Serie 2 - Problema 7.b: Calcule la convolución $\mathbf{y(n) = u(n) * h(n)}$:

$$\begin{cases} \mathbf{u(n) = [\mu(n+1) - \mu(n-4)]} \\ \mathbf{h(n) = [\mu(n+2) - \mu(n-3)] \times (3 - |n|)} \end{cases}$$

Como primer paso, grafiquemos ambas señales. En la figura 1 puede observarse la señal u(n).

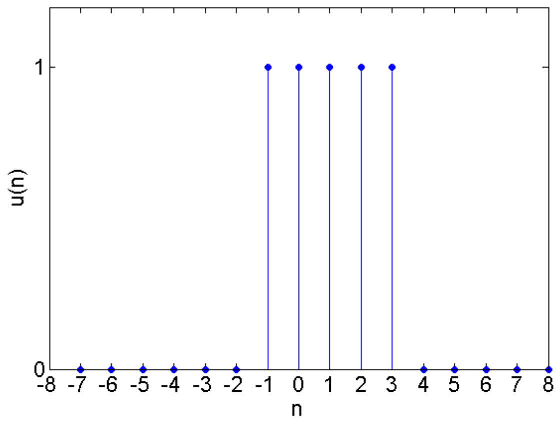

Fig. 1. Gráfica de u(n).

Al observar la definición de h(n), puede verse que está compuesta por dos partes:

$$\begin{cases} h(n) = h_1(n) \, . \, h_2(n) \\ h_1(n) = \mu(n+2) - \mu(n-3) \\ h_2(n) = 3 - |n| \end{cases}$$

En la figura 2 se muestran los pasos para obtener la señal $h_2(n)$.

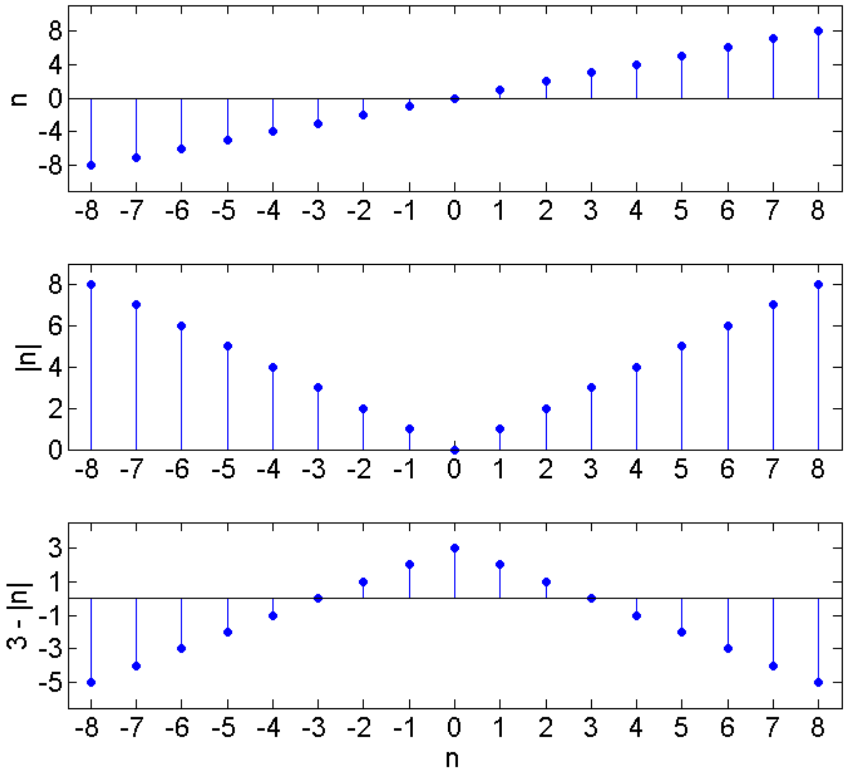

Fig. 2. Pasos para obtener h(n).

