Sistemas y Señales I

Trabajo Práctico Nro. 2

Simulación Digital de Sistemas Dinámicos

Integración numérica de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDOs) usando Matlab

Problema de Valor Inicial

$$\begin{cases} y^{(n)} = f\left(t, y, y', y'', \cdots, y^{(n-1)}\right) & \textbf{EDO} \\ y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0, \quad \cdots \quad , y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)} & \end{cases}$$

Para implementar el sistema anterior en Matlab, se siguen los siguientes pasos:

1. Escribir la EDO de orden n como un conjunto de n ecuaciones diferenciales de primer orden. Definiendo, por ejemplo

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = y' \\ \vdots \\ x_n = y^{(n-1)} \end{cases}$$

resulta el sistema (**Ecuaciones de Estado**)

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = x_3 \\ \vdots \\ x'_{n-1} = x_n \\ x'_n = f\left(t, x_1, x_2, \cdots, x_n\right) \end{cases}$$

2. Crear un archivo tipo *function file* (que de ahora en adelante llamaremos *ODE-file*) donde se almacenará el sistema anterior

```
function dx=sistema(t,x)
dx=[x(2); x(3); ...; x(n); f(t,x(1),x(2),...,x(n))];
```

3. Para que Matlab resuelva el problema, una vez creado el ODE-file, se debe llamar a alguna rutina de integración numérica, utilizando la siguiente sintaxis:

```
[T,x]=solver('sistema',tspan,x0)
```

donde **`solver`** es alguna de las rutinas **`ode45`**, **`ode23`**, **`ode113`**, **`ode15s`**, u **`ode23s`**, y los argumentos de entrada son:

`sistema` nombre del ODE-file

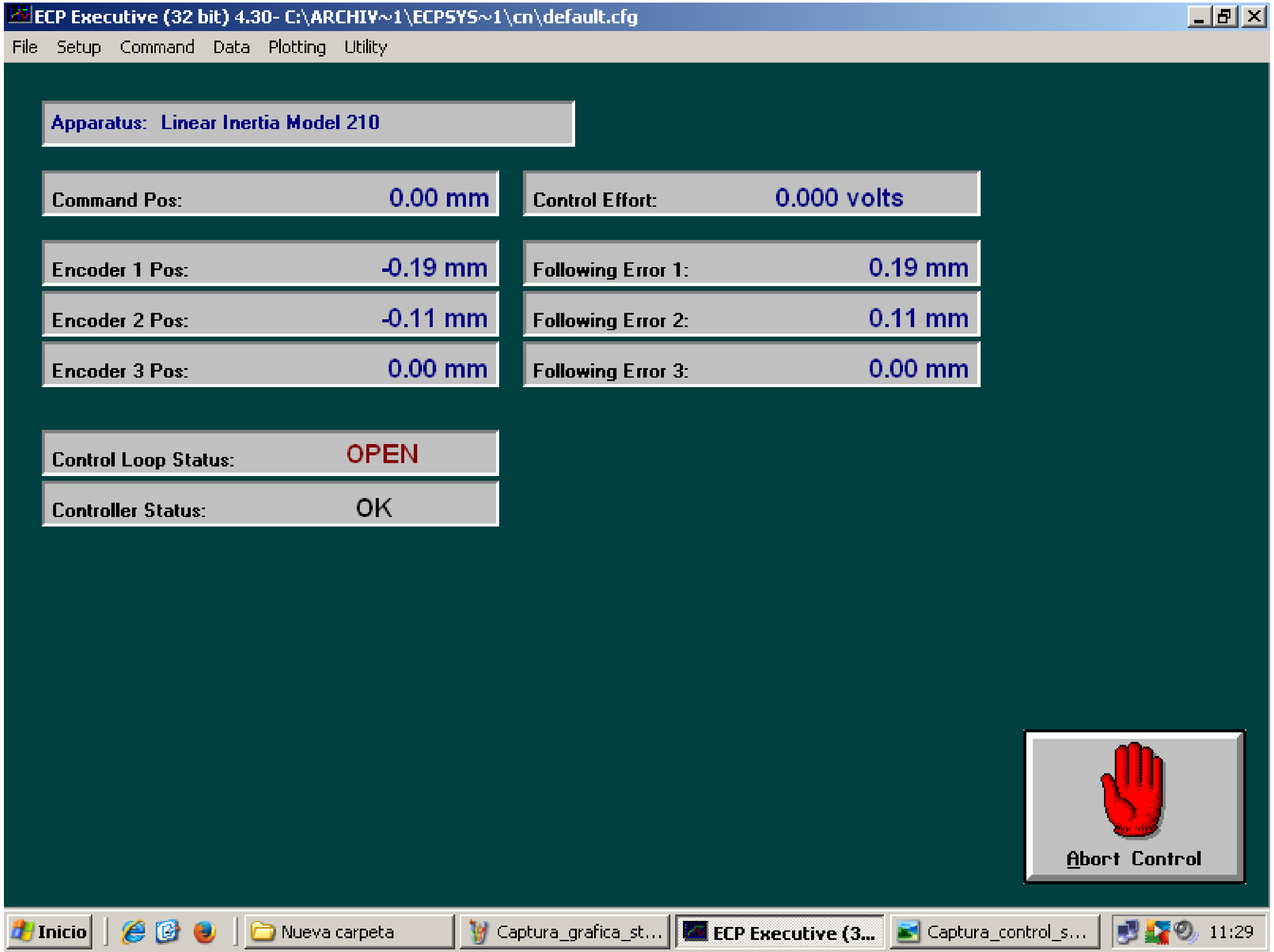
`tspan` vector de la forma **`[t0 tfinal]`** que hace que la rutina integre entre los tiempos **`t0`** y **`tfinal`**

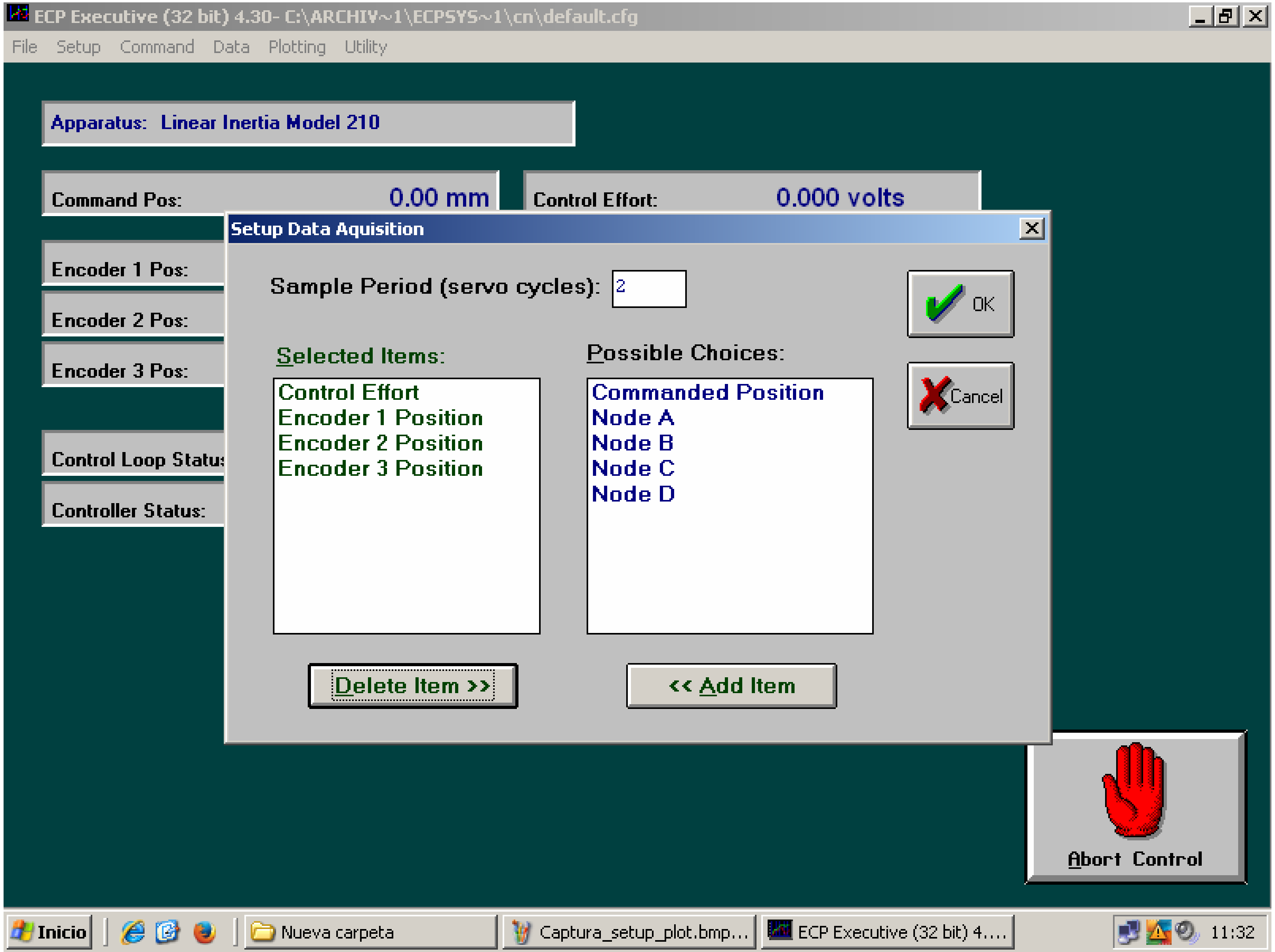
`x0` vector columna con las condiciones iniciales en **`t0`**

