Sistemas y Señales I

Teorema del Muestreo
Muestreo en el dominio Frecuencial

Temario: Cap. 9

Muestreo de Señales Analógicas

1. Conversión A/D y D/A

La mayoría de las señales de interés son de tipo analógico. Para procesar estas señales en forma digital es necesario convertirlas en una secuencia de números de precisión finita.

Conversión Analógica / Digital (A / D)

Los dispositivos que realizan esta operación se denominan Conversores A/D. El proceso de conversión A/D consta de los siguientes pasos:

Fig. 1. Conversión Analógica/Digital

En muchos casos de interés práctico es necesario reconvertir la señal procesada digitalmente a la forma analógica

Conversión Digital / Analógica (D / A)

Los dispositivos que realizan esta operación se denominan Conversores D/A. El proceso de conversión D/A consta de los siguientes pasos:

Fig. 2. Conversión Digital/Analógica

2. Muestreo en el Dominio Temporal

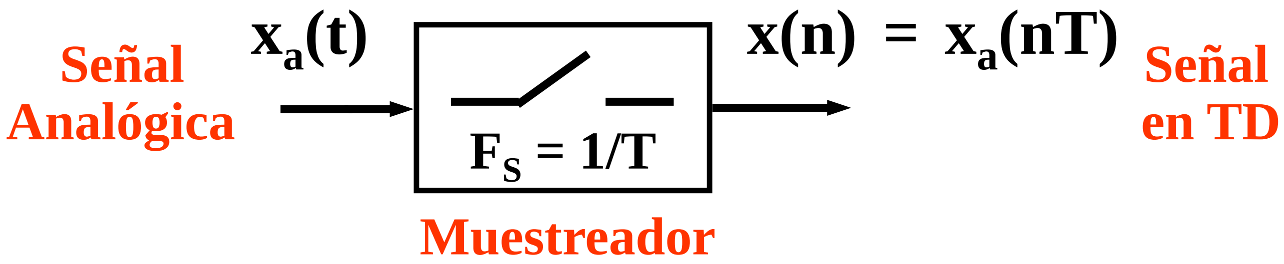

Fig. 3. Muestreo Ideal

Nos limitaremos a muestreo uniforme o periódico

$$x(n) = x_a(nT) \qquad -\infty < n < \infty$$

$x(n)$ se obtiene tomando muestras de $x_a(t)$ cada T segundos

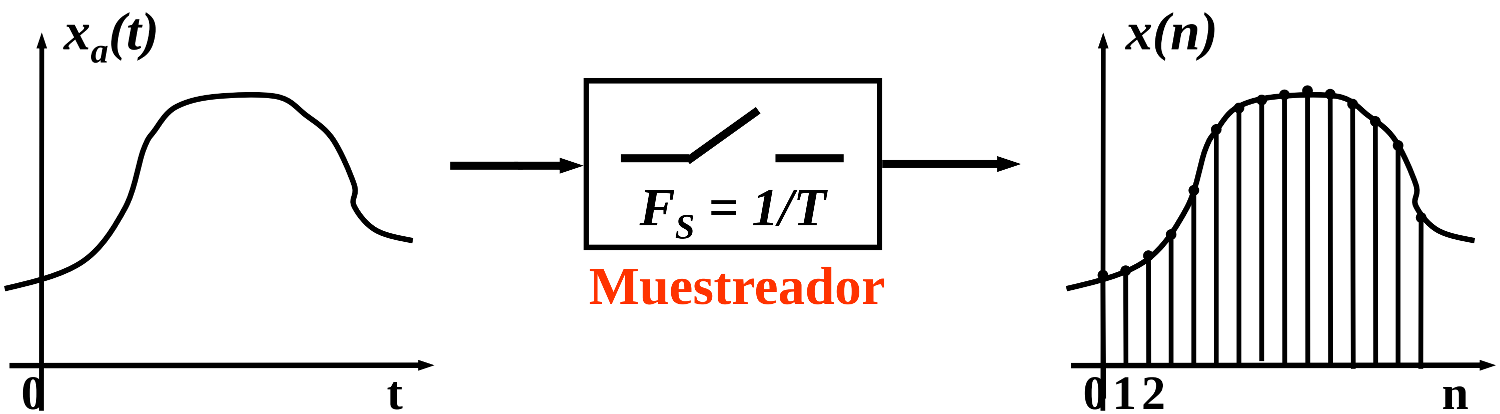

Fig. 4. Muestreo Ideal

Variable tiempo: continuo: t / discreto: n $\Rightarrow$ $t = n.T = n / F_S$

Frecuencia:

continuo: F

$x_a(t) = A\cos(2\pi.F.t)$

discreto: f

$x_a(nT) = x(n) = A\cos(2\pi.n.F / F_S)$

$\Rightarrow$ $f = F / F_S$

$\omega = \Omega.T$

Rango de Frecuencias:

continuo: $-\infty < F < \infty$ $\qquad -\infty < \Omega < \infty$

discreto: $-1/2 < f < 1/2$ $\qquad -\pi < \omega < \pi$

Analizaremos el muestreo en el dominio frecuencial determinando la relación entre el espectro de $x_a(t)$ y el espectro de $x(n)$

