**Serie 2 - Problema 6**: **Calcule la convolución entre las señales**

$$u(n)=\begin{cases}\alpha^n & -3\le n\le 5\\ 0 & c.o.c.\end{cases}$$

$$h(n)=\begin{cases}1 & 0\le n\le 4\\ 0 & c.o.c.\end{cases}$$

Recordemos la expresión de la convolución:

$$y(n)=u(n)*h(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}u(k)h(n-k)$$

Grafiquemos las señales como función del índice $k$ de la sumatoria y asumamos que 0 < $\alpha$ < 1. (ver Figura 1)

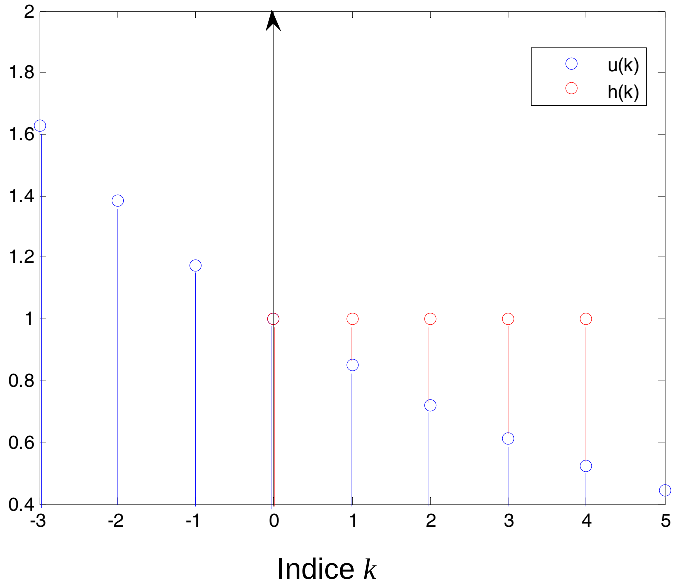


Figura 1: Gráficas de *h(k)* y *u(k)*.

Debemos ahora reflejar la señal *h(k)* respecto al eje de ordenadas para obtener *h(-k)*. (ver Figura 2)

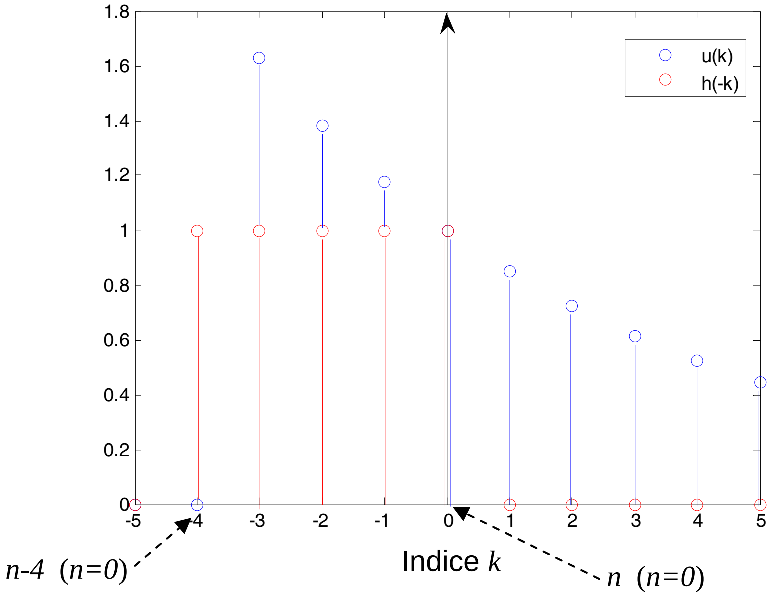


Figura 2: Gráficas de *h(-k)* y *u(k)*.

Debemos ahora desplazar la señal $h(-k)$ para obtener $h(n\text{-}k)$, donde si $n>0$ la curva se desplaza a la derecha y si $n<0$ se desplaza a la izquierda. La gráfica de $h(-k)$ en Figura 2 correspondería al caso $n=0$.