En la figura 3 pueden verse ambas señales, $h_1(n)$ y $h_2(n)$, en una misma gráfica:

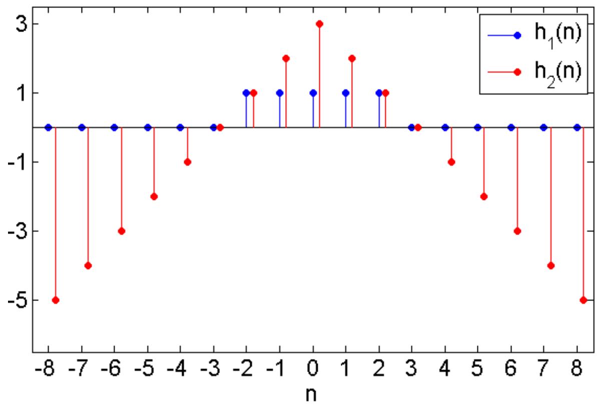

Fig. 3. Pasos para obtener h(n).

Por lo tanto, multiplicando punto a punto $h_1(n)$ y $h_2(n)$ se obtiene la señal h(n), la cual se muestra en la figura 4.

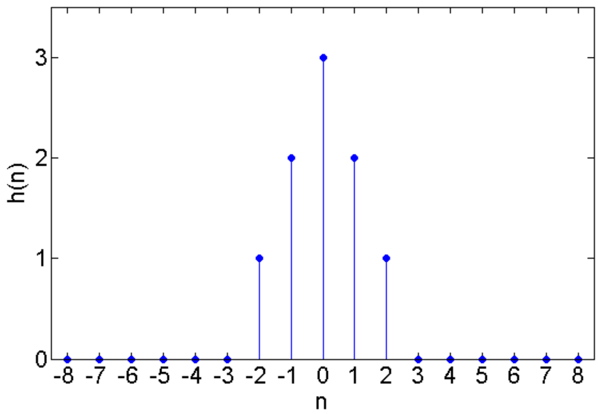

Fig. 4. Gráfica de h(n).

Para calcular la convolución entre u(n) y h(n), debemos realizar el siguiente cálculo:

$$y(n) = u(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k)\,.\,h(n-k) \qquad (1)$$

donde la señal que se invierte y desplaza al aplicar el método gráfico es h(n). Por propiedad conmutativa, la convolución también puede calcularse de la siguiente manera:

$$y(n) = h(n) * u(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\,.\,u(n-k) \qquad (2)$$

donde la señal que se invierte y desplaza al aplicar el método gráfico es u(n). Debido a que la expresión matemática de la señal u(n) es más simple, se decide optar por esta última opción (ecuación (2)), en la cual se invierte y desplaza la señal u(n). En la figura 5 se muestran los pasos para obtener la señal u(n-k), para un valor de n = 2 y también para un valor genérico.

Como puede observarse, el mayor valor de k para el cual u(k-n) ≠ 0, al cual de ahora en más llamaremos extremo superior de u(k-n), vale n + 1. Similarmente, el menor valor de k para el cual u(k-n) ≠ 0, al cual de ahora en más llamaremos extremo inferior de u(k-n), vale n – 3. Aplicando el mismo razonamiento para h(k), el extremo inferior vale -2 y el extremo superior 2. Notar que en este caso no dependen del valor de n, dado que no se está desplazando esta señal.