Si $x_a(t)$ es una señal no periódica con energía finita, su Transformada de Fourier es:

$$X_a(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j2\pi F t} \, dt \qquad \textbf{(1)}$$

La señal puede recuperarse a partir de su espectro $X_a(F)$ a través de la transformada inversa

$$x_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(F) e^{j2\pi F t} \, dF \qquad \textbf{(2)}$$

El espectro de la señal en TD $x(n)$ obtenida muestreando $x_a(t)$ viene dado por la Transformada de Fourier

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \qquad \textbf{(3)}$$

o equivalentemente

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j2\pi f n} \qquad \textbf{(4)}$$

La señal $x(n)$ puede recuperarse a partir de su espectro usando la transformada inversa

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)e^{j\omega n}\, d\omega=\int_{-1/2}^{1/2} X(f)e^{j2\pi f n}\, df \qquad \textbf{(5)}$$

Considerando (2) y que $x(n)=x_a(nT)$, podemos escribir:

$$x(n)=x_a(nT)=\int_{-\infty}^{\infty} X_a(F)e^{j2\pi nF/F_S}\, dF \qquad \textbf{(6)}$$

Comparando (5) y (6) podemos concluir que:

$$\int_{-1/2}^{1/2} X(f)e^{j2\pi f n}\, df=\int_{-\infty}^{\infty} X_a(F)e^{j2\pi nF/F_S}\, dF$$

Considerando que $f = F / F_S \Rightarrow df = dF / F_S$, resulta:

$$\frac{1}{F_S}\int_{-F_S/2}^{F_S/2} X(F/F_S)e^{j2\pi nF/F_S}\, dF=\int_{-\infty}^{\infty} X_a(F)e^{j2\pi nF/F_S}\, dF \qquad \textbf{(7)}$$

La integral en el lado derecho de la igualdad anterior puede escribirse como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} X_a(F) e^{j2\pi nF/F_S}\, dF = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{\left(k-\frac{1}{2}\right)F_S}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)F_S} X_a(F) e^{j2\pi nF/F_S}\, dF$$

Cambio de variable
F'= F - k.F

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-F_S/2}^{F_S/2} X_a(F + kF_S) e^{j2\pi nF/F_S}\, dF$$

$$= \int_{-F_S/2}^{F_S/2} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(F + kF_S) \right] e^{j2\pi nF/F_S}\, dF$$

Comparando esta expresión con el lado izquierdo de (7) podemos concluir:

$$X\left(\frac{F}{F_S}\right) = F_S \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(F + kF_S) \quad \text{o} \quad X(f) = F_S \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left[(f + k)F_S\right]$$

El espectro $X(f)$ de la señal en TD consiste de una repetición periódica del espectro escalado $F_S X_a(F)$ de la señal en tiempo continuo.

Ejemplo:

Señal de banda limitada $\Rightarrow X_a(F) = 0$ para $|F| \geq B$

Fig. 5. b. $\rightarrow F_S \geq 2B$ $\rightarrow$ **No hay "aliasing"**

$$X\left(\frac{F}{F_S}\right) = F_S\ X_a(F) \qquad |F| \leq F_S/2$$

En este caso el espectro de la señal en tiempo discreto es idéntico (con el factor de escala F_S) al espectro de la señal analógica en el rango fundamental de frecuencias $|F| \leq F_S/2$ o $|f| \leq 1/2$

Fig. 5.c./d. $\rightarrow F_S < 2B \rightarrow$ **"aliasing"**

La continuación periódica de $X_a(F)$ resulta en sobreposición de espectros.

El espectro $X(F/F_S)$ de la señal en TD contiene componentes de frecuencia que son "**alias**" del espectro de la señal analógica. La presencia de aliasing impide que la señal original pueda recuperarse a partir del espectro de la señal muestreada.

