

Serie 10 – Problema 2:

Para transmitir la señal $m(t)$ se construye una nueva señal:

$$s(t) = A_c (1 + k_a m(t)) \cos(\Omega_c t)$$

Esta nueva señal (conocida como señal de AM: Amplitud Modulada), que es la que finalmente se irradia, consiste de una portadora senoidal de pulsación Ω_c , cuya amplitud es modulada con la señal $m(t)$. Debido a que hay cierto retardo y que el medio no es ideal, se puede considerar que la señal $y(t)$ que recibe la antena no es exactamente $s(t)$, sino una versión “filtrada” de la misma, como se muestra en la Figura 1 (generalmente se asume también que se agrega ruido en el camino, hipótesis que aquí no tendremos en cuenta).



Figura 1: Canal de Transmisión.

Supondremos aquí que la respuesta al impulso del canal de transmisión es

$$h(t) = e^{-\alpha(t-T)} \mu(t-T)$$

y que el espectro de la señal original $m(t)$ es el representado en la Figura 2.

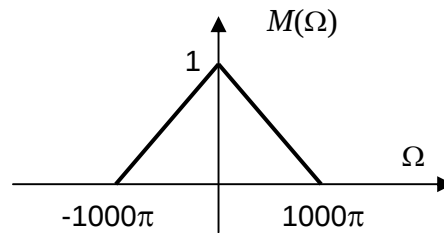


Figura 2: Espectro de la señal $m(t)$.

Se pide entonces calcular y graficar el espectro $Y(\Omega)$ de la señal de salida. Considerar los valores $\alpha = 10$, $T = 1$ seg, y $\Omega_c = 10000\pi$ rad/seg.

Por el Teorema de Modulación de la Transformada de Fourier de $s(t)$, resulta:

$$S(\Omega) = A_c \pi \delta(\Omega - \Omega_c) + A_c \pi \delta(\Omega + \Omega_c) + \frac{A_c k_a}{2} M(\Omega - \Omega_c) + \frac{A_c k_a}{2} M(\Omega + \Omega_c)$$

cuya gráfica se muestra en la Figura 3.

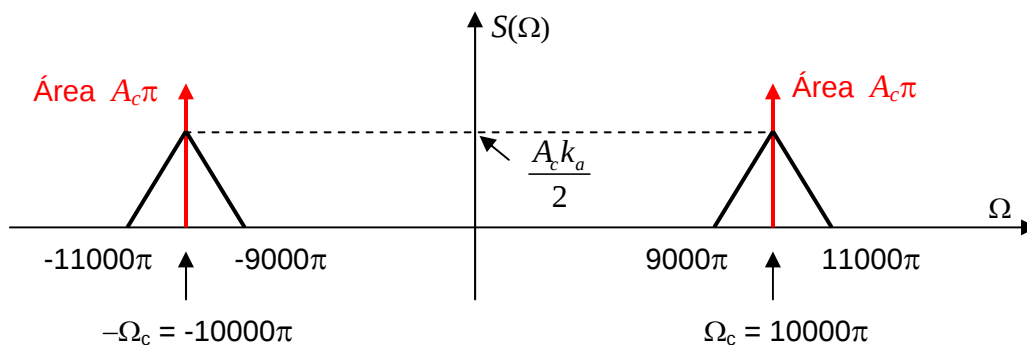


Figura 3: Espectro de la señal modulada AM $s(t)$.

Calculamos ahora la Transformada de Fourier de la respuesta al impulso del canal de transmisión (es decir, la **respuesta en frecuencia** del canal).

$$\begin{aligned}
 H(\Omega) &= \int_T^{\infty} e^{-\alpha(t-T)} e^{-j\Omega t} dt \\
 \text{Cambio de variable } \tau = t - T &\longrightarrow \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} e^{-j\Omega(\tau+T)} d\tau \\
 &= e^{-j\Omega T} \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+j\Omega)\tau} d\tau \\
 &= -\frac{e^{-j\Omega T}}{\alpha+j\Omega} e^{-(\alpha+j\Omega)\tau} \Big|_0^{\infty} \\
 &= \frac{e^{-j\Omega T}}{\alpha+j\Omega}
 \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
 |H(\Omega)| &= \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \Omega^2}} \\
 \angle H(\Omega) &= -\Omega T - \arctan\left(\frac{\Omega}{\alpha}\right)
 \end{aligned}$$

Luego el espectro de la señal recibida resulta

$$Y(\Omega) = H(\Omega)S(\Omega)$$

$$Y(\Omega) = \left[A_c \pi \delta(\Omega - \Omega_c) + A_c \pi \delta(\Omega + \Omega_c) + \frac{A_c k_a}{2} M(\Omega - \Omega_c) + \frac{A_c k_a}{2} M(\Omega + \Omega_c) \right] \frac{e^{-j\Omega T}}{(\alpha + j\Omega)}$$

Luego

$$\begin{aligned}
 |Y(\Omega)| &= \left[A_c \pi \delta(\Omega - \Omega_c) + A_c \pi \delta(\Omega + \Omega_c) + \frac{A_c k_a}{2} M(\Omega - \Omega_c) + \frac{A_c k_a}{2} M(\Omega + \Omega_c) \right] \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \Omega^2}} \\
 \angle Y(\Omega) &= -\Omega T - \arctan\left(\frac{\Omega}{\alpha}\right)
 \end{aligned}$$