Notemos que para todo $n<-3$ el producto $u(k)h(n\text{-}k)=0$, por lo que

$$y(n)=0 \quad , \quad \forall n<-3$$

Consideremos ahora el caso de $-3\leq n\leq 1$. La grafica en Figura 2 correspondería a este caso (con $n=0$). El límite superior del intervalo ($n = 1$) corresponde al caso en que $n - 4 = -3$ . Para este intervalo de $n$ la gráfica de $h(n\text{-}k)$ se superpone parcialmente con la gráfica de $u(k)$. Debemos buscar el intervalo de valores de $k$ donde el producto $u(k)h(n\text{-}k)$ sea no nulo. De Figura 2 resulta entonces que ese intervalo va desde $k = -3$ a $k = n$, es decir se tiene

$$y(n)=\sum_{k=-3}^{n}\alpha^{k}=\sum_{m=0}^{n+3}\alpha^{m-3}=\alpha^{-3}\sum_{m=0}^{n+3}\alpha^{m}=\alpha^{-3}\frac{1-\alpha^{n+4}}{1-\alpha}$$

Cambio de variable

$m=k+3$

Se usó la propiedad de la suma finita de tipo geométrica

$$\sum_{k=0}^{N}a^{k}=\frac{1-a^{N+1}}{1-a}$$

La suma converge independientemente del valor de $a$. Notar que $N+1$ es el nro. de términos de la sumatoria.

Consideremos ahora el caso $1<n\leq 5$ que corresponde al caso en que la gráfica de $h(n\text{-}k)$ se superpone totalmente con la gráfica de $u(k)$. Esta situación se representa en la Figura 3 para el caso de $n = 2$.

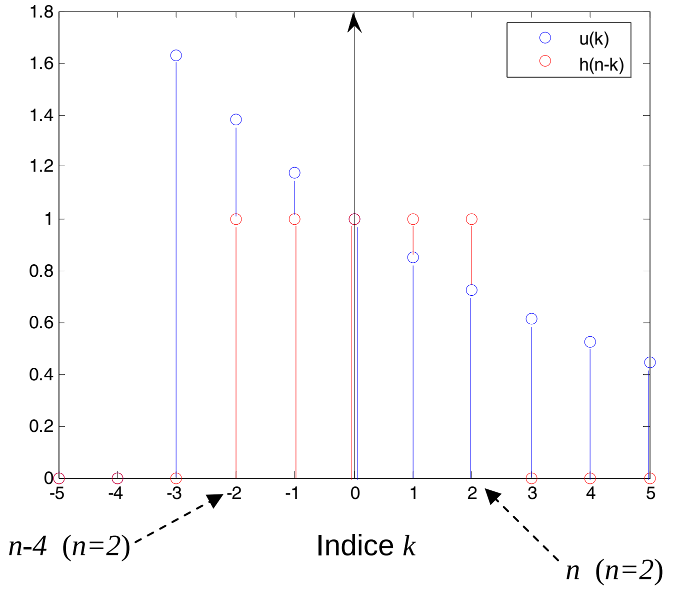


Figura 3: Gráficas de $h(n\text{-}k)$ y $u(k)$, para $1<n\leq 5$ ( $n=2$)

Vemos que el intervalo de valores de $k$ donde el producto $u(k)h(n\text{-}k)$ es no nulo es entre $k = n\text{-}4$ y $k = n$. Resulta entonces

$$y(n)=\sum_{k=n-4}^{n}\alpha^{k}=\sum_{m=0}^{4}\alpha^{m+n-4}=\alpha^{n-4}\sum_{m=0}^{4}\alpha^{m}=\alpha^{n-4}\frac{1-\alpha^{5}}{1-\alpha}$$

Cambio de variable

$m=k-n+4$

Suma finita de tipo geométrica

$$\sum_{k=0}^{N}a^{k}=\frac{1-a^{N+1}}{1-a}$$

Consideremos ahora el caso $5<n\leq 9$ que corresponde al caso en que la gráfica de $h(n-k)$ vuelve a quedar parcialmente superpuesta con la gráfica de $u(k)$. El extremo superior del intervalo corresponde al caso $n-4=5$. Esta situación se representa en la Figura 4, para el caso de $n=6$.