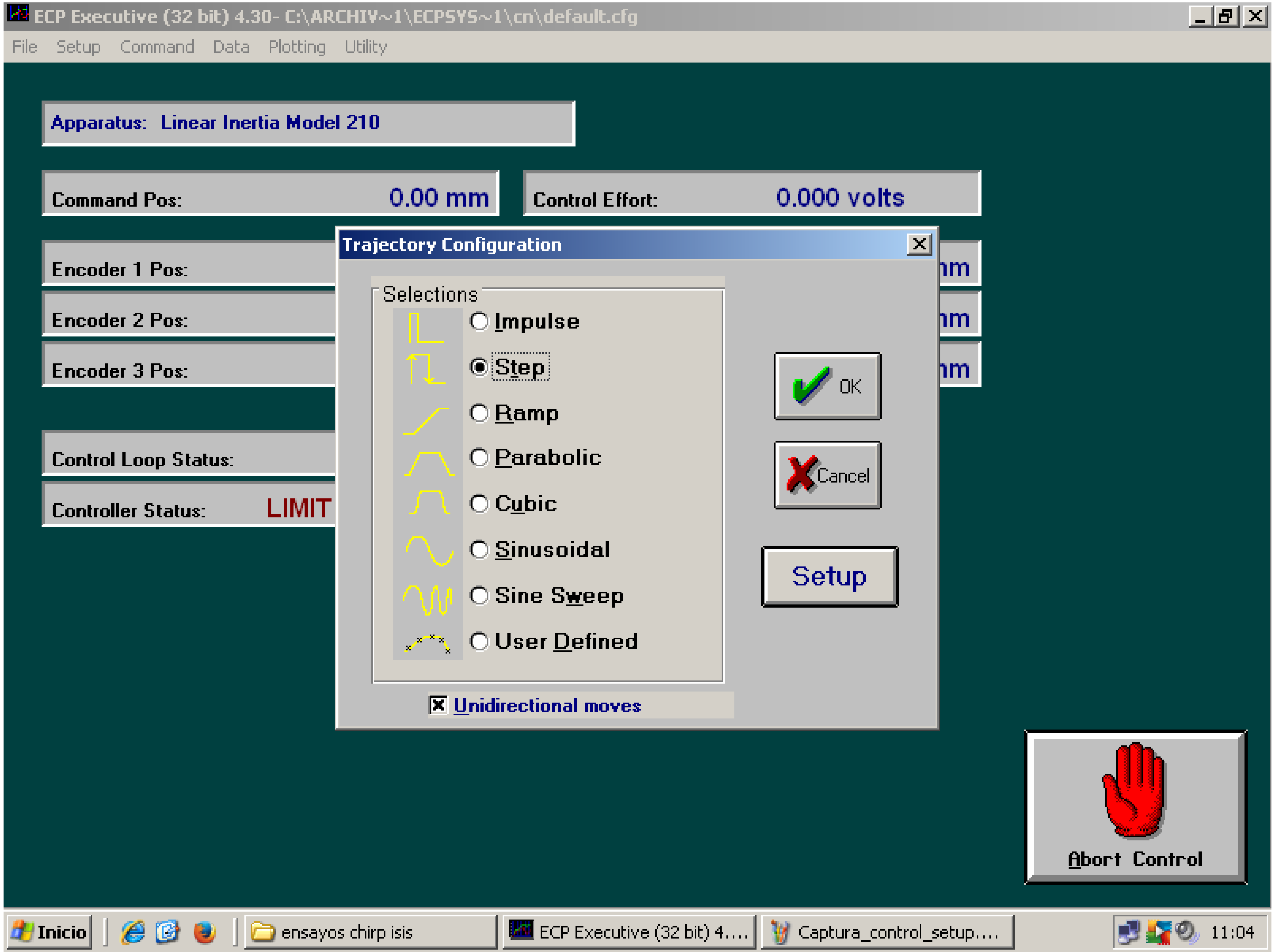
<u>Problema 1:</u> Sistema Mecánico Traslacional

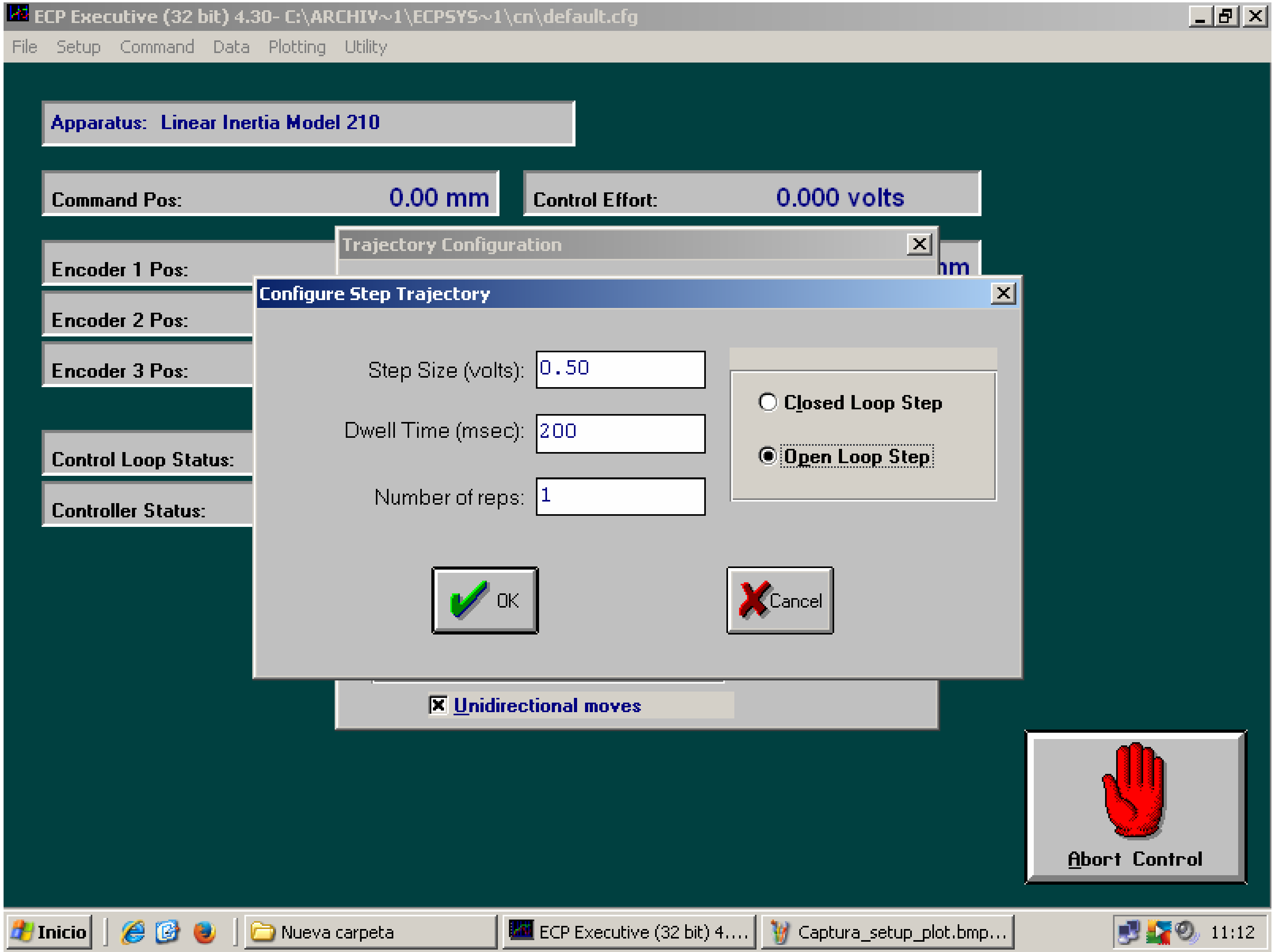
Sistema Mecánico Traslacional Modelo 210a ECP