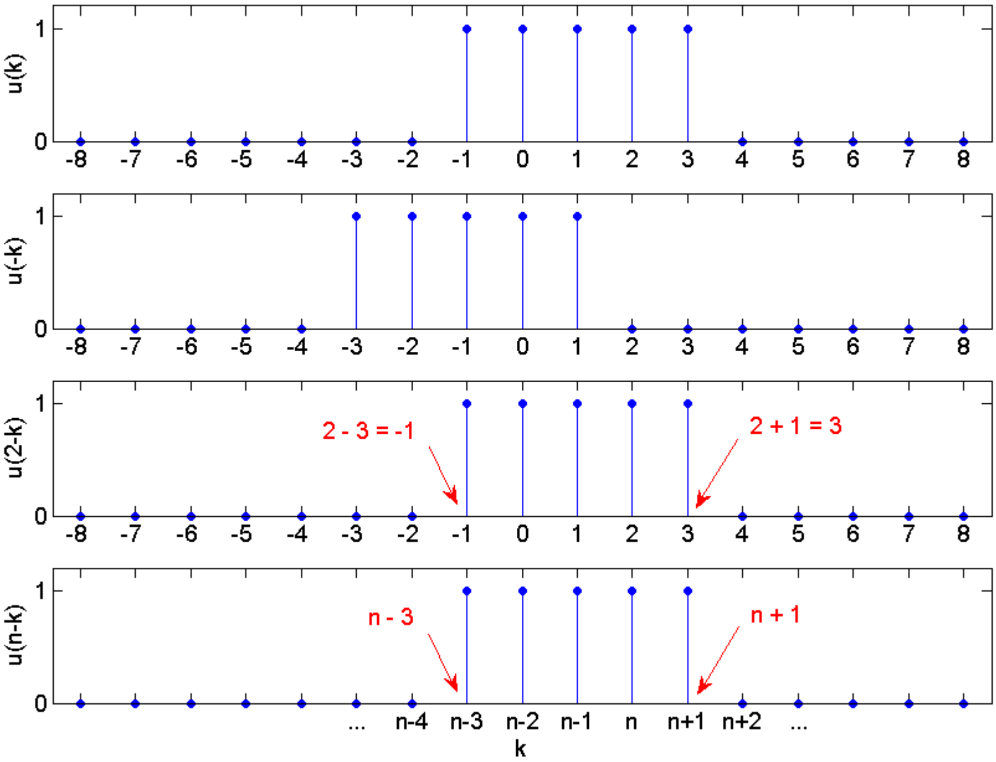

Fig. 5. Pasos para obtener u(n-k). Ejemplos para n = 2 y también para un valor genérico.

En la figura 6 pueden verse las gráficas de h(k) y u(n-k) con n=0, superpuestas:

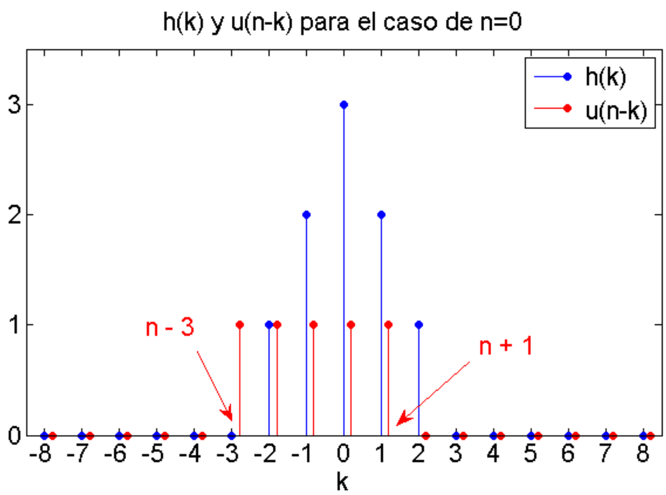

Fig. 6. Gráficas de h(k) y u(n-k) para el caso de n = 0.

Dado que aplicaremos el método gráfico, el cual consiste de reflejar y trasladar una de las señales (u(n) en este caso), debemos encontrar los diferentes intervalos donde aplicar la sumatoria de la ecuación (2). Dichos intervalos quedan definidos de la siguiente manera:

