Sistemas y Señales I

Integración numérica de ecuaciones diferenciales

Temario: Cap. 12: Items 12.1, 12.2 y 12.3

Algoritmo de Integración numérica de Euler

Se quiere resolver numéricamente el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \qquad (1)$$

Se discretiza el tiempo, de forma que $t = kT$ con k entero y T el período de muestreo (**paso de integración numérica**), y se aproxima la derivada por el cociente incremental

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{x_{k+1} - x_k}{T} = f(x_k) \qquad (2)$$

donde $x_k = x(t = kT)$, de modo que resulta

$$x_{k+1} = x_k + Tf\left(x_k\right) \qquad (3)$$

que es una **ecuación en diferencias de primer orden,** que se puede implementar como un **algoritmo iterativo**, conociendo la condición inicial x_0.

Este es el denominado **Método de Euler** de integración numérica (de primer orden).

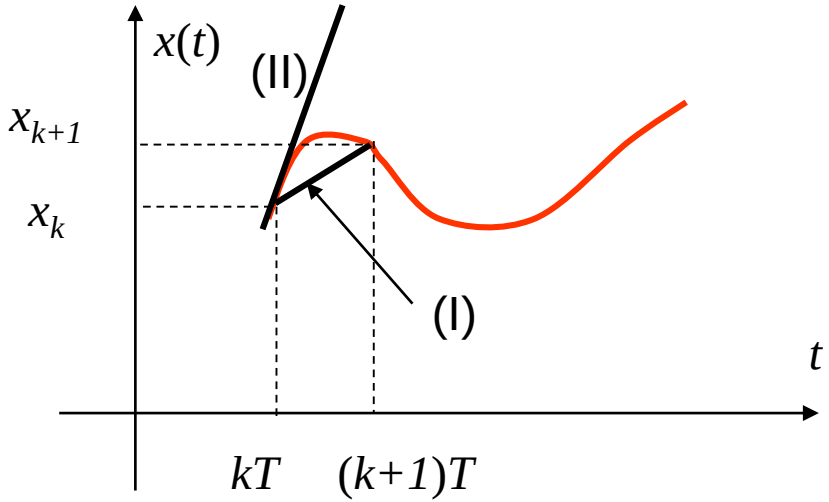

Fig. 1: Método de Integración de Euler.

Nota 1: La aproximación de la derivada por el cociente incremental es **buena** si el paso de integración numérica T es **pequeño**. En ese caso, la pendiente de la recta (I) en Fig. 1 se aproxima a la de la recta (II), que es el valor de la derivada en el punto kT .

Nota 2: En cada iteración del método se comete un error de aproximación de la derivada, que se va acumulando. Esto hace que si el tiempo total de integración numérica es grande, el error acumulado sea grande, haciendo que los resultados sean poco confiables.

Algoritmo de Integración numérica con la regla trapezoidal

Sea la ecuación diferencial (1)

$$\frac{dx}{dt} = f\left(x\right)$$

Se verifica entonces que

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} f\left(x(\tau)\right) d\tau \qquad (4)$$

Si se discretiza el tiempo, de forma que $t = kT$, con k entero y T el período de muestreo (**paso de integración numérica**), la ecuación (4) puede escribirse como:

$$x\big((k+1)T\big) = \underbrace{\int_{-\infty}^{kT} f(x(\tau))d\tau}_{x(kT)} + \int_{kT}^{(k+1)T} f(x(\tau))d\tau$$

$$= x(kT) + \underbrace{\int_{kT}^{(k+1)T} f(x(\tau))d\tau}_{(I)} \qquad (5)$$

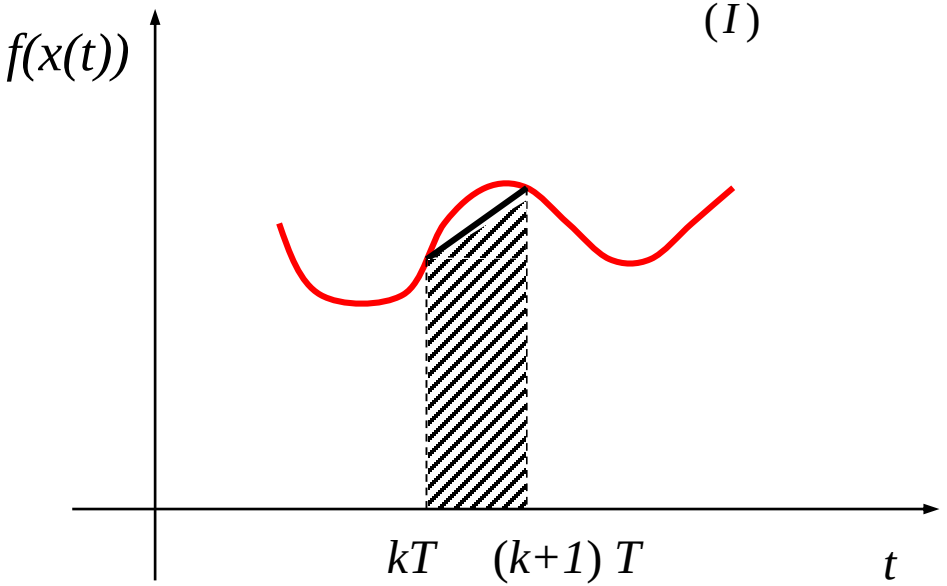

Figura 2: Aproximación trapezoidal.