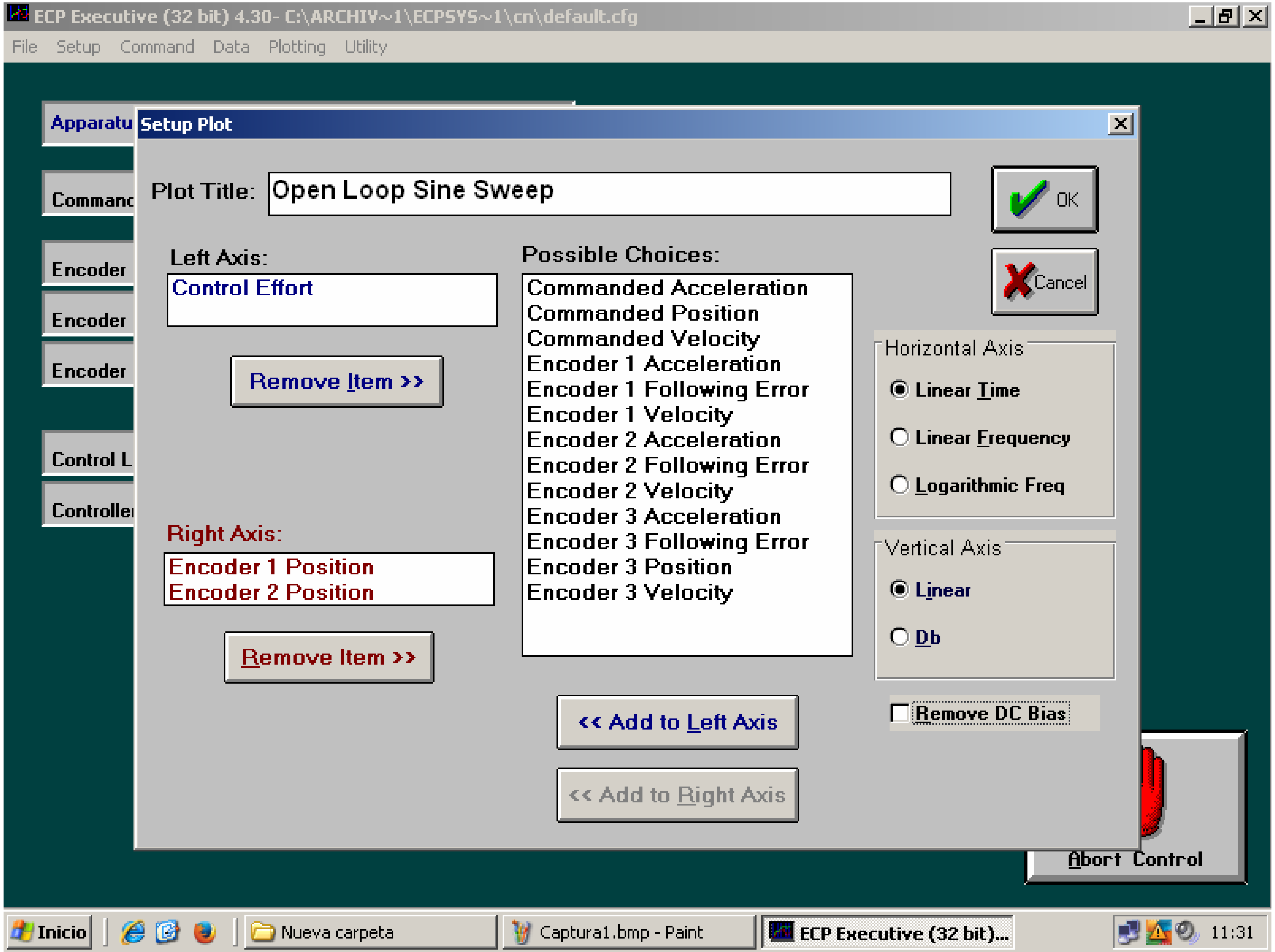
Interfase gráfica

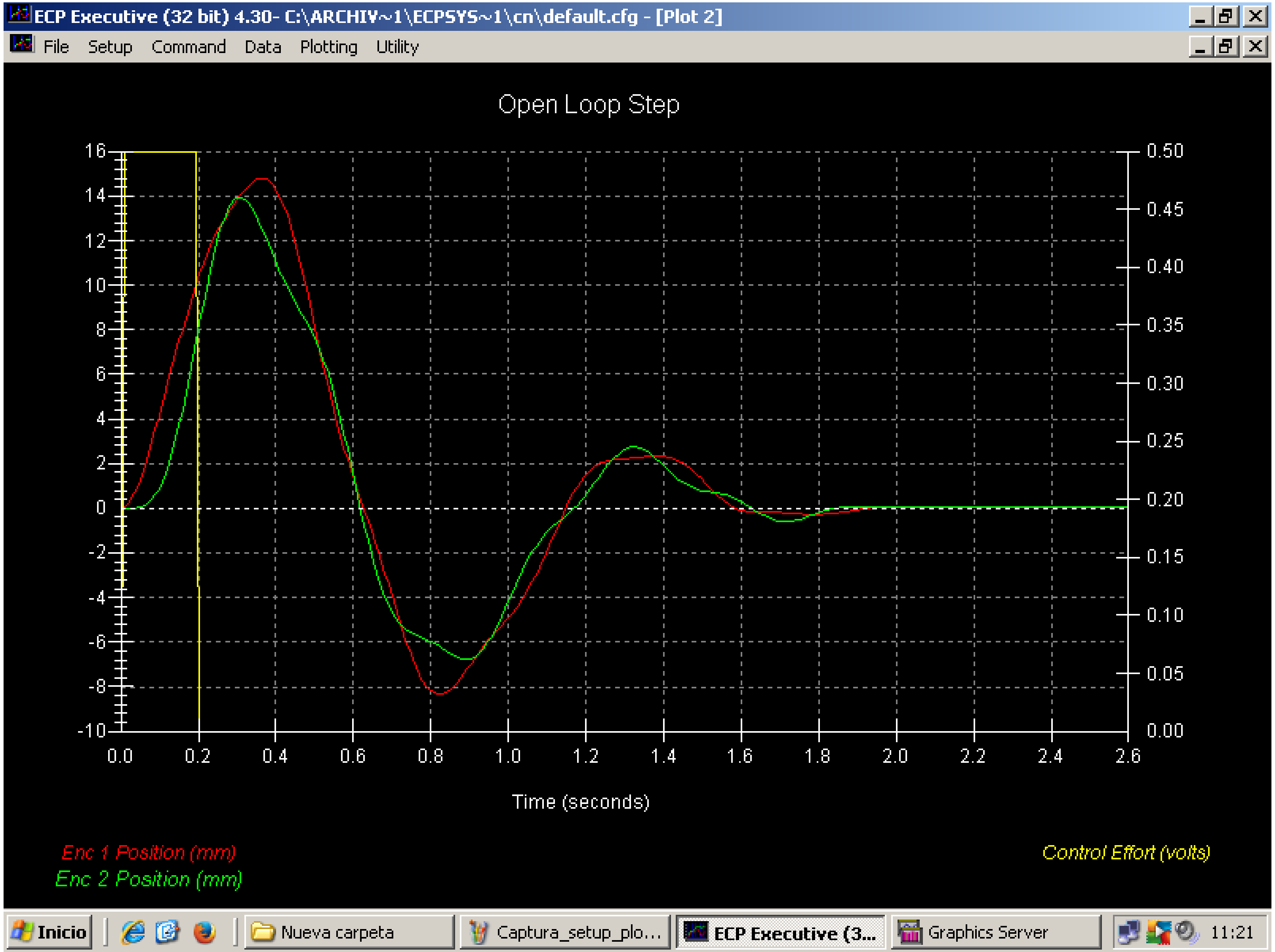



ECP Executive (32 bit) 4.30- C:\ARCHIV~1\ECPSYS~1\cn\default.cfg
File Setup Command Data Plotting Utility
Apparatus: Linear Inertia Model 210
Command Pos: 0.00 mm
Control Effort: 0.000 volts
Encoder 1 Pos:
Encoder 2 Pos:
Encoder 3 Pos:
Control Loop Status
Controller Status:
Setup Data Aquisition
Sample Period (servo cycles): 2
OK
Cancel
Selected Items:
Control Effort
Encoder 1 Position
Encoder 2 Position
Encoder 3 Position
Possible Choices:
Commanded Position
Node A
Node B
Node C
Node D
Delete Item >>
<< Add Item
Abort Control
Inicio
Nueva carpeta
Captura_setup_plot.bmp...
ECP Executive (32 bit) 4....
11:32

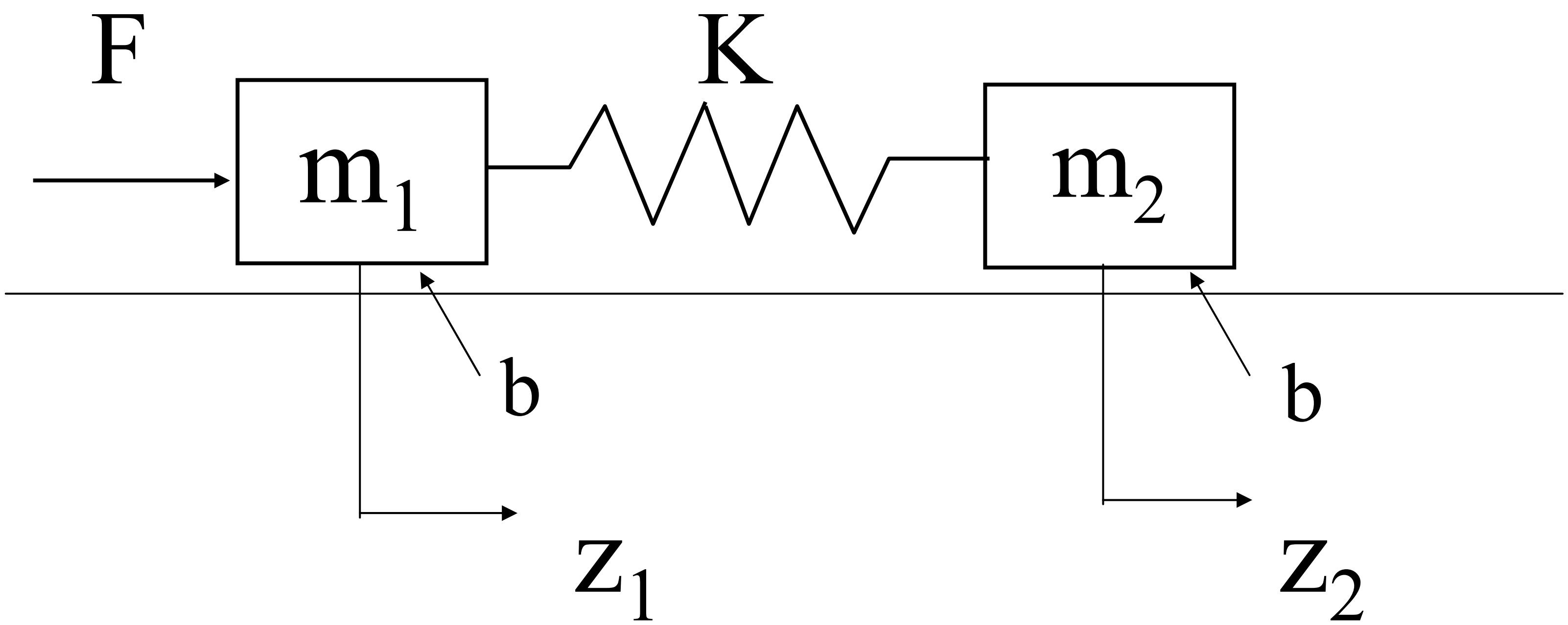

ECP Executive (32 bit) 4.30- C:\ARCHIV~1\ECPSYS~1\cn\default.cfg
File Setup Command Data Plotting Utility
Apparatus: Linear Inertia Model 210
Command Pos: 0.00 mm
Control Effort: 0.000 volts
Encoder 1 Pos:
Encoder 2 Pos:
Encoder 3 Pos:
Control Loop Status:
Controller Status: LIMIT
Trajectory Configuration
Selections
Impulse
Step
Ramp
Parabolic
Cubic
Sinusoidal
Sine Sweep
User Defined
OK
Cancel
Setup
Unidirectional moves
Abort Control
Inicio
ensayos chirp isis
ECP Executive (32 bit) 4....
Captura_control_setup....
11:04