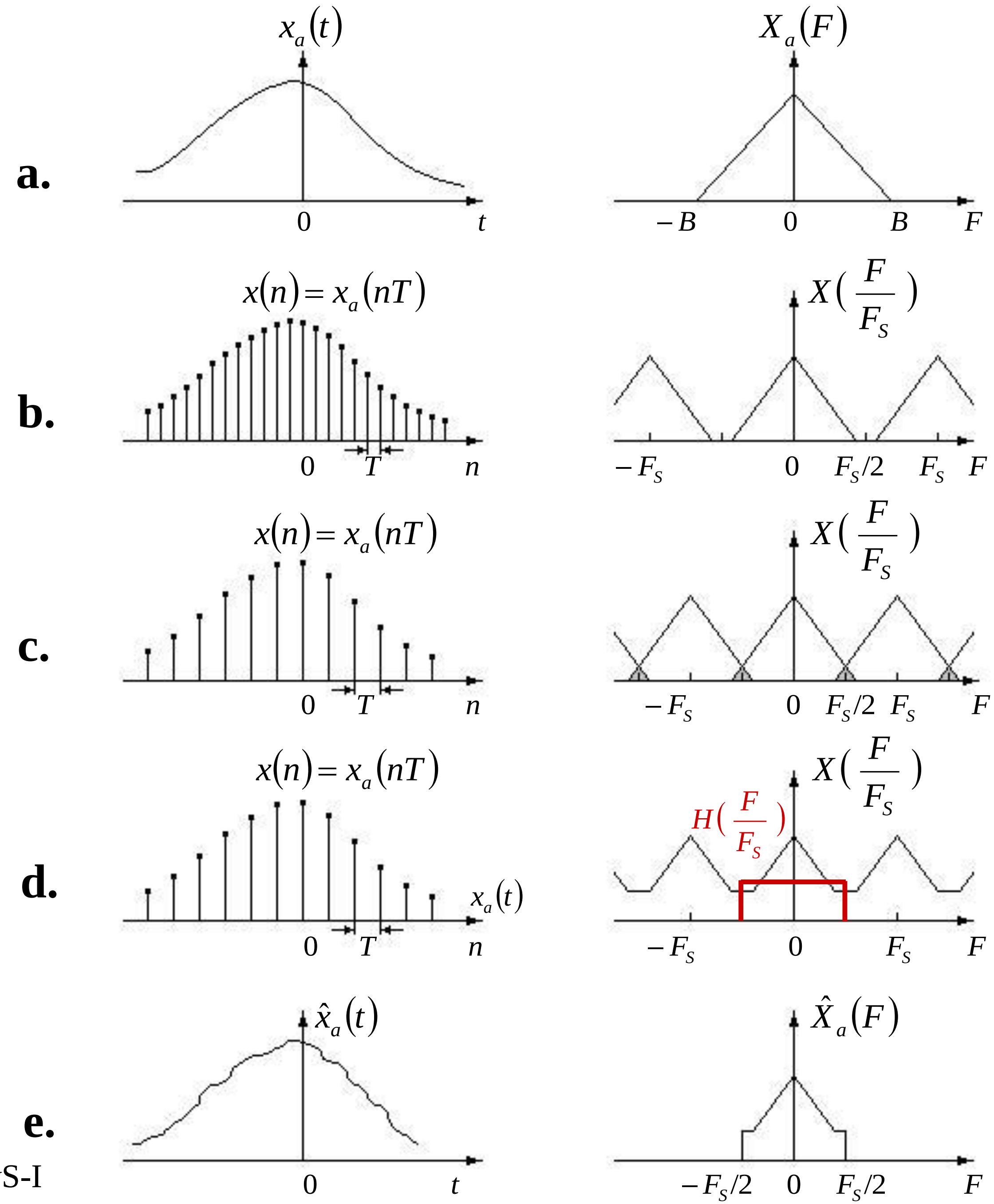

Fig. 5. Espectros de la señal analógica y de la señal muestreada

Dada la señal en tiempo discreto con espectro $X(F/F_S)$ sin aliasing, la señal analógica original puede **reconstruirse** a partir de la señal muestreada.

En efecto, en ausencia de aliasing:

$$X_a(F) = \begin{cases} \dfrac{1}{F_S} X\left(\dfrac{F}{F_S}\right) & |F| \le F_S/2 \\ 0 & |F| > F_S/2 \end{cases}$$

por lo que

$$x_a(t) = \int_{-F_S/2}^{F_S/2} X_a(F) e^{j2\pi F t}\, dF$$

$$= \frac{1}{F_S} \int_{-F_S/2}^{F_S/2} X\left(\frac{F}{F_S}\right) e^{j2\pi F t}\, dF$$

Transformada Inversa de Fourier

Por definición:

$$X\left(\frac{F}{F_s}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j2\pi nF/F_s}$$

