

Serie 10 – Problema 3:

Considere la señal

$$u(t) = \cos(2\pi t) + \sin(6\pi t)$$

Suponga que esta señal es la entrada a cada uno de los sistemas con respuesta al impulso dadas a continuación y determine la salida en cada caso.

a. $h(t) = \sin(4\pi t) / \pi$

b. $h(t) = \sin(\pi t) / \pi$

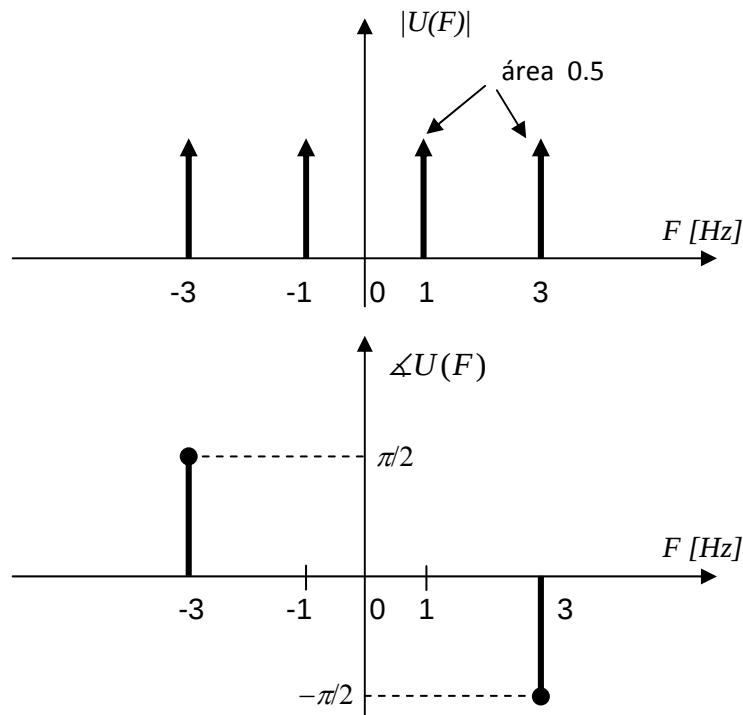
c. $h(t) = \sin(8\pi t) / \pi$

Puede verse que la señal $u(t)$ es periódica, con período fundamental $T = 1$ seg. (frecuencia fundamental $F_0 = 1$ Hz). Determinemos su serie de Fourier. Resulta:

$$\begin{aligned} u(t) &= \cos(2\pi \times 1 \times t) + \sin(2\pi \times 1 \times 3 \times t) \\ &= \frac{1}{2} e^{j2\pi \times 1 \times t} + \frac{1}{2} e^{-j2\pi \times 1 \times t} + \frac{1}{2j} e^{j2\pi \times 1 \times 3 \times t} - \frac{1}{2j} e^{-j2\pi \times 1 \times 3 \times t} \\ \Rightarrow c_1 &= c_{-1} = \frac{1}{2}, \quad c_3 = \frac{1}{2j}, \quad c_{-3} = -\frac{1}{2j} \\ c_k &= 0, \quad \forall k \neq 1, -1, 3, -3 \end{aligned}$$

Luego, la Transformada de Fourier de la señal resulta:

$$\begin{aligned} U(F) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(F - kF_0) \\ &= \frac{1}{2} \delta(F - F_0) + \frac{1}{2} \delta(F + F_0) + \frac{1}{2j} \delta(F - 3F_0) - \frac{1}{2j} \delta(F + 3F_0) \end{aligned}$$



Consideremos ahora la siguiente respuesta en frecuencia

$$H(F) = \begin{cases} 1 & 0 \leq |F| < F_c \\ 0 & \text{c.o.c.} \end{cases}$$

La correspondiente respuesta al impulso del sistema resulta:

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} H(F) e^{-j2\pi Ft} dF = \int_{-F_c}^{F_c} e^{-j2\pi Ft} dF \\ &= -\frac{1}{j2\pi t} e^{-j2\pi Ft} \Big|_{-F_c}^{F_c} = \frac{1}{\pi t} \frac{e^{j2\pi F_c t} - e^{-j2\pi F_c t}}{2j} \\ h(t) &= \frac{\text{sen}(2\pi F_c t)}{\pi t} \end{aligned}$$

a. En este caso es:

