

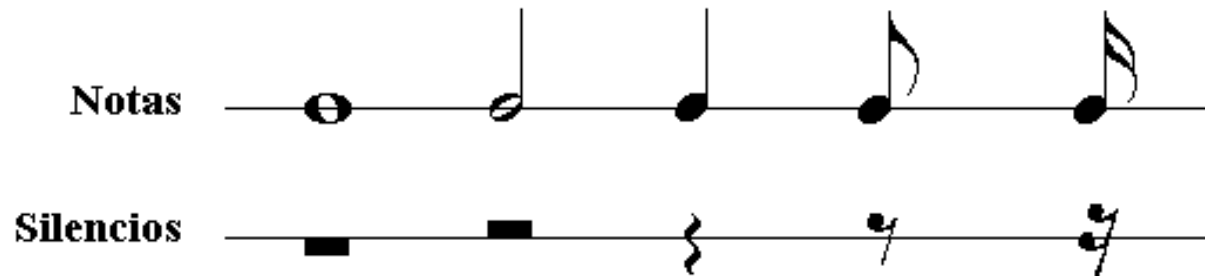
Sistemas y Señales I

Filtrado en el dominio de Fourier

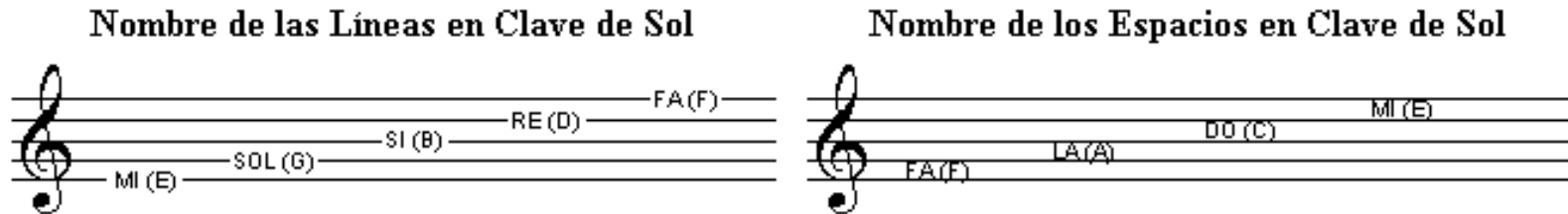
Temario: Cap. 9

Notación Musical

- La forma de la nota indica la duración relativa



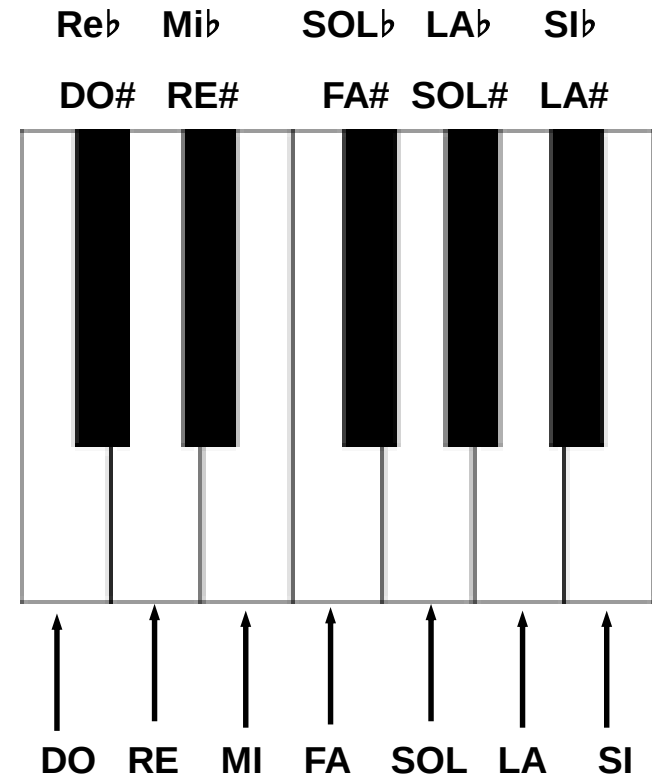
- La altura de la nota en el pentagrama indica la frecuencia



Escala cromática en el rango 440-880 Hz

(Sistema Equitemperado)