INTERVALO 1: $n < 3$

En este intervalo no hay superposición entre ambas señales, por lo cual la señal y(n) es igual 0 para todos los puntos. En la figura 7 puede observarse ambas señales para el caso de n = - 4. El límite de este intervalo se calcula igualando el extremo superior de u(k-n) con el extremo inferior de h(k):

$$n + 1 = -2 \;\Rightarrow\; n = -3$$

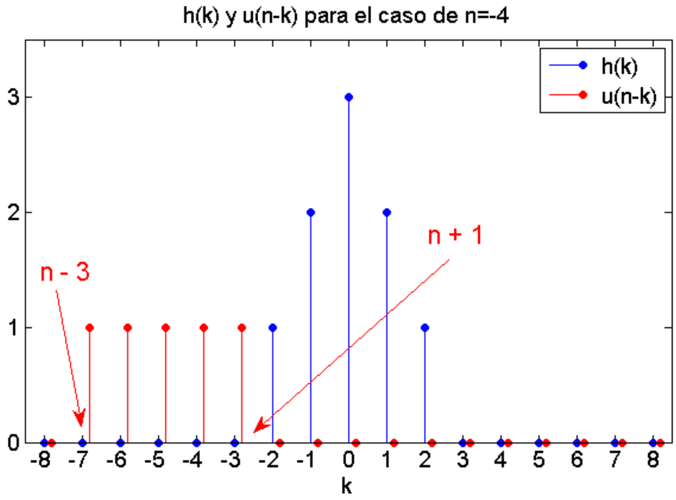

Fig. 7. Gráficas de h(k) y u(n-k) para el caso de n = -4.

INTERVALO 2: $-3 \le n \le -1$

En este intervalo, la señal u(n-k) avanza hacia la derecha, superponiéndose con la parte de h(k) que posee pendiente positiva. El límite inferior de este intervalo es continuación del anterior, mientras que el superior se calcula igualando el extremo superior de u(k-n) al mayor valor de k para el cual la pendiente de h(k) es positiva:

$$\mathrm{n} + 1 = 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{n} = -1$$

En la figura 8 puede observarse ambas señales para el caso de n = -2.

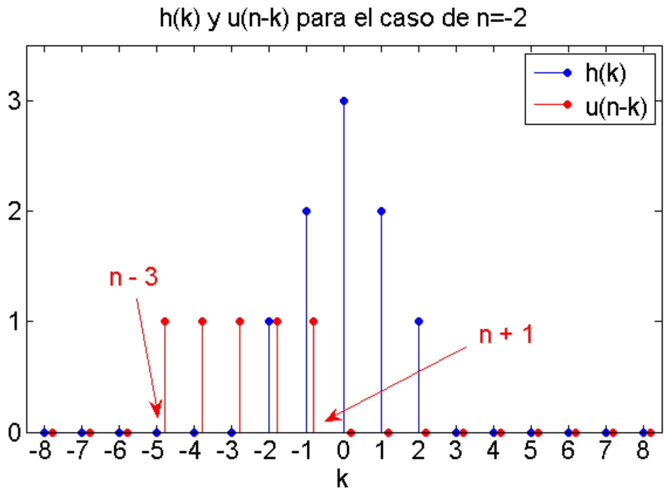

Fig. 8. Gráficas de h(k) y u(n-k) para el caso de n = -2.

La señal y(n) en este intervalo se calcula de la siguiente manera:

$$y(n) = \sum_{k=-2}^{n+1} 3 - |k| = \sum_{k=-2}^{n+1} 3 - (-k) = \sum_{k=-2}^{n+1} 3 + k \qquad (3)$$

En el anteúltimo paso de la ecuación (3) se tuvo en cuenta que todos los valores de la sumatoria son negativos o 0, por lo cual el valor absoluto se puede obtener multiplicando por -1 el valor de k. En particular, los valores de la señal y(n) son:

$$\begin{cases} n = -3 \quad \Rightarrow \quad y(-3) = \displaystyle\sum_{k=-2}^{-3+1} 3 + k = \sum_{k=-2}^{-2} 3 + k = 3 - 2 = 1 \\ n = -2 \quad \Rightarrow \quad y(-2) = \displaystyle\sum_{k=-2}^{-2+1} 3 + k = \sum_{k=-2}^{-1} 3 + k = (3-2) + (3-1) = 3 \\ n = -1 \quad \Rightarrow \quad y(-1) = \displaystyle\sum_{k=-2}^{-1+1} 3 + k = \sum_{k=-2}^{0} 3 + k = (3-2) + (3-1) + (3-0) = 6 \end{cases}$$

