Serie 10 – Problema 7: En la Figura 1 se representa un esquema idealizado de un Sistema de Procesamiento Digital de Señales.

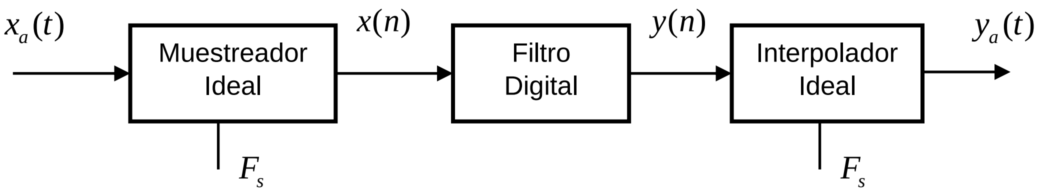

Figura 1: Sistema de Procesamiento Digital de Señales

a. Asuma que el Filtro Digital es un Filtro Pasa Alto con una respuesta en frecuencia $H(\omega)$ como la representada en la Figura 2.

a.1. Halle la respuesta al impulso $h(n)$ del filtro.

a.2. Indique si el filtro es un sistema causal. Justifique su respuesta.

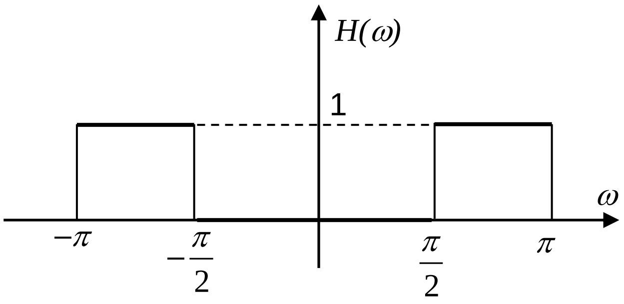

Figura 2: Respuesta en frecuencia del filtro pasa-altos.

La respuesta al impulso del filtro viene dada por:

$$
\begin{aligned}
h(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(\omega)e^{j\omega n}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\pi/2} e^{j\omega n}d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} e^{j\omega n}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi jn} e^{j\omega n}\Big|_{-\pi}^{-\pi/2} + \frac{1}{2\pi jn} e^{j\omega n}\Big|_{\pi/2}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi jn}\left[e^{-j\pi n/2} - e^{-j\pi n} + e^{j\pi n} - e^{j\pi n/2}\right] \\
&= \frac{1}{\pi n}\left[\sin(\pi n) - \sin(\pi n/2)\right]
\end{aligned}
$$

Vemos que **no se verifica** que $h(n) = 0$ para $n < 0$, por lo que el filtro es **no causal**. La respuesta al impulso se muestra en la Figura 3.

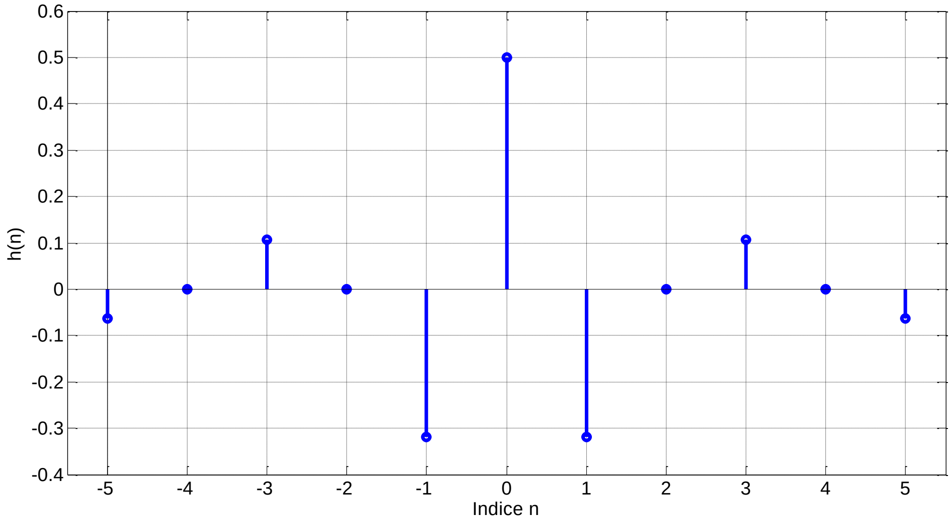

Figura 3: Respuesta al impulso del filtro pasa altos.