Nota	Frecuencia [Hz]
La	440
La # - Si b	$440 \times 2^{\frac{1}{12}}$
Si	$440 \times 2^{\frac{2}{12}}$
Do	$440 \times 2^{\frac{3}{12}}$
Do # - Re b	$440 \times 2^{\frac{4}{12}}$
Re	$440 \times 2^{\frac{5}{12}}$
Re # - Mi b	$440 \times 2^{\frac{6}{12}}$
Mi	$440 \times 2^{\frac{7}{12}}$
Fa	$440 \times 2^{\frac{8}{12}}$
Fa # - Sol b	$440 \times 2^{\frac{9}{12}}$
Sol	$440 \times 2^{\frac{10}{12}}$
Sol # - La b	$440 \times 2^{\frac{11}{12}}$
La	$440 \times 2^{\frac{12}{12}} = 880$



$$\frac{F_{\text{nota+semitono}}}{F_{\text{nota}}} = 2^{\frac{1}{12}}$$

Señal a procesar

El siguiente trozo de música corresponde a los primeros compases del ***Hallelujah Chorus*** del Oratorio ***Messiah*** de G. F. Handel (1685-1759). La obra se estrenó en Dublin en 1742. A partir de 1750, ***Messiah*** se interpretó en funciones anuales a beneficio del Foundling Hospital, una organización londinense de caridad que se ocupaba de los niños huérfanos, a la cual Handel estuvo vinculado hasta su fallecimiento en 1759. En su testamento, Handel legó los derechos de autor de la obra, y una copia autografiada, al Foundling Hospital. Los cuatro pentagramas corresponden a las voces de soprano, alto, tenor y bajo.

Hal - le - lu - jah! Hal - le - lu - jah! Hal - le - lu - jah! Hal - le - lu - jah! Hal - le - lu - jah!

Hal - le - lu - jah! Hal - le - lu - jah! Hal - le - lu - jah! Hal - le - lu - jah! Hal - le - lu - jah!

Hal - le - lu - jah! Hal - le - lu - jah! Hal - le - lu - jah! Hal - le - lu - jah! Hal - le - lu - jah!

Hal - le - lu - jah! Hal - le - lu - jah! Hal - le - lu - jah! Hal - le - lu - jah! Hal - le - lu - jah!

Descripción del problema

- El archivo **handel.m** de Matlab contiene una señal de audio, muestreada con $F_s = 8192$ Hz, que corresponde al trozo musical mencionado.
- Se genera un tono puro con la nota **Mi** (frecuencia $F_{Mi} = 220 \times 2^{7/12}$ Hz) y con la misma duración que la señal en **handel.m**, y se adiciona a la señal. Se considera una amplitud igual a 0.3.
- Se quiere diseñar un filtro rechaza banda, en el rango correspondiente a las notas **Re#** (frecuencia $F_{Re\#} = 220 \times 2^{6/12}$ Hz) y **Fa** (frecuencia $F_{Fa} = 220 \times 2^{8/12}$ Hz), para eliminar el tono puro adicionado.
- El filtro consiste en un vector de 1's (en la banda de paso) y 0's (en la banda de rechazo) de la misma longitud N que la DFT de la señal.

- Como la rutina `fft` computa la transformada en frecuencias de la forma

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{N} \quad , \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

debemos determinar cuales son los valores de k que corresponden a las frecuencias $F_{\text{Re\#}}$ y F_{Fa} que delimitan la banda de rechazo del filtro