INTERVALO 3: $-1 < n \leq 1$

En este intervalo, la señal u(n-k) sigue avanzando hacia la derecha, superponiéndose completamente con la parte de h(k) que posee pendiente positiva y con una parte de la zona de h(k) con pendiente negativa. El límite inferior de este intervalo es continuación del anterior, mientras que el superior se calcula igualando el extremo superior de u(k-n) al extremo superior de h(k):

$$\mathrm{n} + 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{n} = 1$$

En la figura 9 puede observarse ambas señales para el caso de n = 0.

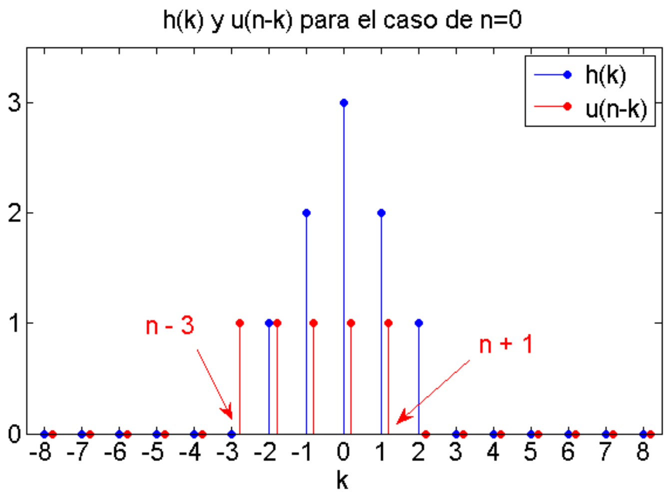

Fig. 9. Gráficas de h(k) y u(n-k) para el caso de n = 0.

La salida y(n) en este intervalo se calcula de la siguiente manera:

$$y(n) = \sum_{k=-2}^{n+1} 3 - |k| = \left(\sum_{k=-2}^{-1} 3 - (-k)\right) + \left(\sum_{k=0}^{n+1} 3 - k\right) = \left(\sum_{k=-2}^{-1} 3 + k\right) + \left(\sum_{k=0}^{n+1} 3 - k\right)$$
$$= \big((3-2) + (3-1)\big) + \left(\sum_{k=0}^{n+1} 3 - k\right) = 3 + \left(\sum_{k=0}^{n+1} 3 - k\right)$$

En este caso, la sumatoria está compuesta por dos partes, debido a que k adopta valores negativos y positivos, por lo cual el operador valor absoluto cambia. En particular, los valores de la señal y(n) son:

$$\begin{cases} n = 0 \Rightarrow y(0) = 3 + \left(\sum_{k=0}^{1} 3 - k \right) = 3 + \big((3-0) + (3-1) \big) = 8 \\ n = 1 \Rightarrow y(1) = 3 + \left(\sum_{k=0}^{2} 3 - k \right) = 3 + \big((3-0) + (3-1) + (3-2) \big) = 9 \end{cases}$$

INTERVALO 4: $1 < n \leq 3$

En este intervalo, la señal u(n-k) sigue avanzando hacia la derecha, superponiéndose completamente con la parte de h(k) que posee pendiente negativa y con una parte de la zona de h(k) con pendiente positiva. El límite inferior de este intervalo es continuación del anterior, mientras que el superior se calcula igualando el extremo inferior de u(k-n) al mayor valor de k para el cual la pendiente de h(k) es positiva:

$$\mathrm{n} - 3 = 0 \Rightarrow \mathrm{n} = 3$$

En la figura 10 puede observarse ambas señales para el caso de n = 2.