ECP Executive (32 bit) 4.30- C:\ARCHIV~1\ECPSYS~1\cn\default.cfg
File Setup Command Data Plotting Utility
Apparatus: Linear Inertia Model 210
Command Pos: 0.00 mm
Control Effort: 0.000 volts
Encoder 1 Pos:
Encoder 2 Pos:
Encoder 3 Pos:
Control Loop Status:
Controller Status:
Trajectory Configuration
Configure Step Trajectory
Step Size (volts): 0.50
Dwell Time (msec): 200
Number of reps: 1
Closed Loop Step
Open Loop Step
OK
Cancel
Unidirectional moves
Abort Control
Inicio
Nueva carpeta
ECP Executive (32 bit) 4....
Captura_setup_plot.bmp...
11:12


ECP Executive (32 bit) 4.30- C:\ARCHIV~1\ECPSYS~1\cn\default.cfg
File Setup Command Data Plotting Utility
Setup Plot
Plot Title: Open Loop Sine Sweep
OK
Cancel
Left Axis:
Control Effort
Remove Item >>
Possible Choices:
Commanded Acceleration
Commanded Position
Commanded Velocity
Encoder 1 Acceleration
Encoder 1 Following Error
Encoder 1 Velocity
Encoder 2 Acceleration
Encoder 2 Following Error
Encoder 2 Velocity
Encoder 3 Acceleration
Encoder 3 Following Error
Encoder 3 Position
Encoder 3 Velocity
Horizontal Axis
Linear Time
Linear Frequency
Logarithmic Freq
Vertical Axis
Linear
Db
Right Axis:
Encoder 1 Position
Encoder 2 Position
Remove Item >>
<< Add to Left Axis
<< Add to Right Axis
Remove DC Bias
Abort Control
Inicio
Nueva carpeta
Captura1.bmp - Paint
ECP Executive (32 bit)...
11:31


ECP Executive (32 bit) 4.30- C:\ARCHIV~1\ECPSYS~1\cn\default.cfg - [Plot 2]
File Setup Command Data Plotting Utility
Open Loop Step
16
14
12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
0.50
0.45
0.40
0.35
0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
0.0 0.2 0.4 0.6 0.8 1.0 1.2 1.4 1.6 1.8 2.0 2.2 2.4 2.6
Time (seconds)
Enc 1 Position (mm)
Enc 2 Position (mm)
Control Effort (volts)
Inicio
Nueva carpeta
Captura_setup_plo...
ECP Executive (3...
Graphics Server
11:21

Se considerará la siguiente configuración:



Hipótesis de modelado:

- Resorte lineal
- Rozamiento de tipo viscoso lineal

Planteando la 2da. Ley de Newton en cada masa, resulta:

$$\begin{cases} m_1 z_1'' = F - K\left(z_1 - z_2\right) - b z_1' \\ m_2 z_2'' = K\left(z_1 - z_2\right) - b z_2' \end{cases}$$

Adoptando como variables de estado :

$$x_1 = z_1 \quad x_2 = z_1' \quad x_3 = z_2 \quad x_4 = z_2'$$

resulta

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = \dfrac{F}{m_1} + \dfrac{K}{m_1}\left(x_3 - x_1\right) - \dfrac{b}{m_1} x_2 \\ x_3' = x_4 \\ x_4' = -\dfrac{K}{m_2}\left(x_3 - x_1\right) - \dfrac{b}{m_2} x_4 \end{cases} \qquad (1)$$

El ODE-file resulta en este caso

```
function dx = sistema(t,x)
           :
Descripcion de los parám. del sistema (constantes)
           :

dx = [x(2);
     (F/m1)+(K/m1)*(x(3)-x(1))-(b/m1)*x(2);
      x(4);
     -(K/m2)*(x(3)-x(1))-(b/m2)*x(4)];
```

Desde un script (m-file) invocamos a la rutina de integración numérica pasándole como parámetro de entrada la función anterior

```
[T,x] = solver('sistema',tspan,x0)
```

Los valores de los parámetros físicos del sistema (provistos por el fabricante) son:

$$m_1 = m_2 = 2 \text{ Kg}$$

$$K = 273 \ \text{ N/m}$$

$$b = 8 \ \text{ Ns/m}$$

Analizaremos la respuesta del sistema a una entrada F del tipo pulso rectangular de amplitud 1.48 N y duración 0.2 s.

El ODE-file toma la forma:

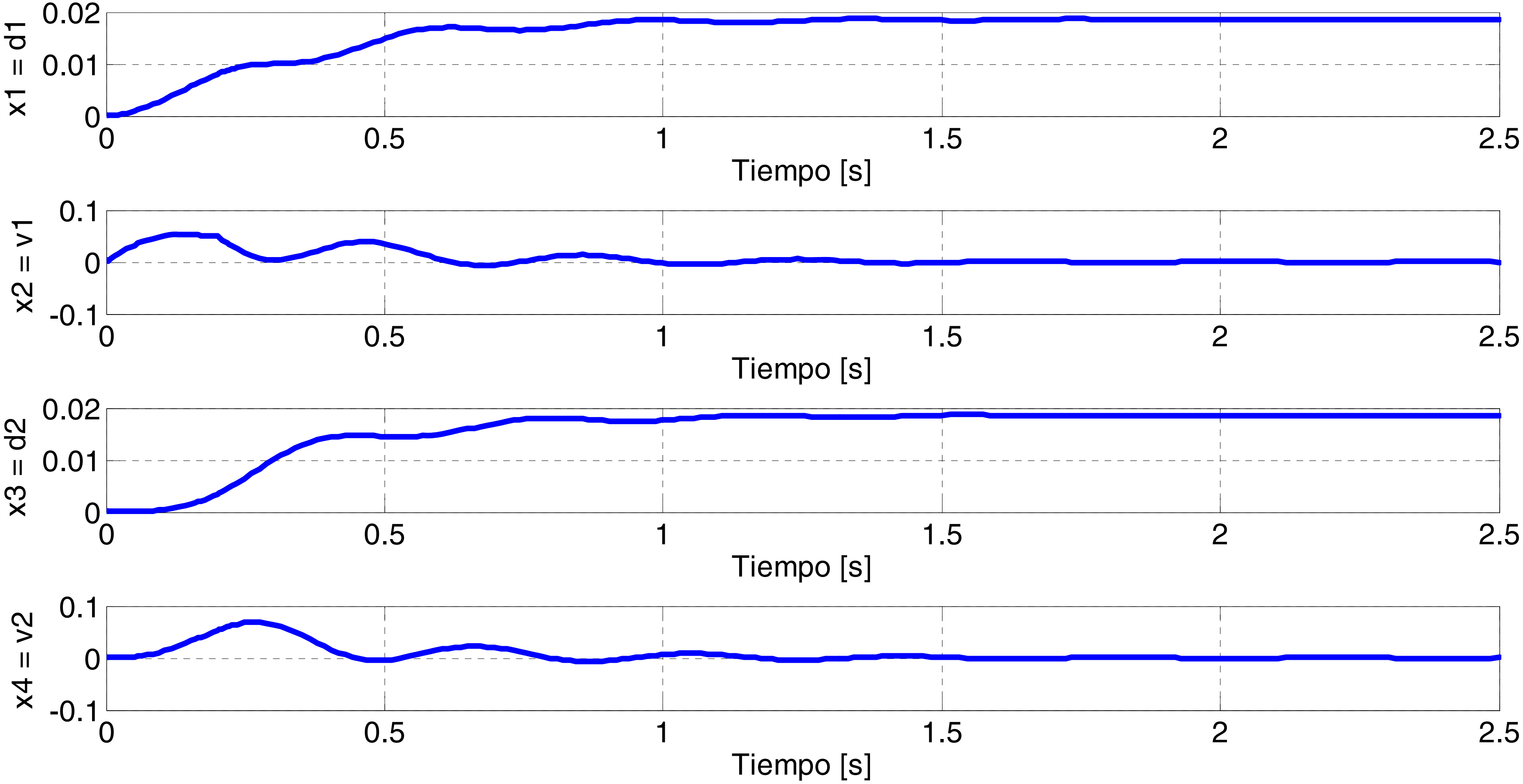
```
function dx = sistema(t,x)
m1=2;
m2=2;
K=273;
b=8;
if t<0.2
     F=1.48;
else
     F=0;
end
dx = [x(2);
     (F/m1)+(K/m1)*(x(3)-x(1))-(b/m1)*x(2);
      x(4);
     -(K/m2)*(x(3)-x(1))-(b/m2)*x(4)];
```


Archivo: sistema.m

Podemos realizar la simulación con el siguiente script

```
[t,x]=ode45(‘sistema’,[0 2.5],[0;0;0;0]);
subplot(411)
plot(t,x(:,1));xlabel('Tiempo [s]');
ylabel('x1 = d1');grid;
subplot(412)
plot(t,x(:,2));xlabel('Tiempo [s]');
ylabel('x2 = v1');grid;
subplot(413)
plot(t,x(:,3));xlabel('Tiempo [s]');
ylabel('x3 = d2');grid;
subplot(414)
plot(t,x(:,4));xlabel('Tiempo [s]');
ylabel('x4 = v2');grid;
```

Archivo: `simu_sistema.m`



x1 = d1
0.02
0.01
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
Tiempo [s]
x2 = v1
0.1
0
-0.1
Tiempo [s]
x3 = d2
0.02
0.01
0
Tiempo [s]
x4 = v2
0.1
0
-0.1
Tiempo [s]