La integral (I) puede aproximarse por el área del trapecio (región rayada) en Fig. 2. Con esta aproximación, la ecuación (5) puede escribirse como:

$$x\big((k+1)T\big) = x\big(kT\big) + \frac{T}{2}\Big[\, f\Big(x\big((k+1)T\big)\Big) + f\Big(x\big(kT\big)\Big)\Big]$$

O equivalentemente

$$x_{k+1} = x_k + \frac{T}{2}\Big[\, f\big(x_{k+1}\big) + f\big(x_k\big)\Big] \qquad (6)$$

Notar que es una fórmula **implícita**, ya que para calcular x_{k+1} se necesita $f\,(x_{k+1})$.

La forma de resolver esta ecuación es escribiéndola en **forma acausal**, *i.e.*

$$x_{k+1} - x_k - \frac{T}{2}\left[f\left(x_{k+1}\right) + f\left(x_k\right)\right] = 0 \qquad (7)$$

y hallando los valores de x_{k+1} que anulan el lado izquierdo de (7) mediante algún método iterativo para el cálculo de las raíces de una ecuación algebraica, como ser el **Método de Newton-Raphson**.

Método de Newton-Raphson

Dada una función $f(x)$ definida sobre los x reales, y su derivada f', comenzamos con una primer aproximación x_0 para la raíz de la función f. Bajo ciertas hipótesis sobre la función, una mejor aproximación x_1 de la raíz es:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Geométricamente, $(x_1, 0)$ es la intersección con el eje x de la tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$.