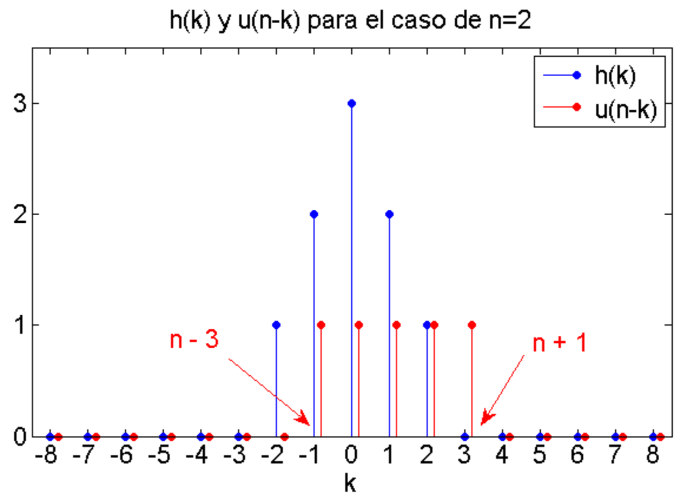

Fig. 10. Gráficas de h(k) y u(n-k) para el caso de n = 2.

La señal y(n) en este intervalo se calcula de la siguiente manera:

$$y(n) = \sum_{k=n-3}^{2} 3 - |k| = \left(\sum_{k=n-3}^{0} 3 - (-k) \right) + \left(\sum_{k=1}^{2} 3 - k \right) = \left(\sum_{k=n-3}^{0} 3 + k \right) + \left(\sum_{k=1}^{2} 3 - k \right)$$
$$= \left(\sum_{k=n-3}^{0} 3 + k \right) + \big((3-1) + (3-2) \big) = \left(\sum_{k=n-3}^{0} 3 + k \right) + 3$$

Al igual que en el intervalo anterior, la sumatoria está compuesta por dos partes, debido a que k adopta valores negativos y positivos, por lo cual el operador valor absoluto cambia. En particular, los valores de la salida y(n) son:

$$\begin{cases} n = 2 \Rightarrow y(2) = \left(\sum_{k=-1}^{0} 3 + k \right) + 3 = \big((3-1) + (3+0) \big) + 3 = 8 \\ n = 3 \Rightarrow y(3) = \left(\sum_{k=0}^{0} 3 + k \right) + 3 = (3+0) + 3 = 6 \end{cases}$$

INTERVALO 5: $3 < n \leq 5$

En este intervalo, la señal u(n-k) sigue avanzando hacia la derecha, superponiéndose solo con una parte de h(k) que posee pendiente negativa. El límite inferior de este intervalo es continuación del anterior, mientras que el superior se calcula igualando el extremo inferior de u(k-n) al extremo superior de h(k):

$$\mathrm{n} - 3 = 2 \Rightarrow \mathrm{n} = 5$$

En la figura 11 puede observarse ambas señales para el caso de n = 4.

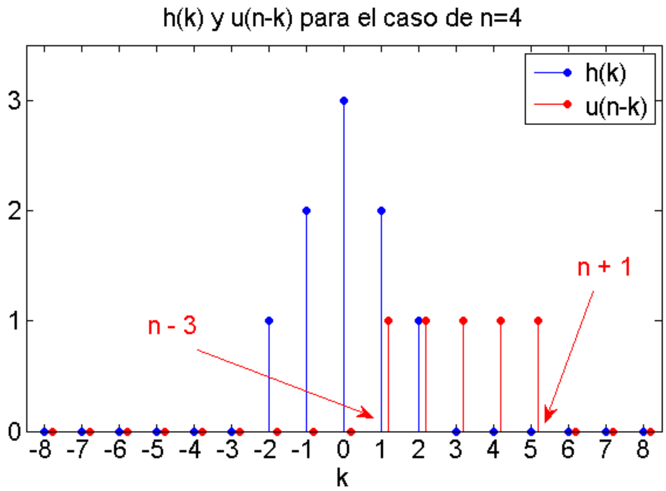

Fig. 11. Gráficas de h(k) y u(n-k) para el caso de n = 4.