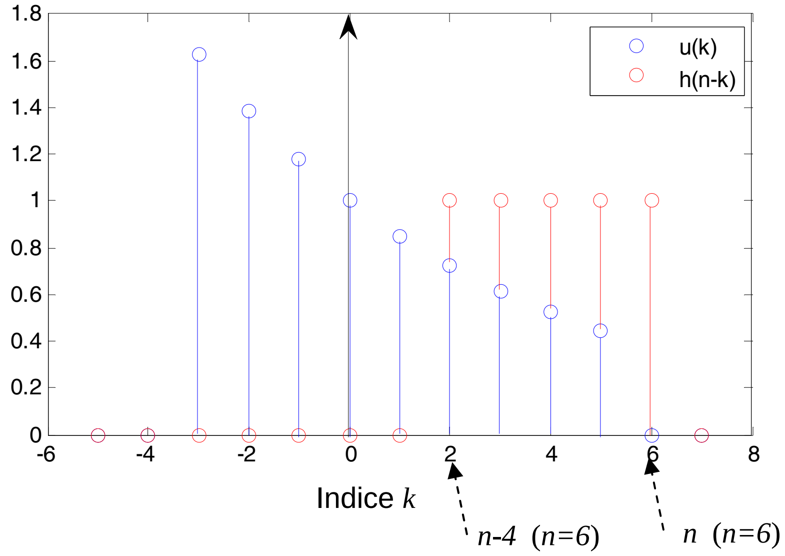


Figura 4: Gráficas de $h(n-k)$ y $u(k)$, para $5<n\leq 9$ ($n=6$)

Vemos que el intervalo de valores de $k$ donde el producto $u(k)h(n-k)$ es no nulo es entre $k=n-4$ y $k=5$. Resulta entonces

$$y(n)=\sum_{k=n-4}^{5}\alpha^{k}=\sum_{m=0}^{9-n}\alpha^{m+n-4}=\alpha^{n-4}\sum_{m=0}^{9-n}\alpha^{m}=\alpha^{n-4}\frac{1-\alpha^{10-n}}{1-\alpha}$$

Cambio de variable

$m=k-n+4$

Suma finita de tipo geométrica

$$\sum_{k=0}^{N}a^{k}=\frac{1-a^{N+1}}{1-a}$$

El caso restante es para $n-4>5\Rightarrow n>9$, donde las gràficas de $h(n-k)$ y de $u(k)$ no se superponen, por lo que $y(n)=0$.

Finalmente la expresión de $y(n)$ para todos los valores de $n$ resulta:

$$y(n)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad n<-3 \\ \alpha^{-3}\dfrac{1-\alpha^{n+4}}{1-\alpha} & \text{si} \quad -3\le n\le 1 \\ \alpha^{n-4}\dfrac{1-\alpha^{5}}{1-\alpha} & \text{si} \quad 1<n\le 5 \\ \alpha^{n-4}\dfrac{1-\alpha^{10-n}}{1-\alpha} & \text{si} \quad 5<n\le 9 \\ 0 & \text{si} \quad 9<n \end{cases}$$

La gráfica correspondiente se representa en la Figura 5.

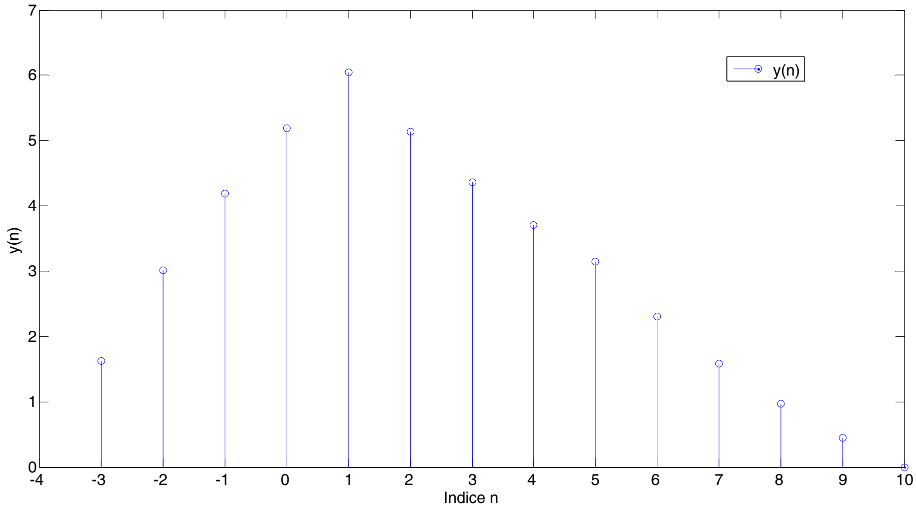


Figura 5: Gráfica de *y(n)* .