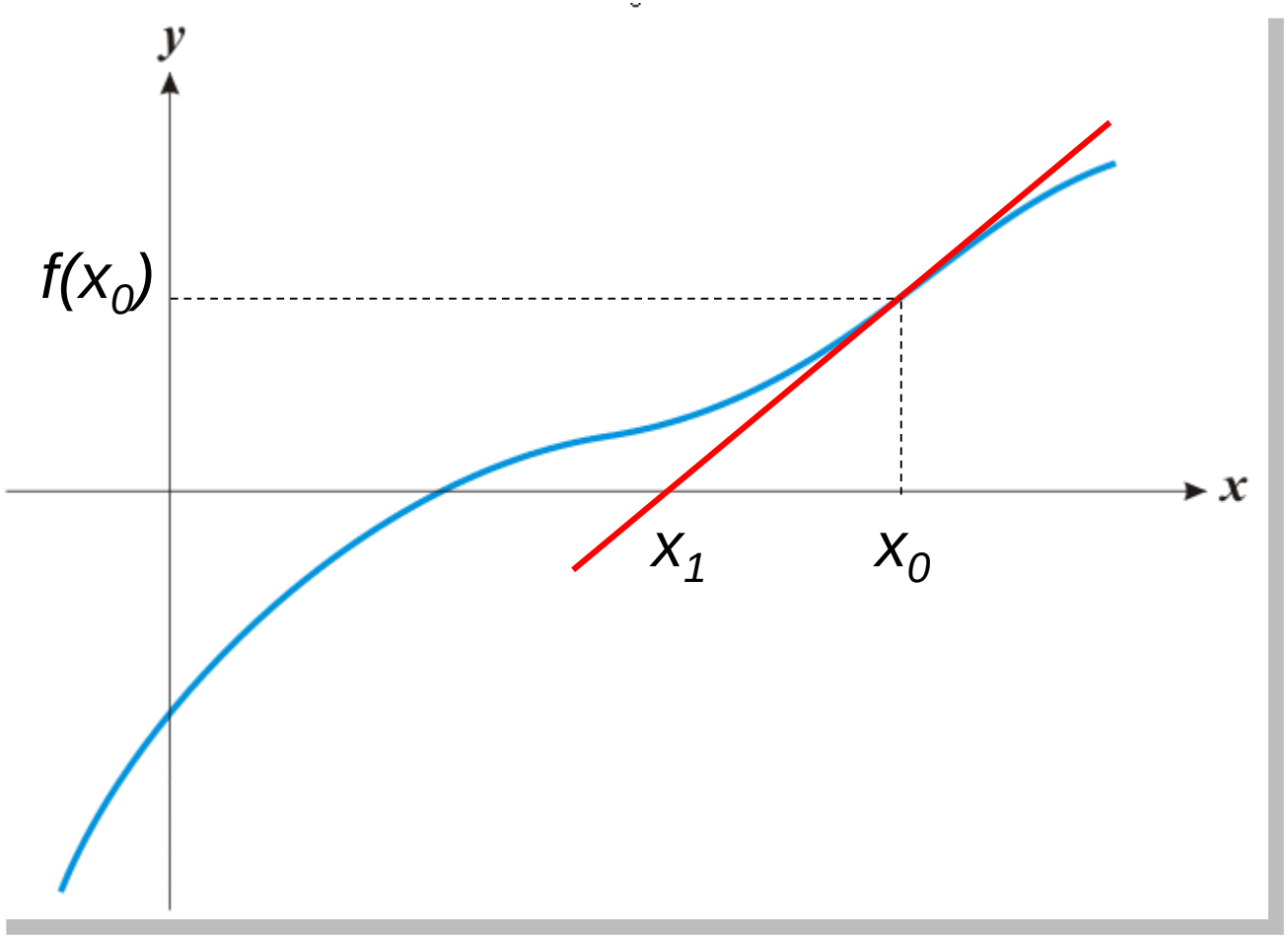

Figura 3: Primera Iteración del Método de Newton-Raphson.

Se repite el proceso

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f\left(x_n\right)}{f'\left(x_n\right)}$$

hasta que se obtiene un valor con la precisión requerida.

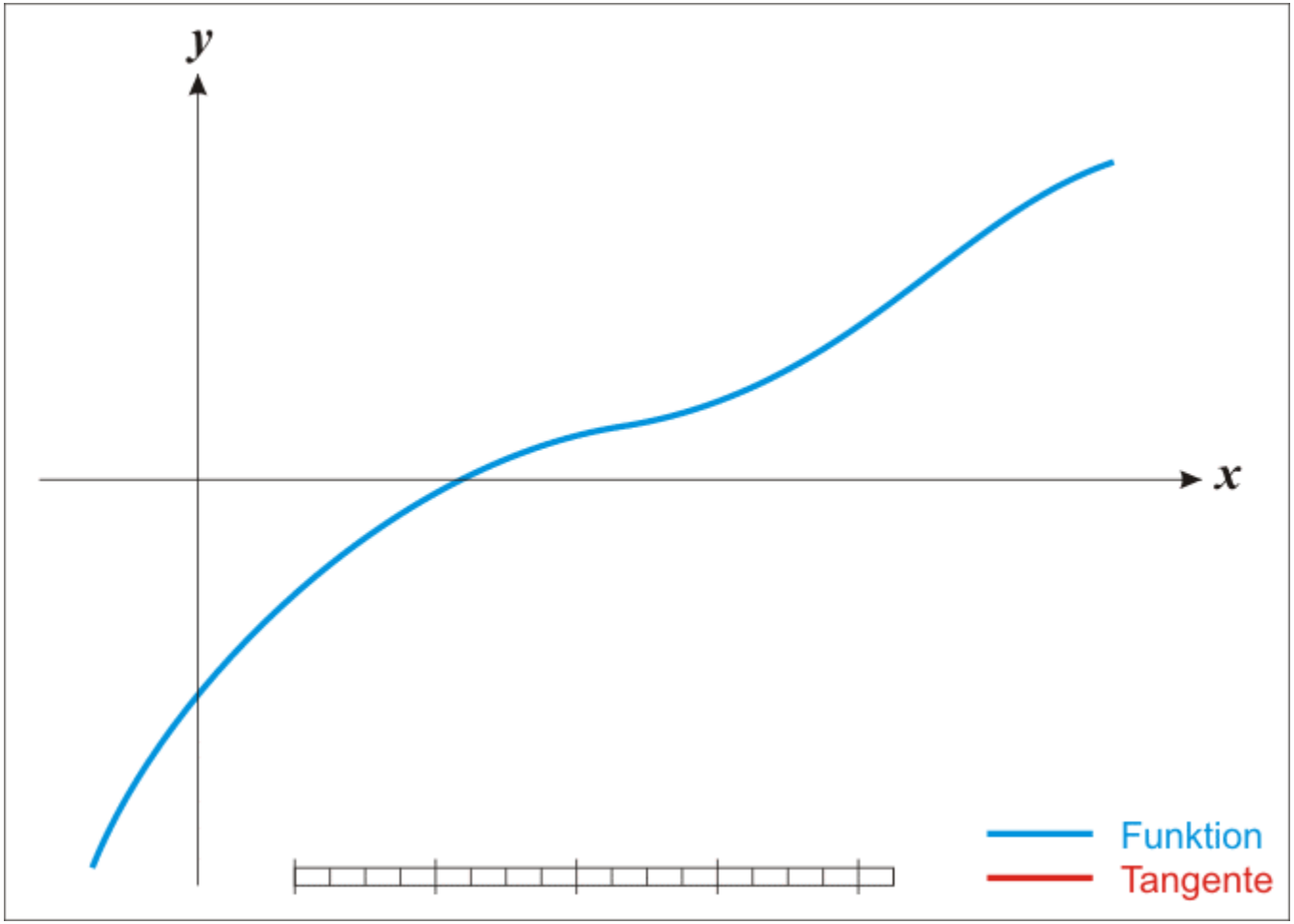

Figura 4: Sucesivas Iteraciones del Método de Newton-Raphson.