Las Ecuaciones de Estado (1) pueden escribirse en forma matricial como

$$
\begin{array}{lllllllllll}
x_1' = & 0\,x_1 & + & 1\,x_2 & + & 0\,x_3 & + & 0\,x_4 & + & 0\,u \\
x_2' = & -\dfrac{K}{m_1}\,x_1 & - & \dfrac{b}{m_1}\,x_2 & + & \dfrac{K}{m_1}\,x_3 & + & 0\,x_4 & + & \dfrac{1}{m_1}\,u \\
x_3' = & 0\,x_1 & + & 0\,x_2 & + & 0\,x_3 & + & 1\,x_4 & + & 0\,u \\
x_4' = & \dfrac{K}{m_2}\,x_1 & + & 0\,x_2 & + & -\dfrac{K}{m_2}\,x_3 & - & \dfrac{b}{m_2}\,x_4 & + & 0\,u
\end{array}
$$

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -K/m_1 & -b/m_1 & K/m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ K/m_2 & 0 & -K/m_2 & -b/m_2 \end{bmatrix}}_{A} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1/m_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} .u$$

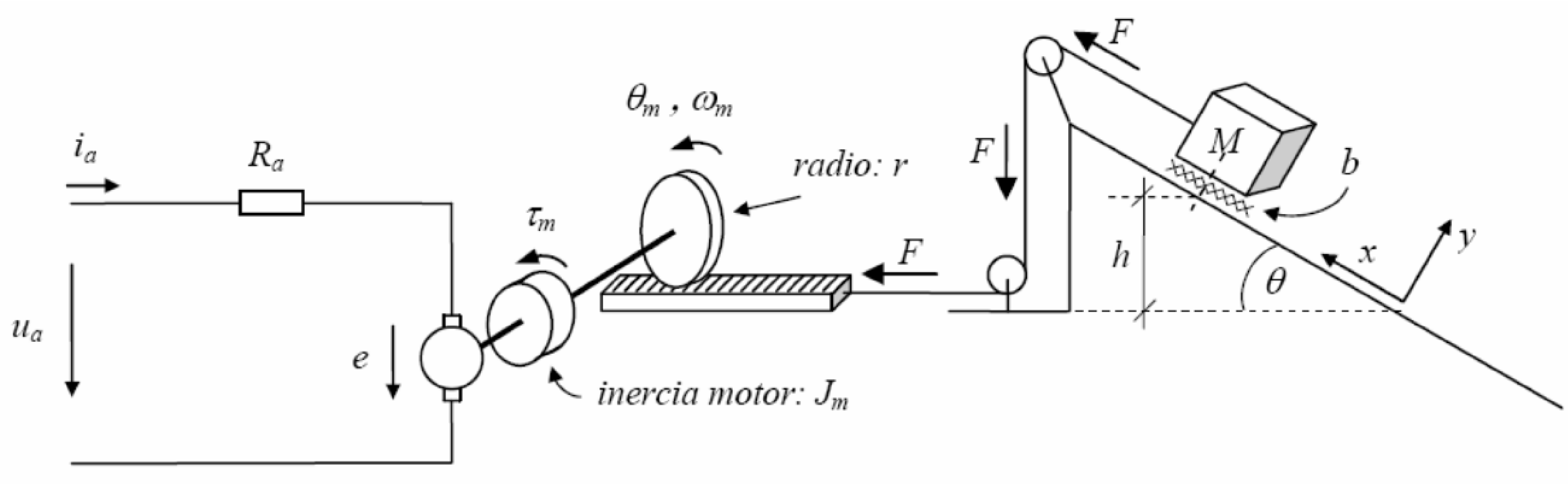
$$X' = A.X + B.u$$

Tomando como salida la posición de la masa m_1 , la **Ecuación de Salida** resulta

$$y = x_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C} X + \underbrace{0}_{D}\, u$$

Problema 2 : Carrito Minero

El sistema físico se representa esquemáticamente en la figura siguiente.



MCC

a. Diagrama de Bloques

La dinámica del circuito de armadura del MCC viene dada por

$$u_a = R_a i_a + e = R_a i_a + K_m \omega_m \quad (1)$$

En el eje del motor, aplicando la 2da. Ley de Newton sobre la inercia J_m resulta:

$$J_m \omega'_m = \tau_m - \tau_c = K_m i_a - \tau_c \qquad (2)$$

donde τ_c es el torque resistente que aparece en el eje del motor debido al carrito.

Para el sistema de transmisión biela-manivela asumiremos que se conserva la potencia, es decir que transmite la potencia sin pérdidas

$$\tau_c \omega_m = F x' \qquad (3)$$

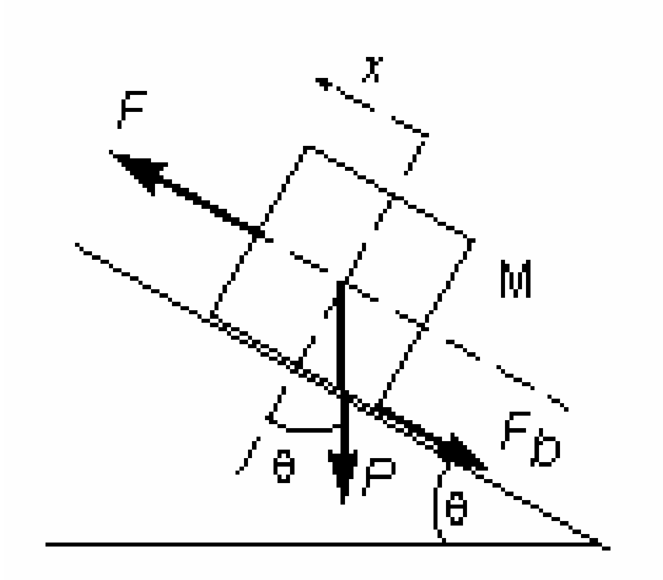
Además se verifica que:

$$\theta_m r = x \Rightarrow \omega_m r = x' \qquad (4)$$

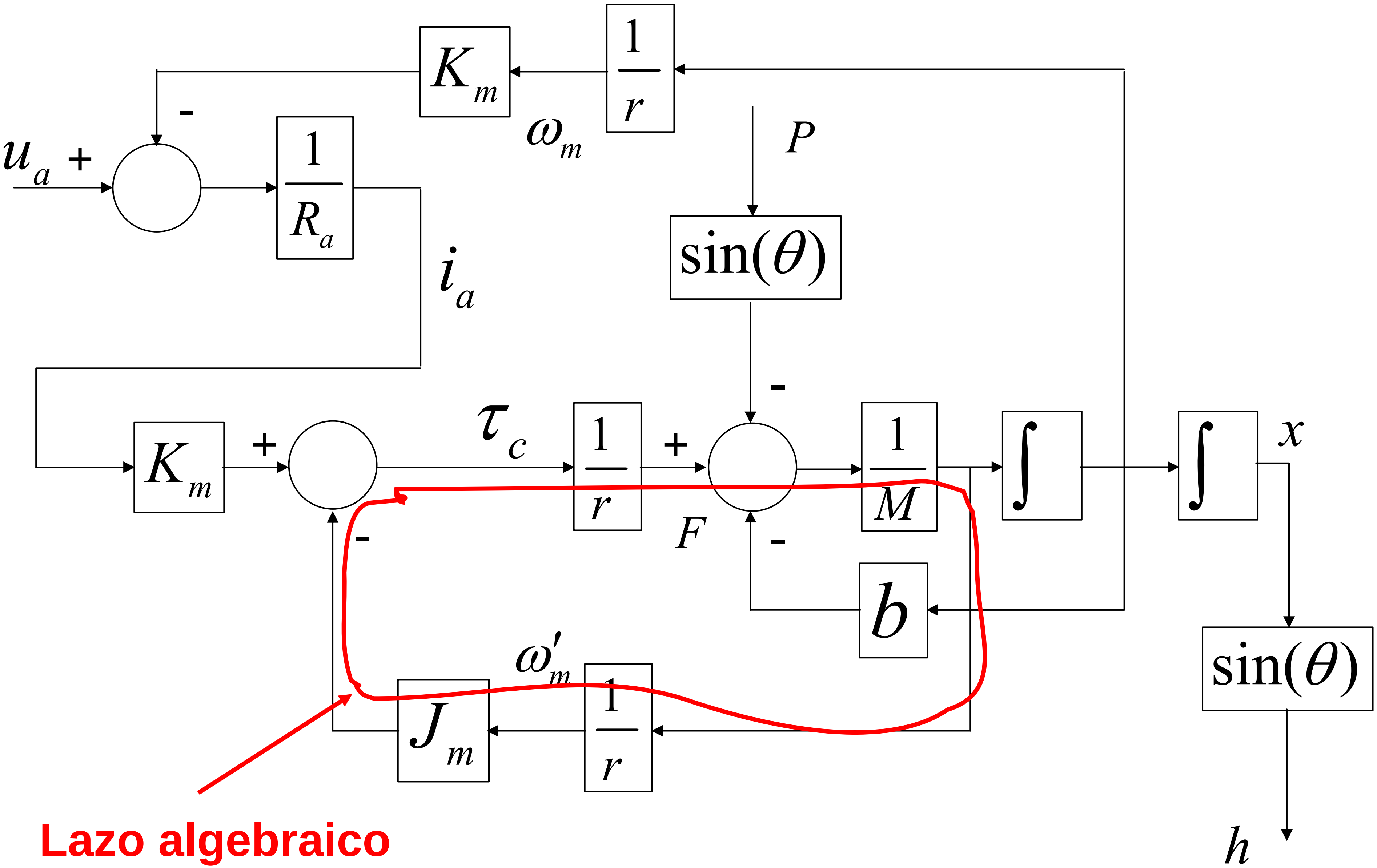
Resulta entonces

$$\tau_c = Fr \tag{5}$$

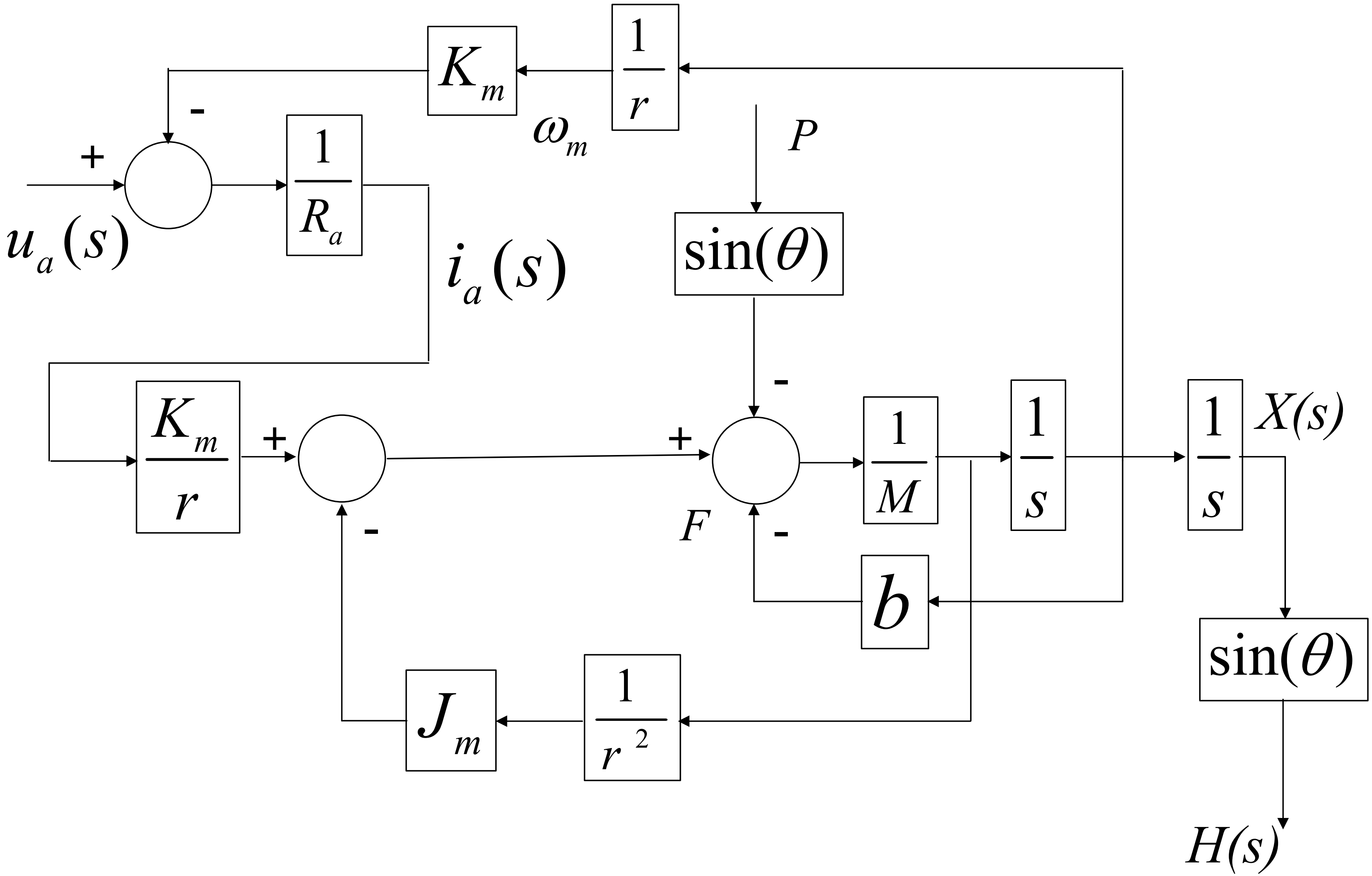
Considerando ahora el carrito



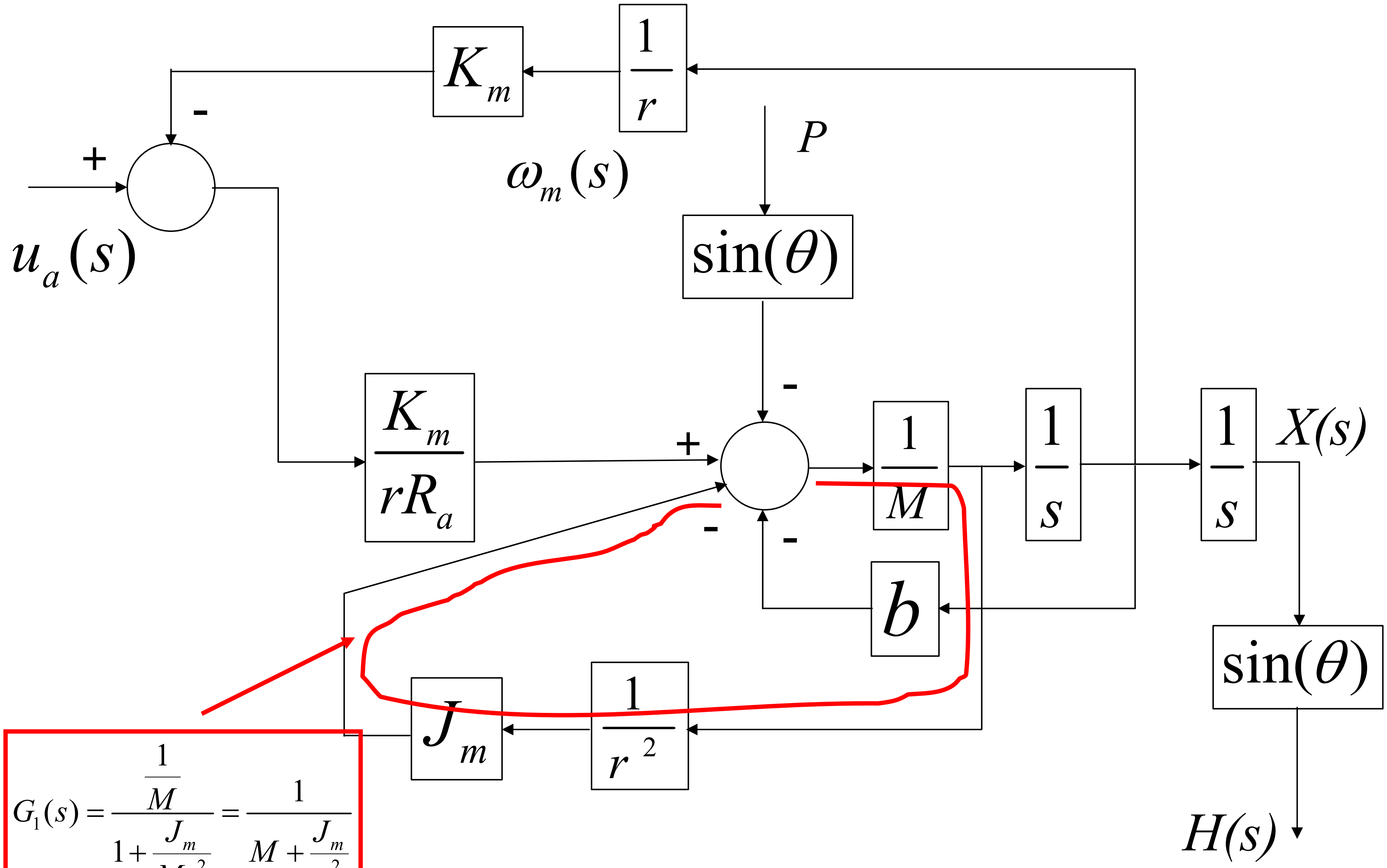
$$Mx'' = F - P\sin(\theta) - F_b = F - P\sin(\theta) - bx' \tag{6}$$