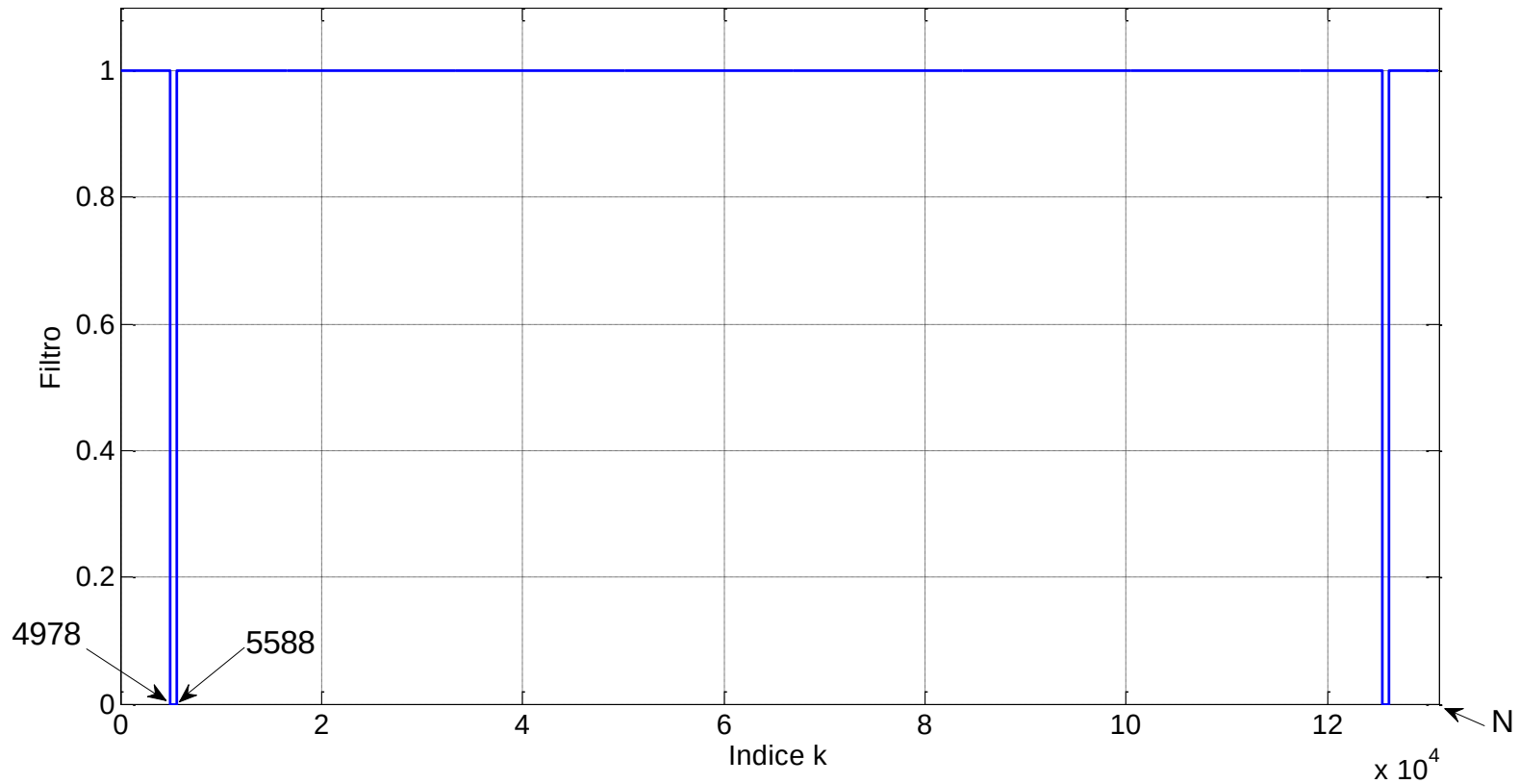
$$\omega_k = \frac{2\pi k}{N} \Rightarrow f_k = \frac{k}{N} \Rightarrow F_k = \frac{kF_s}{N} \Rightarrow k = \frac{NF_k}{F_s}$$