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{\text{sen}(4\pi t)}{\pi t} = \frac{\text{sen}(2\pi \times 2 \times t)}{\pi t} \Rightarrow F_c = 2 \\ \Rightarrow H(F) &= \begin{cases} 1 & 0 \leq |F| < 2 \\ 0 & \text{c.o.c.} \end{cases} \end{aligned}$$

b. En este caso es:

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{\text{sen}(\pi t)}{\pi t} = \frac{\text{sen}(2\pi \times \frac{1}{2} \times t)}{\pi t} \Rightarrow F_c = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow H(F) &= \begin{cases} 1 & 0 \leq |F| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{c.o.c.} \end{cases} \end{aligned}$$

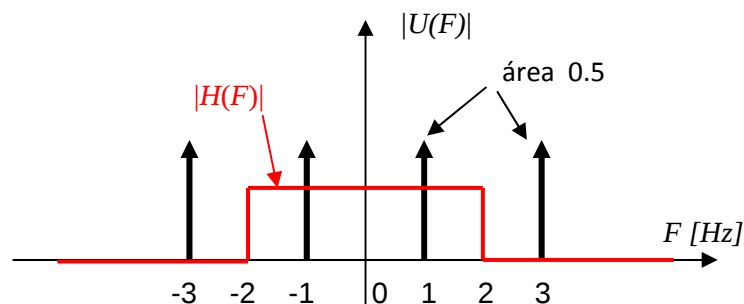
c. En este caso es:

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{\text{sen}(8\pi t)}{\pi t} = \frac{\text{sen}(2\pi \times 4 \times t)}{\pi t} \Rightarrow F_c = 4 \\ \Rightarrow H(F) &= \begin{cases} 1 & 0 \leq |F| < 4 \\ 0 & \text{c.o.c.} \end{cases} \end{aligned}$$

En el dominio frecuencial se verifica

$$Y(F) = H(F)U(F)$$

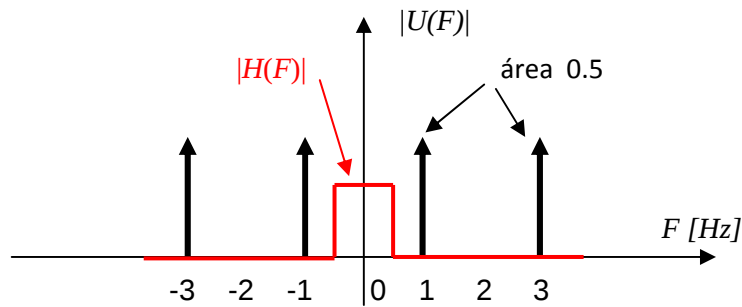
a.



Vemos que en este caso pasa sólo la componente de frecuencia $F_0 = 1$ Hz, es decir, resulta

$$y(t) = \cos(2\pi t)$$

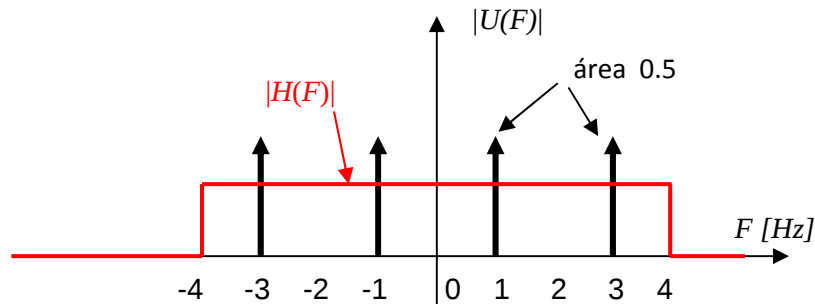
b.



Vemos que en este caso se filtra toda la señal, es decir:

$$y(t) = 0$$

c.



Vemos que en este caso pasan las dos componentes senoidales, es decir:

$$y(t) = \cos(2\pi t) + \sin(6\pi t)$$