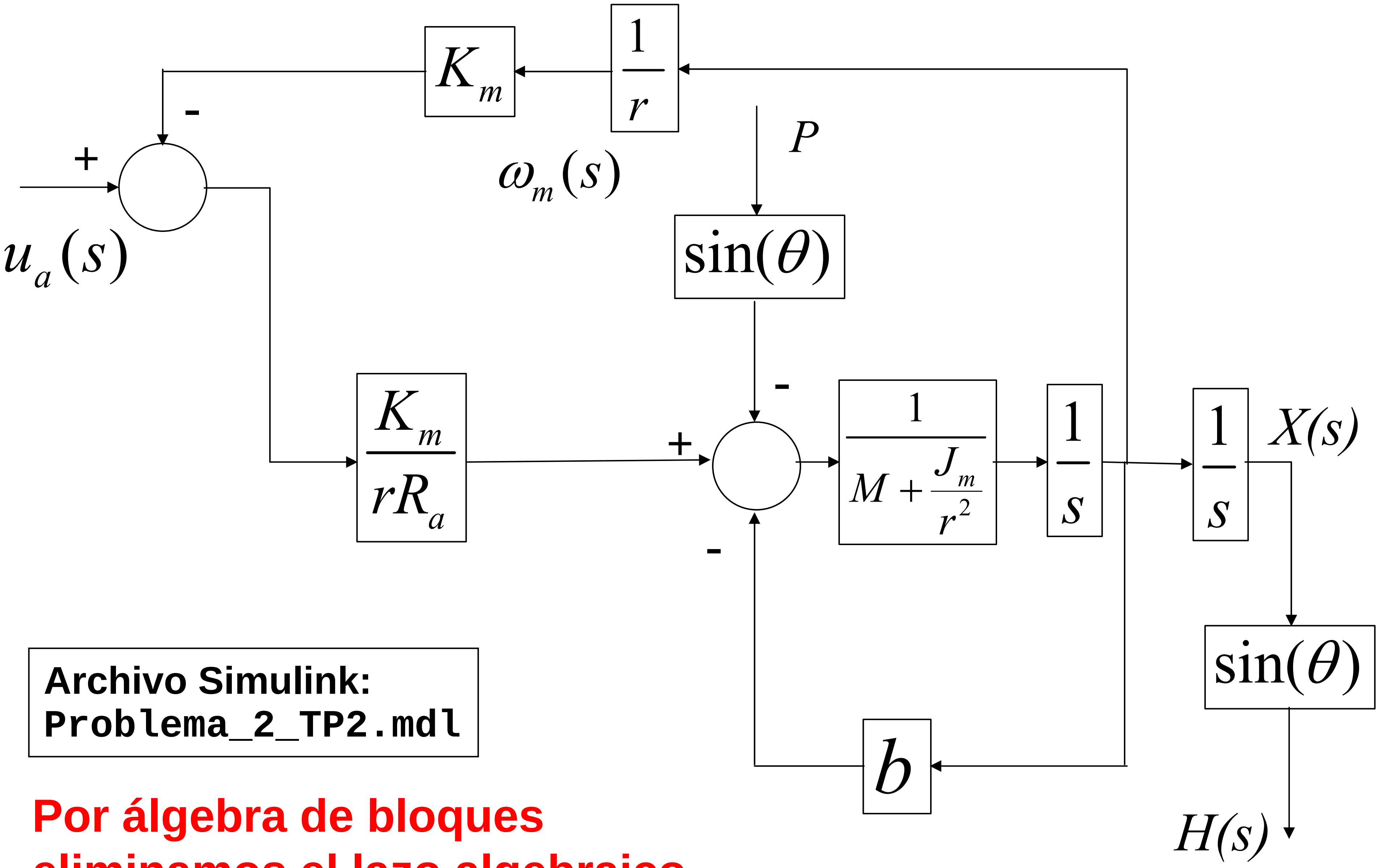
u_a
+
-
$\frac{1}{R_a}$
K_m
ω_m
$\frac{1}{r}$
P
$\sin(\theta)$
i_a
-
K_m
+
τ_c
$\frac{1}{r}$
+
$\frac{1}{M}$
$\int$
$\int$
x
-
F
-
b
ω'_m
J_m
$\frac{1}{r}$
$\sin(\theta)$
h
Lazo algebraico



K_m
$\frac{1}{r}$
-
ω_m
P
+
$\frac{1}{R_a}$
$u_a(s)$
$i_a(s)$
$\sin(\theta)$
-
$\frac{K_m}{r}$
+
+
$\frac{1}{M}$
$\frac{1}{s}$
$\frac{1}{s}$
$X(s)$
F
-
-
b
$\sin(\theta)$
J_m
$\frac{1}{r^2}$
$H(s)$



$$G_1(s) = \frac{\frac{1}{M}}{1 + \frac{J_m}{Mr^2}} = \frac{1}{M + \frac{J_m}{r^2}}$$

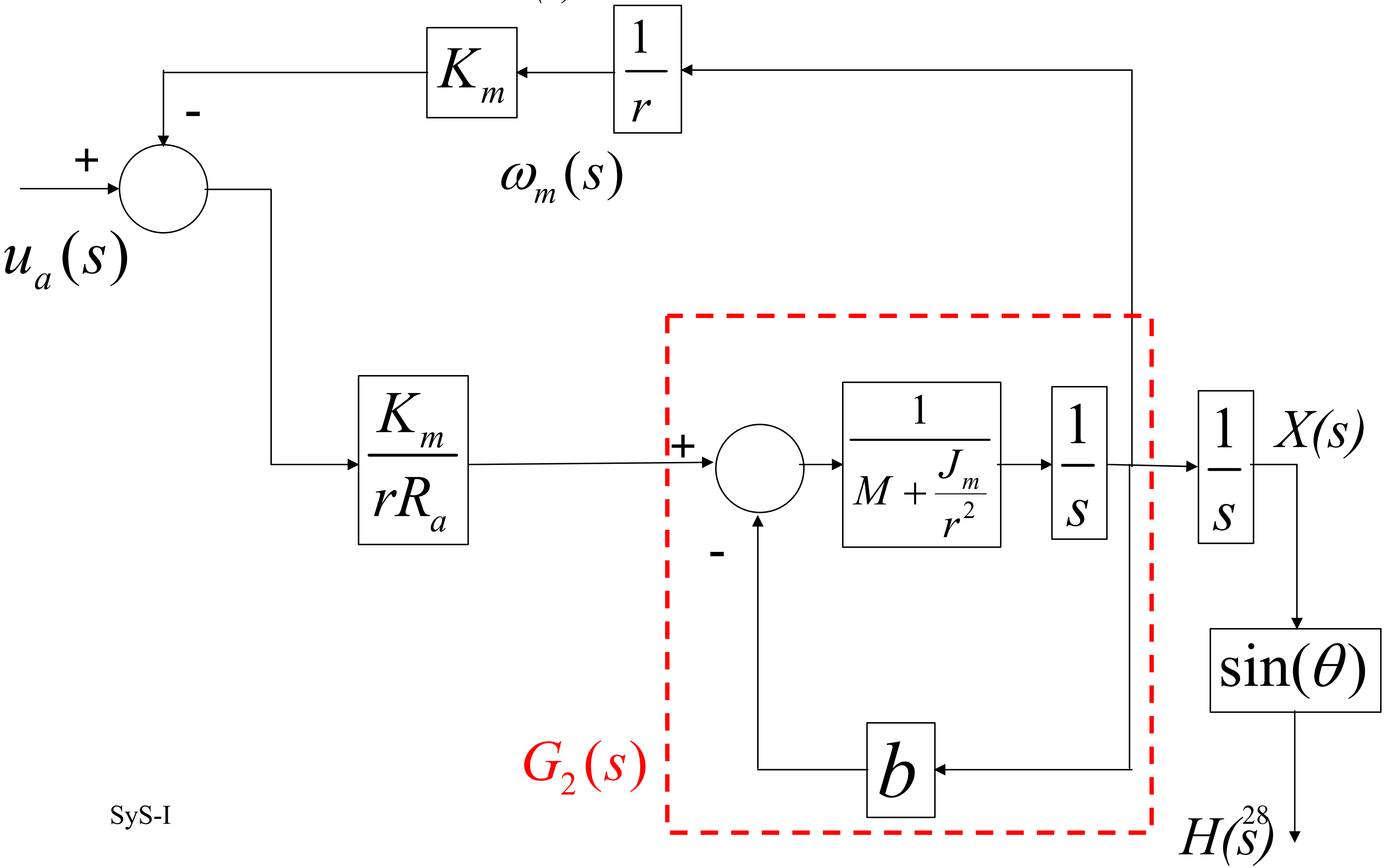


Archivo Simulink:
`Problema_2_TP2.mdl`

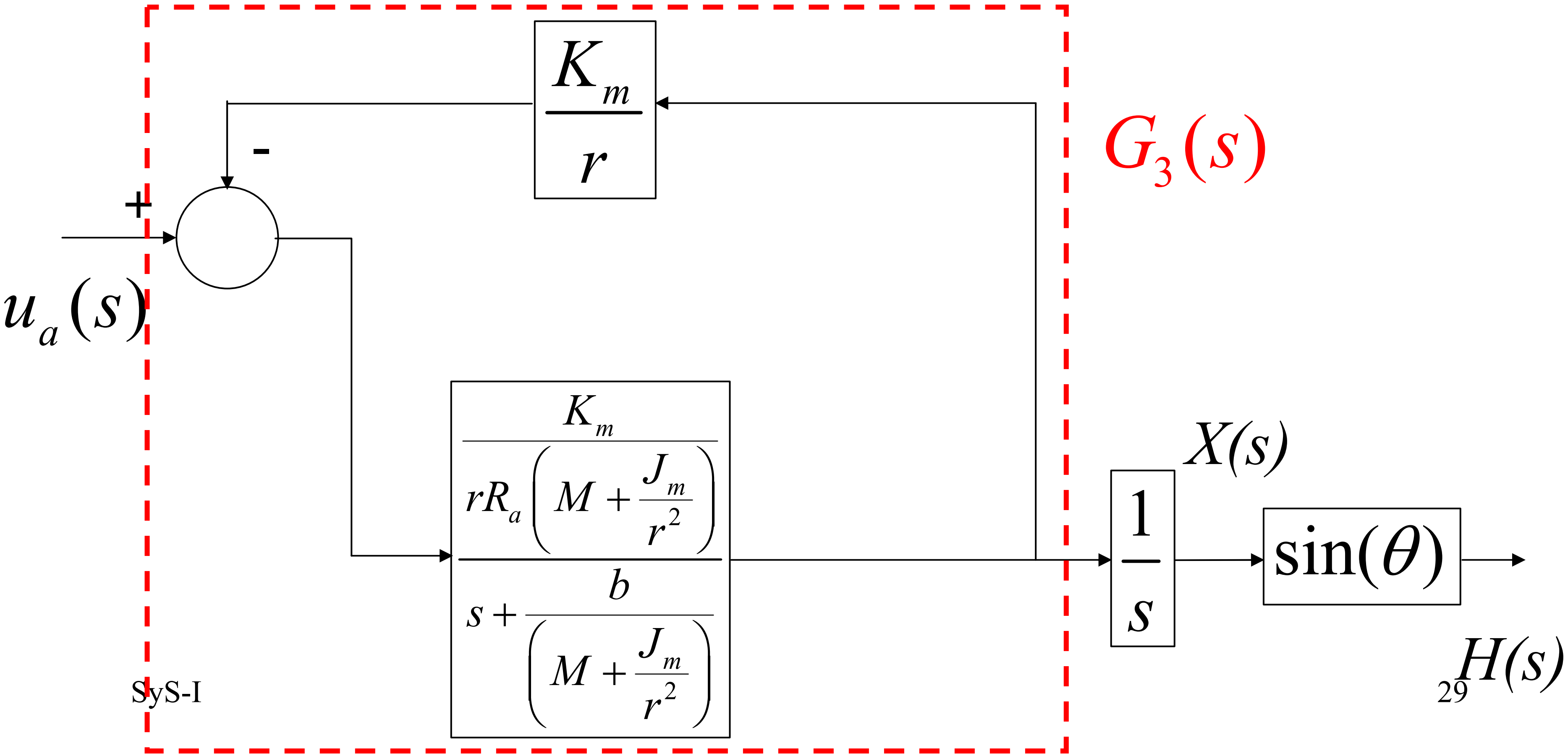
Por álgebra de bloques eliminamos el lazo algebraico