La salida y(n) en este intervalo se calcula de la siguiente manera:

$$y(n) = \sum_{k=n-3}^{2} 3 - |k| = \sum_{k=n-3}^{2} 3 - k$$

En particular, los valores de la salida y(n) son:

$$\begin{cases} n = 4 \Rightarrow y(4) = \sum_{k=1}^{2} 3 - k = \big((3-1) + (3-2)\big) = 3 \\ n = 5 \Rightarrow y(5) = \sum_{k=2}^{2} 3 - k = 3 - 2 = 1 \end{cases}$$

INTERVALO 5: $n > 5$

En este intervalo no hay superposición entre ambas señales, por lo cual la señal y(n) es igual 0 para todos los puntos. El límite inferior de este intervalo es continuación del anterior. En la figura 12 puede observarse ambas señales para el caso de n = 6.

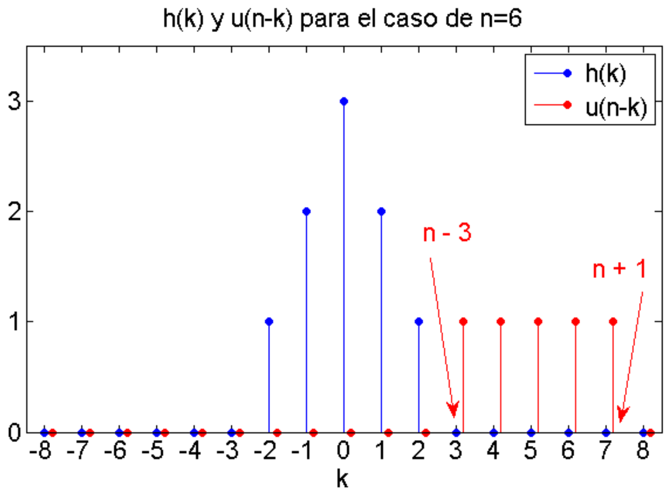

Fig. 12. Gráficas de h(k) y u(n-k) para el caso de n = 6.

En resumen, la expresión matemática de la señal y(n) queda definida de la siguiente manera:

$$y(n) = \begin{cases} 0 & n < -3 \\ \sum_{k=-2}^{n+1} 3+k & -3 \leq n \leq -1 \\ 3 + \left(\sum_{k=0}^{n+1} 3-\ k\right) & -1 < n \leq 1 \\ \left(\sum_{k=n-3}^{0} 3+k\right) +\ 3 & 1 < n \leq 3 \\ \sum_{k=n-3}^{2} 3-\ k & 3 < n \leq 5 \\ 0 & n >\ 5 \end{cases}$$

la cual también puede expresarse como secuencia:

$$y(n) = \{\cdots \quad 0 \quad 1 \quad 3 \quad 6 \quad \underset{\uparrow}{8} \quad 9 \quad 8 \quad 6 \quad 3 \quad 1 \quad 0 \quad \cdots\}$$

En la figura 13 puede observarse la señal y(n) obtenida.

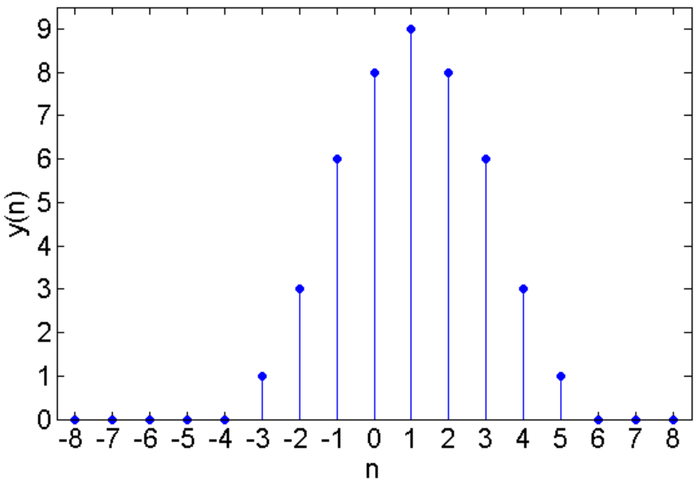

Fig. 13. Gráfica de y(n).