b. La señal $x_a(t)$ de entrada al sistema de la Figura 1, se obtiene modulando la amplitud de una portadora senoidal con la señal $x_b(t)$, es decir:

$$x_a(t) = x_b(t)\cos(10000\pi t)$$

b.1. Halle una expresión para el espectro $X_a(\Omega)$ de la señal $x_a(t)$ en función del espectro $X_b(\Omega)$ de la señal $x_b(t)$. Para tal fin tenga en cuenta el Teorema de Modulación de la Transformada de Fourier.

b.2. Grafique el espectro $X_a(\Omega)$ de la señal $x_a(t)$ para el caso en que la señal $x_b(t)$ tenga un espectro $X_b(\Omega)$ como el representado en la Figura 4.

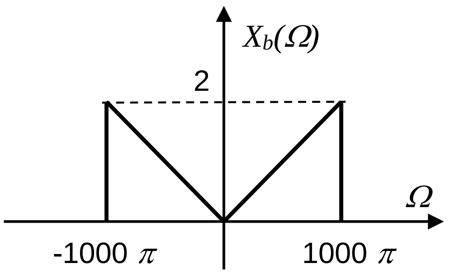

Figura 4: Espectro $X_b(\Omega)$.

Por el Teorema de Modulación de la Transformada de Fourier en TC resulta:

$$X_a(\Omega) = \frac{1}{2}\left[X_b\left(\Omega - 10000\pi\right) + X_b\left(\Omega + 10000\pi\right)\right]$$

cuya gráfica se muestra en Figura 5.

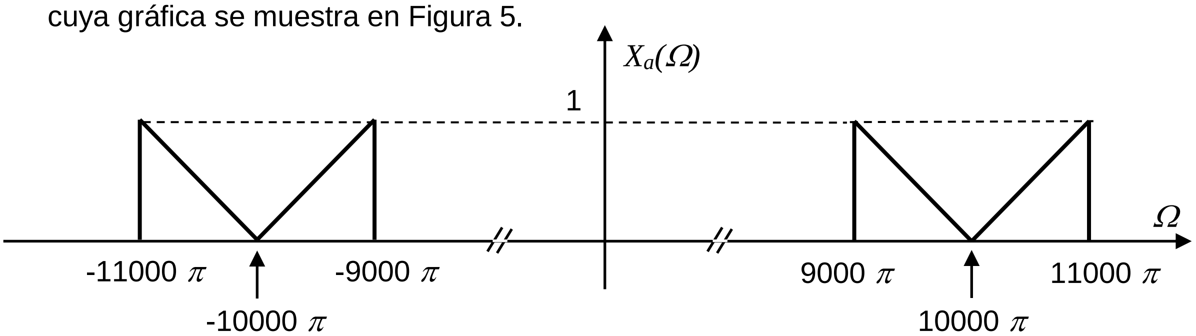

Figura 5: Espectro $X_a(\Omega)$ (**no periódico**).

c. Asuma que el Filtro Digital tiene una respuesta en frecuencia $H(\omega)$ como la representada en la Figura 2, y que la frecuencia de muestreo es F_s=20000 Hz.

c.1. Indique si la frecuencia de muestreo seleccionada es apropiada para el muestreo de la señal $x_a(t)$, de manera que no se produzca aliasing.

c.2. Grafique los espectros de las señales $x_a(t)$, $x(n)$, $y(n)$, e $y_a(t)$. Indique en cada caso si los espectros son periódicos o no periódicos.

La máxima frecuencia contenida en la señal $x_a(t)$ es:

$$F_{\max} = \frac{11000\pi}{2\pi}\,\mathrm{Hz} = 5500\,\mathrm{Hz}$$

Luego, como F_s=20000 Hz > 2 F_{max} = 11000 Hz, la frecuencia de muestreo es apropiada y no se produce aliasing.

El espectro $X(\omega)$ es la repetición periódica, con período 2π , del espectro $X_a(\Omega)$ escalado por F_s. La gráfica se muestra en la Figura 6.