b. Función Transferencia entre $u_a(s)$ y $H(s)$

Pasivamos la entrada $P(s)$



$$G_2(s) = \frac{\dfrac{1}{s\left(M + \dfrac{J_m}{r^2}\right)}}{1 + \dfrac{b}{s\left(M + \dfrac{J_m}{r^2}\right)}} = \frac{1}{s\left(M + \dfrac{J_m}{r^2}\right) + b} = \frac{\dfrac{1}{\left(M + \dfrac{J_m}{r^2}\right)}}{s + \dfrac{b}{\left(M + \dfrac{J_m}{r^2}\right)}}$$



$$G_3(s) = \frac{\dfrac{\dfrac{K_m}{rR_a\left(M+\dfrac{J_m}{r^2}\right)}}{s+\dfrac{b}{\left(M+\dfrac{J_m}{r^2}\right)}}}{1+\dfrac{\dfrac{K_m^2}{r^2R_a\left(M+\dfrac{J_m}{r^2}\right)}}{s+\dfrac{b}{\left(M+\dfrac{J_m}{r^2}\right)}}} = \frac{\dfrac{K_m}{rR_a\left(M+\dfrac{J_m}{r^2}\right)}}{s+\dfrac{b}{\left(M+\dfrac{J_m}{r^2}\right)}+\dfrac{K_m^2}{r^2R_a\left(M+\dfrac{J_m}{r^2}\right)}} = \frac{\dfrac{K_m}{rR_a\left(M+\dfrac{J_m}{r^2}\right)}}{s+\dfrac{b+\dfrac{K_m^2}{r^2R_a}}{\left(M+\dfrac{J_m}{r^2}\right)}}$$

$$G(s) = \frac{H(s)}{u_a(s)} = \frac{\dfrac{K_m \mathrm{sen}(\theta)}{rR_a\left(M+\dfrac{J_m}{r^2}\right)}}{s\left(s+\dfrac{b+\dfrac{K_m^2}{r^2R_a}}{\left(M+\dfrac{J_m}{r^2}\right)}\right)}$$

c. Orden del sistema y BIBO estabilidad

De la función transferencia $G(s)$ podemos ver que el sistema es de segundo orden y que no es BIBO estable ya que tiene un polo en $s = 0$.

d. Diagrama de Bode

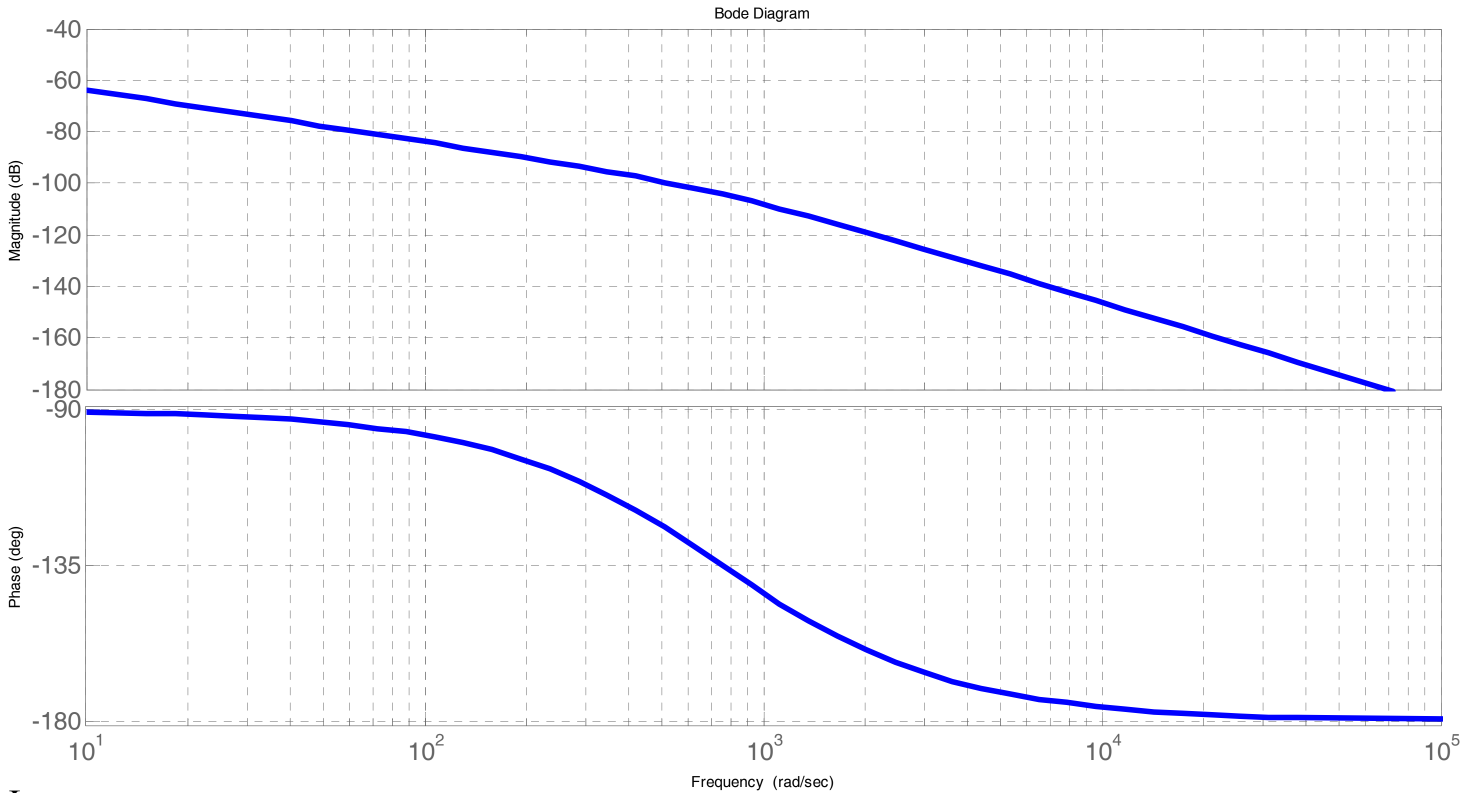
Consideremos los siguientes valores numéricos de los parámetros:

$$\theta = 30^{\circ}\ ; \qquad K_m = 0.767\ \text{Nm/A}$$
$$R_a = 2.6\ \Omega\ ; \qquad r = 0.01\text{m}$$
$$J_m = 3.87 \times 10^{-7}\ \text{Kg m}^2$$
$$M = 3\ \text{Kg}\ ; \qquad b = 8\ \text{N/m}$$
$$h_{max} = 10\ \text{m}$$

Archivo: `Problema_2_TP2_2021.m`

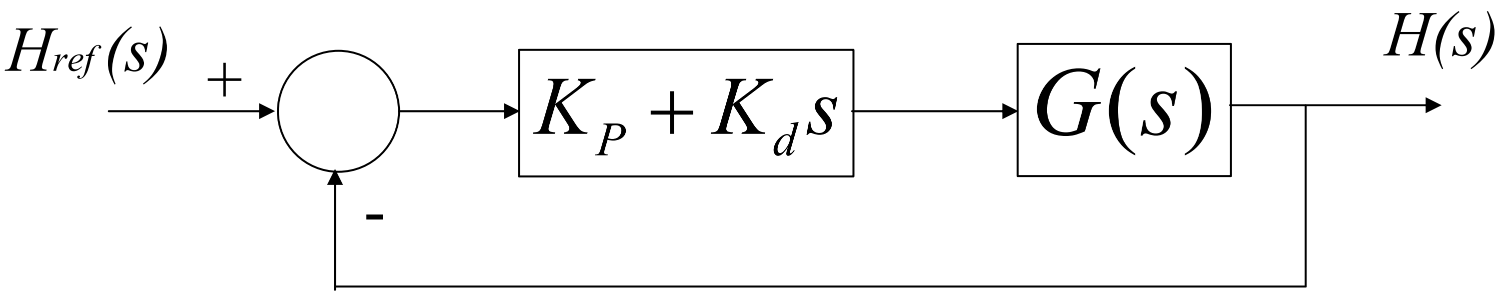
La función transferencia resulta:

$$G(s) = \frac{4.91}{s\left(s + 755.9\right)}$$



e. Control PD

Archivo Simulink:
`Problema_2_TP2_LC.mdl`



La función transferencia en lazo cerrado resulta

$$G_{LC}(s) = \frac{\left(K_P + K_D s\right)G(s)}{1+\left(K_P + K_D s\right)G(s)} = \frac{\left(K_P + K_D s\right)\times 4.91}{s\left(s+755.9\right)+\left(K_P + K_D s\right)\times 4.91}$$

$$= \frac{\left(K_P + K_D s\right)\times 4.91}{s^2 + \left(755.9 + 4.91\times K_D\right)s + 4.91\times K_P}$$

Se quiere tener un factor de amortiguamiento $\xi = 2$ y una pulsación natural $\omega_n = 22.16 \text{ rad/s}$. Resulta entonces

$$755.9 + 4.91 \times K_D = 2 \times 2 \times 22.16$$

$$4.91 \times K_P = (22.16)^2$$

De donde

$$K_P = 100$$

$$K_D = -135.89$$