Reemplazando en la ecuación anterior:

$$x_a(t)=\frac{1}{F_s}\int_{-\frac{F_s}{2}}^{\frac{F_s}{2}}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j2\pi nF/F_s}\right]e^{j2\pi Ft}dF=\frac{1}{F_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\int_{-\frac{F_s}{2}}^{\frac{F_s}{2}} e^{j2\pi F(t-\frac{n}{F_s})}dF$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\frac{1}{j2\pi F_s\left(t-\frac{n}{F_s}\right)}e^{j2\pi F(t-\frac{n}{F_s})}\Bigg|_{-\frac{F_s}{2}}^{\frac{F_s}{2}}$$

$$x_a(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\frac{\operatorname{sen}\left[\frac{\pi\left(t-nT\right)}{T}\right]}{\frac{\pi\left(t-nT\right)}{T}}$$

Fórmula de reconstrucción

Definimos:

$$g(t) = \frac{\operatorname{sen}(\pi\, t / T)}{\pi\, t / T}$$

Función de interpolación

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \,.\, g(t - nT)$$

Fórmula de interpolación ideal

Teorema de Muestreo:

Si la máxima frecuencia contenida en una señal analógica $x_a(t)$ es $F_{max} = B$ y la señal es muestreada con una frecuencia $F_S > 2\,F_{max} = 2\,B$, entonces $x_a(t)$ puede ser exactamente recuperada a partir de las muestras $x_a(nT)$ mediante el uso de la fórmula de interpolación ideal.

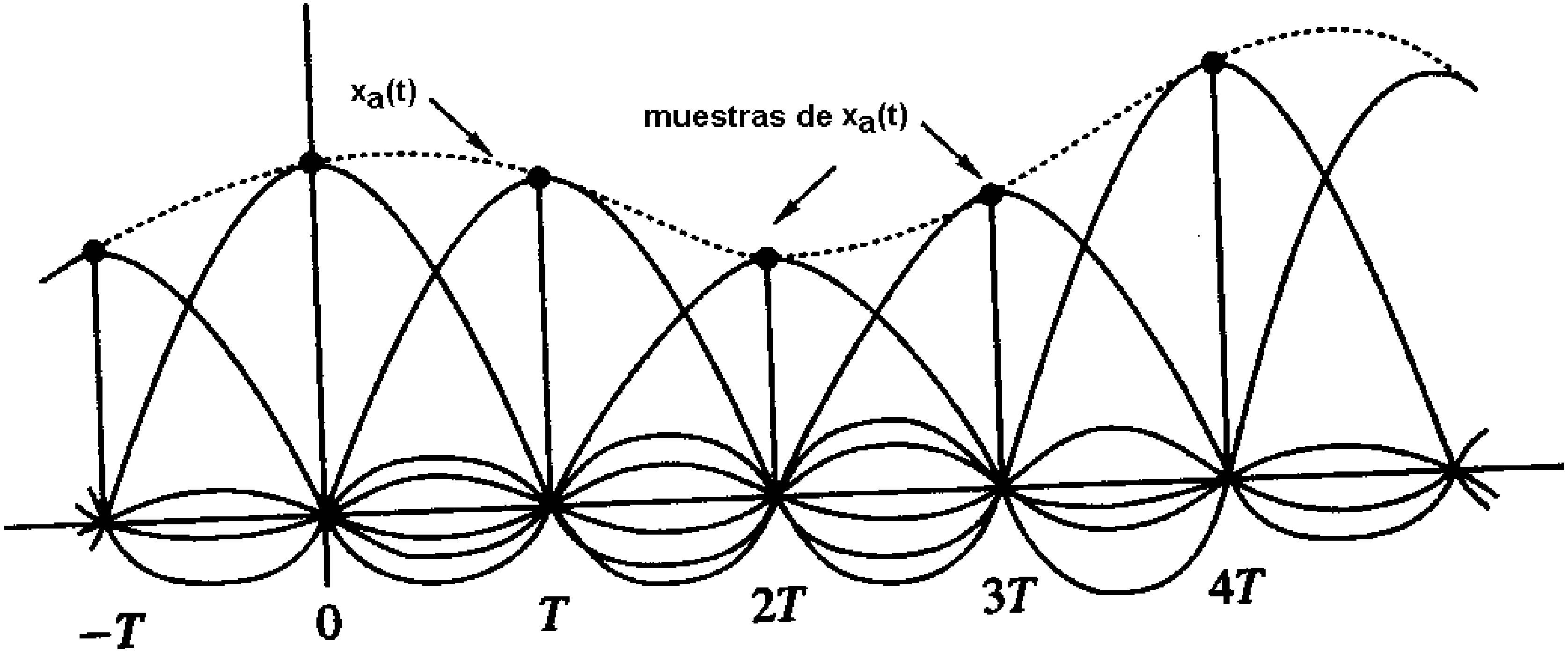

Fig. 6. Interpolación Ideal – Teorema de Muestreo

A $F_N \triangleq 2B$ se la denomina **Tasa de Muestreo de Nyquist**

En la práctica, se emplea un **prefiltro de antialiasing** antes de muestrear la señal para asegurar que las componentes de frecuencia por encima de $F_S/2$ están suficientemente atenuadas y de esta forma el aliasing no produce distorsión apreciable.