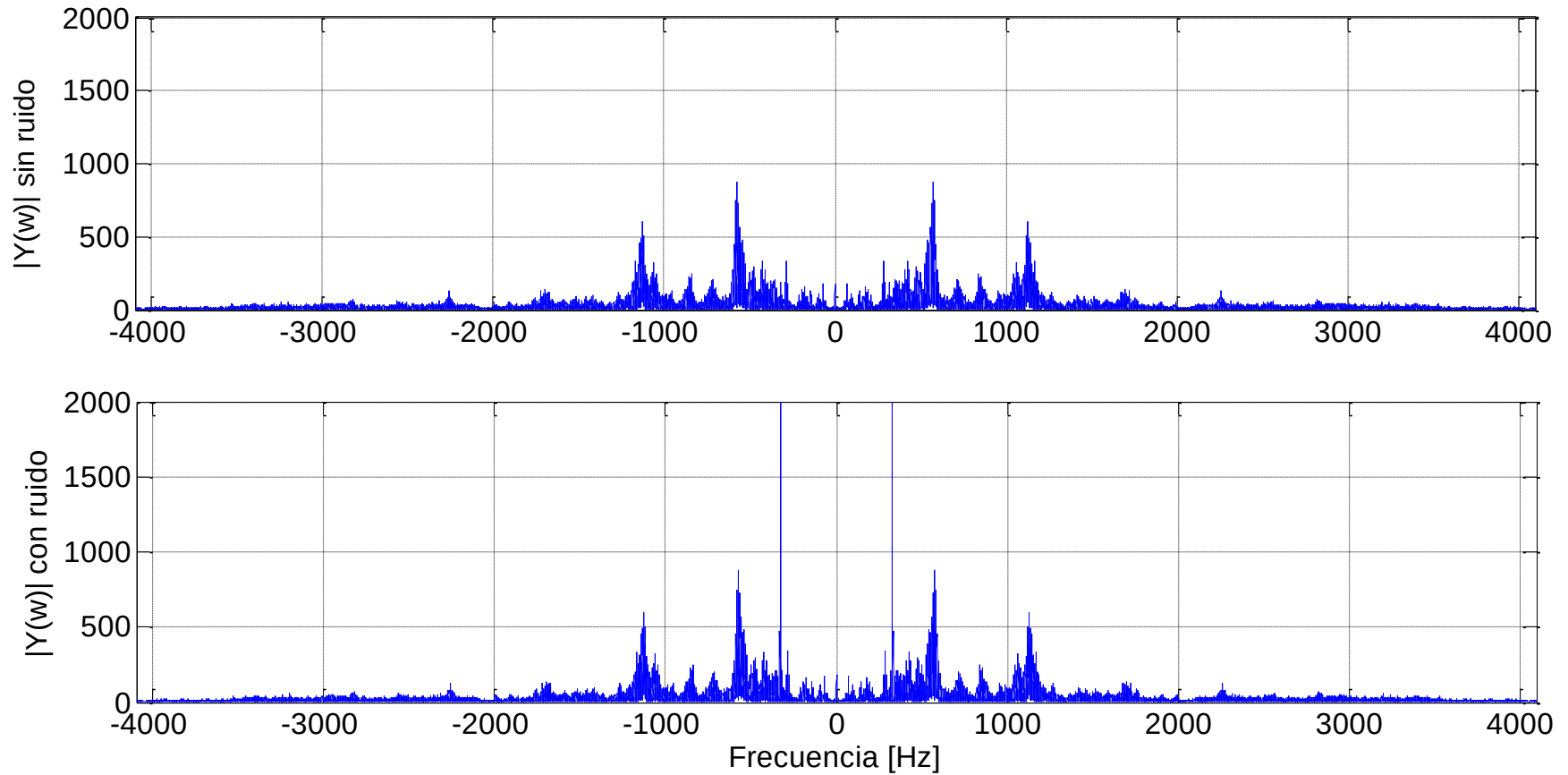
Luego

$$k_{\text{Re\#}} = \frac{NF_{\text{Re\#}}}{F_s} = \frac{2^{17} \times 220 \times 2^{6/12}}{8192} = 4978$$