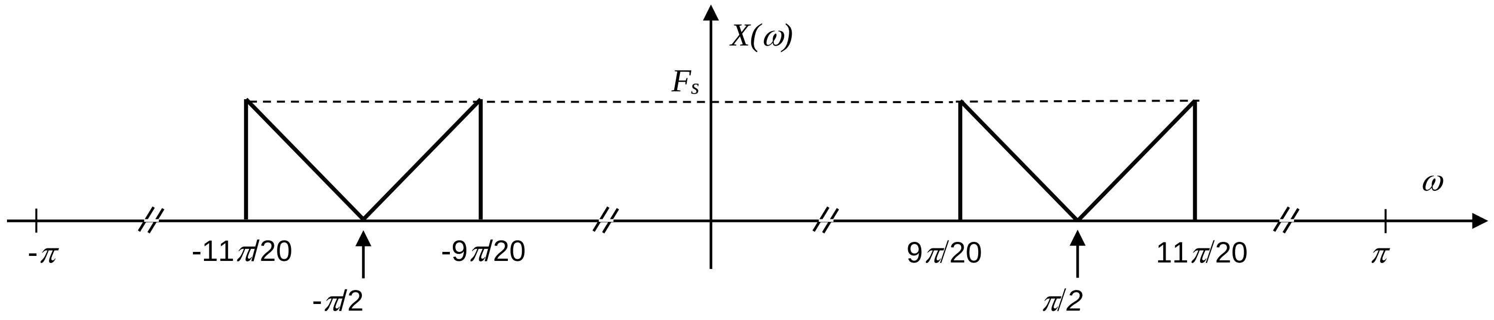

Figura 6: Espectro $X(\omega)$ (**periódico, con período 2π en ω**).

El espectro $Y(\omega)$ resulta $Y(\omega)=H(\omega)X(\omega)$, y su gráfica se muestra en la Figura 7.

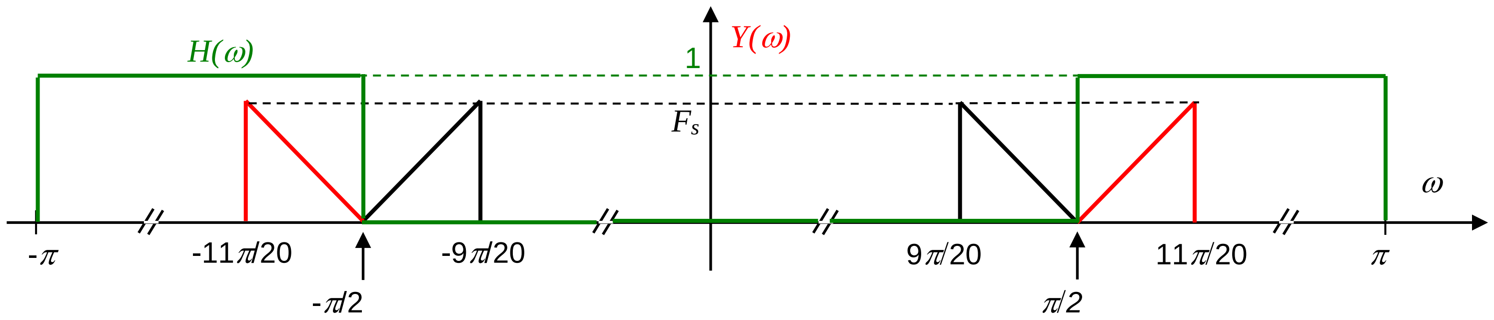

Figura 7: Espectro $Y(\omega)$ (**periódico, con período 2π en ω**).

Finalmente, el espectro $Y_a(\Omega)$ se obtiene considerando el período fundamental de $Y(\omega)$ y escalándolo por $1/F_s$, y convirtiendo las frecuencias discretas a frecuencias contínuas. La gráfica correspondiente se muestra en la Figura 8.

Puede verse que el filtro elimina la **banda lateral inferior** de la señal $X_a(\Omega)$.