Ejemplos:

1. Aliasing en señales senoidales

$$x_a(t) = \cos 2\pi F_0 t$$

2. Muestreo de señales de banda no limitada

$$x_a(t) = e^{-A|t|} \qquad A>0$$

$$X_a(F) = \frac{2A}{A^2 + (2\pi F)^2}$$

3. Muestreo en el Dominio Frecuencial

Consideremos la representación de una señal $x(n)$ en TD mediante muestras de su espectro $X(\omega)$ $\rightarrow$ DFT

Sea $x(n)$ señal aperiódica de energía finita.

Sabemos que $x(n)$ tiene un espectro continuo

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

Suponemos que $X(\omega)$ es muestreada periódicamente en frecuencia con un espaciamiento entre muestras $\delta\omega$.

Tomamos N muestras equidistantes en un período de $X(\omega)$ en el rango $0 \leq \omega < 2\pi$. Tenemos entonces:

$$\delta\omega = 2\pi / N$$

Evaluamos (1) en $\omega = 2\pi.k/N$:

$$X\left(\frac{2\pi.k}{N}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j2\pi k n/N} \quad , \; k = 0, 1, \ldots, N-1$$

que puede escribirse:

$$X\left(\frac{2\pi.k}{N}\right) = \ldots + \sum_{n=-N}^{-1} x(n) e^{-j2\pi k n/N} + \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi k n/N} + \ldots$$

$$= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \sum_{n=\ell N}^{\ell N+N-1} x(n) e^{-j2\pi k n/N}$$

$$m \rightarrow n - \ell.N \qquad = \sum_{m=0}^{N-1} \underbrace{\left[\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} x(m+\ell N) \right]}_{= x_p(m)} e^{-j2\pi k m/N}$$

La señal $x_p(n)$ se obtiene como una repetición periódica de $x(n)$ cada N muestras.

$x_p(n)$ es entonces periódica de período N y puede expandirse en serie de Fourier

$$x_p(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \, e^{j 2\pi k n / N} \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

con:

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j 2\pi k n / N}$$

Comparando está expresión con la vista anteriormente resulta

$$c_k = \frac{1}{N} \, X\left(\frac{2\pi k}{N} \right) \quad , \ k = 0, 1, \ldots, N-1$$

y por lo tanto:

$$x_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \; X\left(\frac{2\pi k}{N} \right) e^{j 2\pi k n / N} \qquad , \ n = 0, 1, \ldots, N-1$$

La ecuación anterior permite reconstruir la señal periódica $x_p(n)$ a partir de las muestras del espectro $X(\omega)$ de $x(n)$.

Sin embargo, nuestro objetivo es reconstruir $x(n)$ o $X(\omega)$ a partir de las muestras de $X(\omega)$. Debemos entonces hallar la relación entre $x_p(n)$ y $x(n)$.

Como $x_p(n)$ es la repetición periódica de $x(n)$ es claro que $x(n)$ puede recuperarse de $x_p(n)$ si no hay aliasing en el dominio temporal, es decir si $x(n)$ es de duración finita menor que el período N de $x_p(n)$.

Es decir, si $L < N$, entonces:

$$x(n) = x_p(n) \qquad\qquad 0 \leq n \leq N - 1$$

En caso contrario, $N < L$, no es posible recuperar $x(n)$ a partir de $x_p(n)$ debido al aliasing en el dominio temporal.

Como en el caso de señales en tiempo continuo es posible expresar el espectro $X(\omega)$ en términos de las muestras $X(2\pi k/N)$ con $k=0,1,\ldots,N-1$.

La fórmula de interpolación en este caso resulta:

$$X(\omega)=\sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{2\pi k}{N}\right).P\left(\omega-\frac{2\pi k}{N}\right) \qquad N \geq L$$

donde la función interpolación $P(\omega)$ está definida como:

$$P(\omega)=\frac{sen(\omega N/2)}{Nsen(\omega/2)}\, e^{-j\omega(N-1)/2}$$