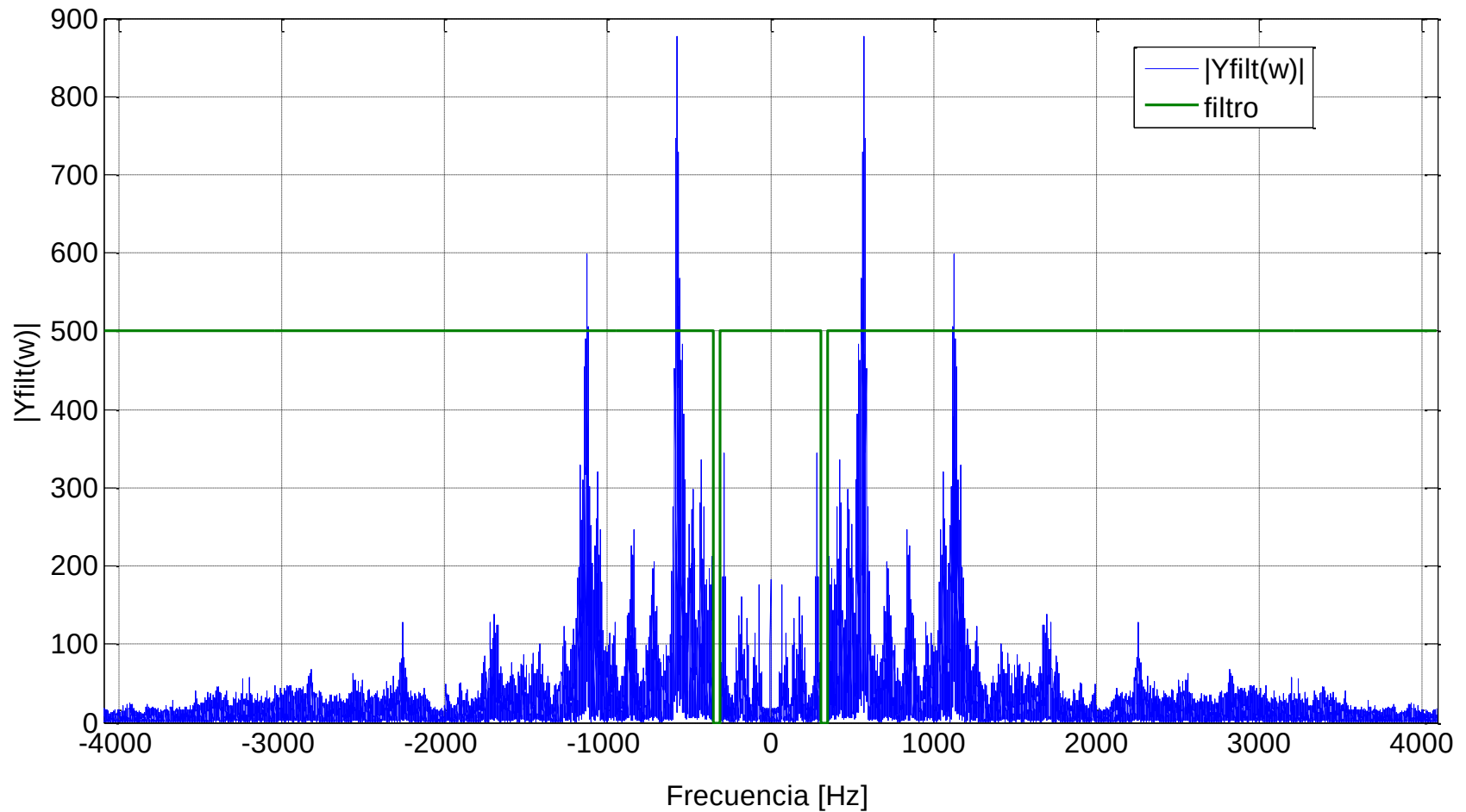
$$k_{\text{Fa}} = \frac{NF_{\text{Fa}}}{F_s} = \frac{2^{17} \times 220 \times 2^{8/12}}{8192} = 5587.7 \Rightarrow k_{\text{Fa}} = 5588$$

donde se ha adoptado $N = 2^{17}$ frecuencias para el cálculo de la transformada. Debe tenerse en cuenta que el filtro debe ser simétrico por lo que deben hacerse cero los coeficientes entre $k_{Re\#}$ y k_{Fa} , y entre $(N - k_{Fa})$ y $(N - k_{Re\#})$





Espectro de módulo de la señal original (arriba) y de la señal con ruido (abajo).



Espectro de módulo de la señal filtrada (azul) y
filtro x 500 (verde).

```

load handel
Fmi=220*2^(7/12);
n=[0:1:length(y)-1]';
ruido_mi=sin(2*pi*Fmi*n/Fs);
yruidosa=y+0.3*ruido_mi;
N=2^17;
Y=fft(y,N);
Yruidosa=fft(yruidosa,N);
F=[-Fs/2:Fs/N:Fs/2-Fs/N]';
Fresos=220*2^(6/12);
Ffa=220*2^(8/12);
kresos=floor(Fresos*N/Fs);
kfa=ceil(Ffa*N/Fs);
filtro=ones(N,1);
filtro(kresos:kfa)=0;
filtro(N-kfa:N-kresos)=0;
Yfiltrada=filtro.*Yruidosa;
yfiltrada=real(ifft(Yfiltrada,N));
k=[0:1:N-1]';

```

```

figure(1)
plot(k,filtro)
figure(2)
plot(F,abs(fftshift(Y)))
figure(3)
plot(F,abs(fftshift(Yruidosa)))
figure(4)
plot(F,abs(fftshift(Yfiltrada)))
figure(5)
plot(F,abs(fftshift(Yfiltrada)),...
F,500*fftshift(filtro))
soundsc(y,Fs)
soundsc(yruidosa,Fs)
soundsc(yfiltrada,Fs)

```