

Sistemas y Señales I

**Ejemplo de cálculo de la
respuesta a entradas y
condiciones iniciales en el
dominio transformado de Laplace**

Temario: Cap. 3: Item 3.1.4

Ejemplo: Sea el sistema descrito por la siguiente ecuación diferencial:

$$\ddot{y}(t) + 8\dot{y}(t) + 15y(t) = \dot{u}(t) + 10u(t) \quad (1)$$

a. Calculemos la Función Transferencia. Debemos transformar Laplace la ecuación (1) considerando condiciones iniciales nulas, y usando la propiedad de transformada de la derivada. Resulta:

$$s^2Y(s) + 8sY(s) + 15Y(s) = sU(s) + 10U(s)$$

$$Y(s)(s^2 + 8s + 15) = U(s)(s + 10)$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s + 10}{s^2 + 8s + 15} \quad (2)$$

b. Calculemos los polos y ceros del sistema

- Polos (raíces del polinomio denominador de la FT):

$$p_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \times 15}}{2} = \frac{-8 \pm 2}{2} = \begin{cases} -5 \\ -3 \end{cases}$$

- Ceros (raíces del polinomio numerador de la FT): $c = -10$

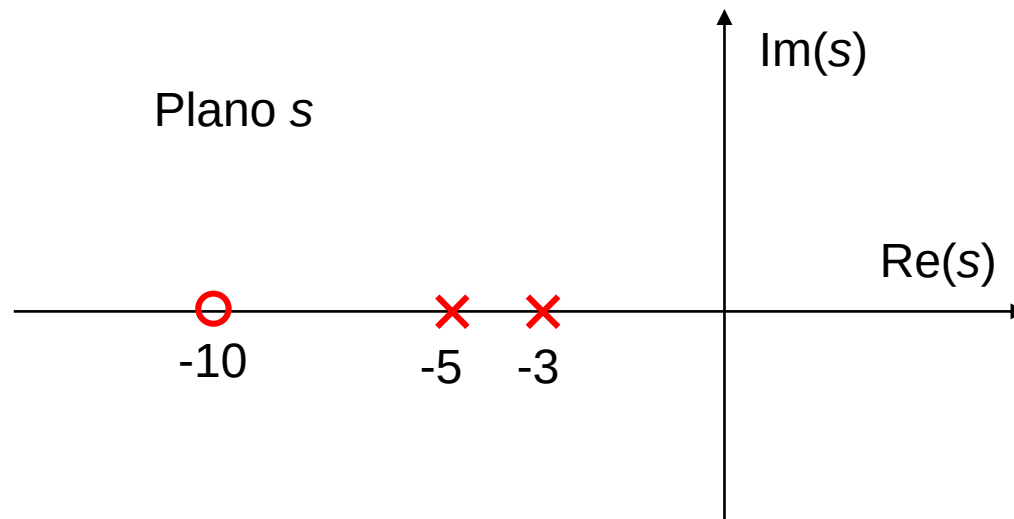


Diagrama de polos y ceros

c. Analicemos la BIBO estabilidad del sistema

Recordemos que la **condición necesaria y suficiente para la BIBO estabilidad** de un sistema lineal estacionario caracterizado por su función transferencia $G(s)$ es que la transferencia sea propia y que todos sus polos estén en el semiplano izquierdo abierto del plano S , es decir, tengan parte real negativa.

Vemos que en este caso se verifican ambas condiciones, por lo que el sistema resulta BIBO estable.

d. Calculemos la respuesta del sistema una entrada escalón unitario ($u(t) = \mu(t)$) y condiciones iniciales

$$y(0^-) = 1 \quad , \quad \dot{y}(0^-) = 2$$

Para poder incluir las condiciones iniciales debemos transformar Laplace la ecuación (1), pero usando la propiedad de transformada de la derivada con condiciones iniciales no nulas. Resulta:

$$s^2 Y(s) - sy(0^-) - \dot{y}(0^-) + 8sY(s) - 8y(0^-) + 15Y(s) = U(s)(s+10)$$

$$Y(s)(s^2 + 8s + 15) - (s+8)y(0^-) - \dot{y}(0^-) = U(s)(s+10)$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{s+10}{s^2 + 8s + 15}}_{G(s)} U(s) + \frac{s+8}{s^2 + 8s + 15} y(0^-) + \frac{1}{s^2 + 8s + 15} \dot{y}(0^-)$$

Vemos que la respuesta tiene tres componentes, una debida a la entrada (**respuesta forzada**) y una correspondiente a cada una de las dos condiciones iniciales (**respuesta libre**).

Considerando las condiciones iniciales dadas y la entrada particular resulta:

$$Y(s) = \underbrace{\frac{s+10}{s^2+8s+15}}_{G(s)} \frac{1}{s} + \frac{s+10}{s^2+8s+15} = \frac{s+10+s^2+10s}{s(s^2+8s+15)}$$
$$Y(s) = \frac{s^2+11s+10}{s(s+3)(s+5)} \quad (3)$$

Para obtener $y(t)$ debemos calcular la transformada inversa de Laplace en (3), para lo cual separamos en fracciones simples y usamos la tabla de pares transformados de Laplace.

$$Y(s) = \frac{s^2 + 11s + 10}{s(s+3)(s+5)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+3)} + \frac{C}{(s+5)}$$

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 + 11s + 10}{(s+3)(s+5)} = \frac{2}{3}$$

$$B = \lim_{s \rightarrow -3} (s+3)Y(s) = \lim_{s \rightarrow -3} \frac{s^2 + 11s + 10}{s(s+5)} = \frac{7}{3}$$

$$C = \lim_{s \rightarrow -5} (s+5)Y(s) = \lim_{s \rightarrow -5} \frac{s^2 + 11s + 10}{s(s+3)} = -2$$

La respuesta resulta entonces:

$$y(t) = \left(\frac{2}{3} + \frac{7}{3}e^{-3t} - 2e^{-5t} \right) \mu(t) \quad (4)$$

e. Calculemos la respuesta del sistema en 0^+
Por el **Teorema del Valor Inicial** de la Transformada de Laplace, resulta:

$$\begin{aligned} y(0^+) &= \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2 + 11s + 10}{(s+3)(s+5)} \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{11}{s} + \frac{10}{s^2}}{1 + \frac{8}{s} + \frac{15}{s^2}} = 1 = y(0^-) \end{aligned}$$

f. Calculemos la respuesta del sistema en para $t \rightarrow \infty$

Como la entrada es constante y el sistema es BIBO estable, la respuesta alcanzará un régimen permanente constante, por lo podemos aplicar el **Teorema del Valor Final** de la Transformada de Laplace, resultando:

$$y(t \rightarrow \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 + 11s + 10}{(s + 3)(s + 5)} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

que coincide con el valor que resulta de hacer tender t a infinito en (4).

g. Calculemos la derivada de la respuesta del sistema en 0^+
Por el **Teorema del Valor Inicial** de la Transformada de Laplace aplicado a la transformada de la derivada, resulta:

$$\dot{y}(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s [sY(s)] = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{s^2 + 11s + 10}{(s+3)(s+5)} = \infty$$

Vemos que hay una discontinuidad en la derivada. Derivando por la derecha (4) resulta:

$$\dot{y}(t) = \frac{7}{3}(-3)e^{-3t} - (-5)2e^{-5t} = -7e^{-3t} + 10e^{-5t}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \dot{y}(t) = 3 \neq \dot{y}(0^-) = 2$$

