Serie 10 – Problema 6:

Un sistema causal tiene como salida $y(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n \mu(n)$ cuando la entrada es $u(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \mu(n)$.

a. Encuentre la DTFT de la respuesta al impulso del sistema.

b. Calcule la respuesta al impulso *h(n)*.

c. Calcula la respuesta en régimen permanente a una entrada $u(n) = \cos(\pi n/4)$.

a. Calculemos la DTFT de la entrada y de la salida. Se verifica:

$$Y(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n e^{-j\omega n} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

$$U(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-j\omega n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

Luego, la respuesta en frecuencia del sistema resulta:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{U(\omega)} = \frac{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

Por otra parte, la función transferencia Z resulta

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} = \frac{z-\frac{1}{2}}{z-\frac{1}{4}}$$

Vemos entonces que el sistema es BIBO estable (polo en el interior de la circunferencia unitaria).

b. Para obtener *h(n)*, podemos calcular la Transformada de Fourier Inversa de $H(\omega)$, o equivalentemente la Transformada Z Inversa de $H(z)$. Resulta más simple esto último.

$$h(n) = Z^{-1}\left\{H(z)\right\} = Z^{-1}\left\{\frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}\right\} = \left(\frac{1}{4}\right)^n \mu(n) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \mu(n-1)$$

c.Se verifica

$$y_{RPS}(n) = \left|H(\omega)\right|_{\omega=\frac{\pi}{4}} \cos\left(\frac{\pi}{4}n + \measuredangle H(\omega)\big|_{\omega=\frac{\pi}{4}}\right) = 0.8751\cos(\frac{\pi}{4}n + 0.2889)$$

Serie 10 – Problema 8:

La señal causal *x(n)* tiene una Transformada Z dada por

$$X(z)=1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}$$

a. Determine la señal *x(n)* y su Transformada de Fourier en Tiempo Discreto (DTFT).

b. Determine la DFT con 4-puntos de la señal *x(n)* . Indique si esta DFT puede pensarse como muestras en frecuencia de la DTFT de *x(n)*, en las frecuencias equiespaciadas $\omega_k=\dfrac{2\pi k}{4}$.

a. Por definición de la transformada Z es claro que

$$x(n)=\left\{\underset{\uparrow}{1},1,1,1\right\}=\mu(n)-\mu(n-4)$$

La DTFT resulta entonces

$$X\left(\omega\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{3}e^{-j\omega n}=\frac{1-e^{-j4\omega}}{1-e^{-j\omega}}$$

b. La DFT con 4 puntos resulta:

$$X(k)=\sum_{n=0}^{3}x(n)e^{-j\frac{2\pi kn}{4}}=\sum_{n=0}^{3}e^{-j\frac{2\pi kn}{4}}=\frac{1-e^{-j\frac{2\pi k4}{4}}}{1-e^{-j\frac{2\pi k}{4}}}=\begin{cases}4 & k=0\\ 0 & k=1,2,3\end{cases}$$

Puede verse que en este caso puede pensarse a la DFT con 4 puntos de la señal como muestras de la DTFT en las frecuencias equiespaciadas $\omega_k=\dfrac{2\pi k}{4}$.