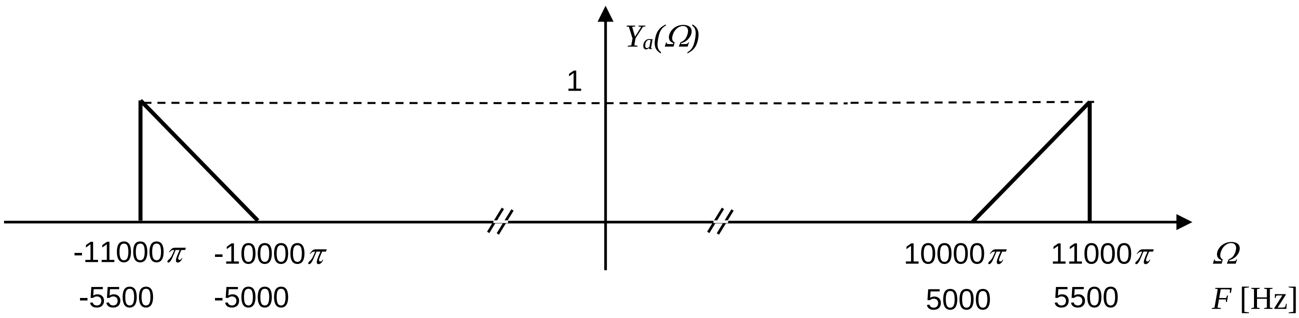

Figura 8: Espectro $Y_a(\Omega)$ (**no periódico**).

d. Suponga ahora que se transmite esta señal por un canal electromagnético (aire). El receptor se esquematiza en la Figura 9.

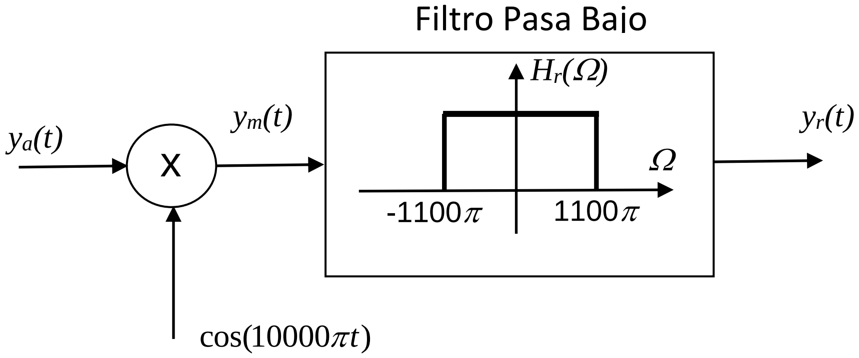

Figura 9: Diagrama esquemático del receptor.

Determine y grafique el espectro $Y_r(\Omega)$.

Por el Teorema de Modulación se verifica que

$$Y_m(\Omega) = \frac{1}{2}\left[Y_a(\Omega - 10000\pi) + Y_a(\Omega + 10000\pi)\right]$$

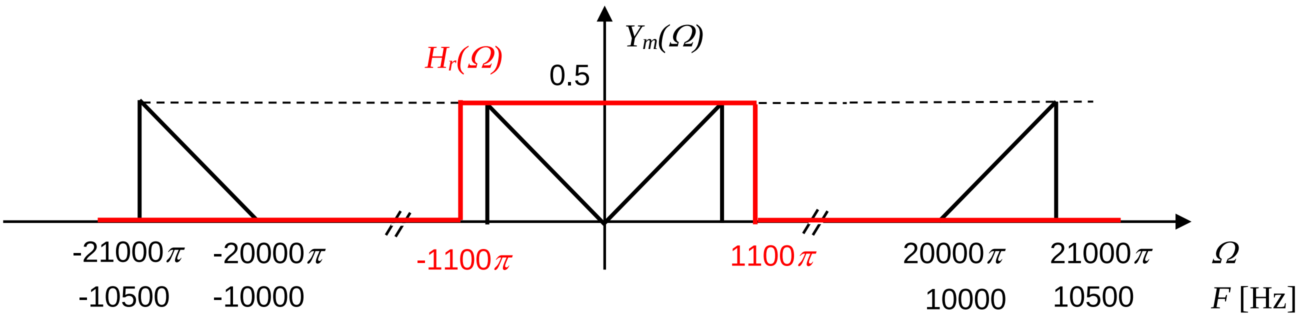

Figura 10: Espectro $Y_m(\Omega)$ (**no periódico**).

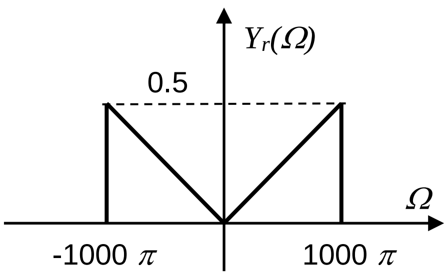

Figura 11: Espectro $Y_r(\Omega)$ (**no periódico**). Comparar con Fig. 4.