau$$

También sabemos q' como las señales h(t) y u(t) son causales podemos reescribir:

④


$$y(t) = \int_{0}^{\infty} u(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_{0}^{\infty} h(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau$$

$$= \int_{0}^{\infty} \left[e^{-\alpha\tau} \cdot \mu(\tau)\right] \cdot \left[\mu(t-\tau)\right] d\tau$$

Como en esta última integral la vble. de integración τ varía entre 0 e ∞, el término $\mu(\tau)$ es siempre 1. Así,

$$y(t) = \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha\tau} \cdot \mu(t-\tau)\, d\tau$$

Vemos así que el resultado depende del t considerado. Si $\underline{t<0}$, como $0 < \tau < \infty$, $\mu(\underbrace{t-\tau}_{<0}) = 0$

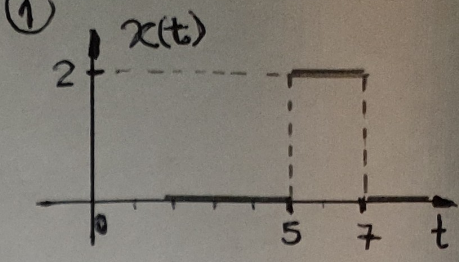
luego, $y(t) = 0$

Si en cambio $\underline{t>0}$, como $0<\tau<\infty$, $\mu(t-\tau) = 1$ $\Leftrightarrow$ $t > \tau$ por lo que:

$$y(t) = \int_{0}^{t} e^{-\alpha\tau}\, d\tau = \left(\frac{e^{-\alpha\tau}}{-\alpha}\right)\Bigg|_{0}^{t} = \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha}$$

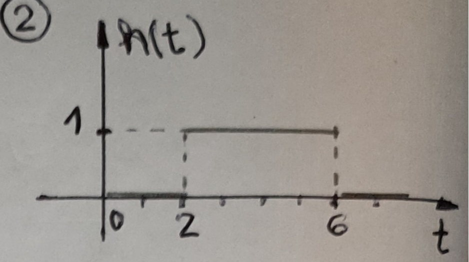
También lo podemos ver gráficamente con la 3era y 4ta curva (azul)

Problema 3:



Recordando la definición del pulso unitario

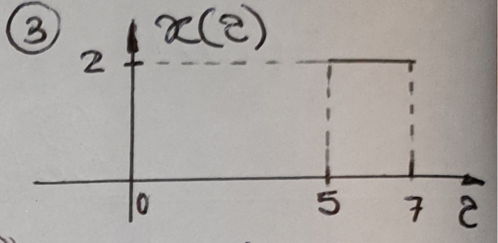
$$\Pi(t)=\begin{cases}1 & 0\leq t<1\\ 0 & \text{c.o.c.}\end{cases} \Rightarrow \Pi\left(\frac{t-5}{2}\right)=\begin{cases}1 & 0\leq \frac{t-5}{2}<1\\ 0 & \text{c.o.c.}\end{cases}$$



$$\therefore\ x(t)=2.\Pi\left(\frac{t-5}{2}\right)=\begin{cases}2 & 5\leq t<7\\ 0 & \text{c.o.c.}\end{cases}$$

De igual manera:

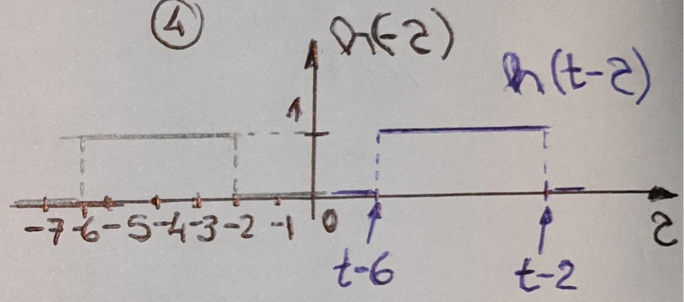
$$h(t)=\begin{cases}1 & 2\leq t<4\\ 0 & \text{c.o.c}\end{cases}$$



La convolución de ambas señales viene dada por:

$$x(t) * h(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau).h(t-\tau)d\tau$$

señal solo definida entre 5 y 7



$$=\int_{5}^{7} 2.h(t-\tau)\,d\tau$$

Vemos que esta integral depende del t que considerado. Como se ve en la cuarta gráfica de acuerdo a si el t considerado es mayor que 0 la curva negra se desplaza a la derecha y si el t es negativo hacia la izquierda (un ejemplo de esto se ve en azul). Tendremos entonces diferentes situaciones:

- Si $t-2<5 \Leftrightarrow \underline{t<7}$ (no hay superposición de los pulsos)

$$y(t)=\int_{5}^{7} 2.0\,d\tau=0$$

- Si $5\leq t-2<7 \Leftrightarrow \underline{7\leq t<9}$ (el extremo derecho de la curva azul comienza a solaparse con la curva de $x(\tau)$)

$$y(t)=\int_{5}^{t-2} 2.1\,d\tau=2\left[\tau\right]\Big|_{5}^{t-2}=2(t-2-5)=2t-14$$

- Si $t-2\geq 7 \wedge t-6<5 \Leftrightarrow \underline{9\leq t<11}$ (superposición total entre 5 y 7

$$y(t)=\int_{5}^{7} 2.1\,d\tau=2(7-5)=4$$

- Si $5\leq t-6<7 \Leftrightarrow \underline{11\leq t<13}$ (el extremo izq. está entre 5 y 7)

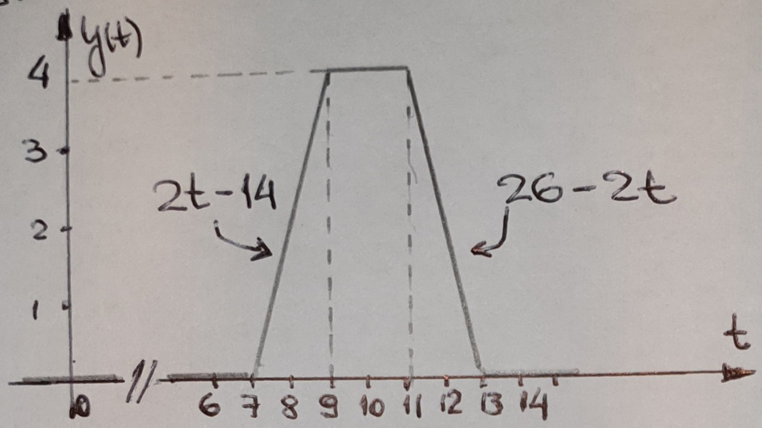
$$y(t)=\int_{t-6}^{7} 2.1\,d\tau=2(7-(t-6))=26-2t$$

Problema 3 (cont):

- Si $t-6 \geq 7 \iff \underline{t \geq 13}$ (el extremo izq. de la curva azul está más a la izq. de 7 y no hay superposición)

$$y(t) = \int_5^7 2.0 \, d\tau = 0$$

Graficaremos ahora la señal obtenida para los diferentes intervalos.



Es importante notar que la gráfica no puede presentar discontinuidades.