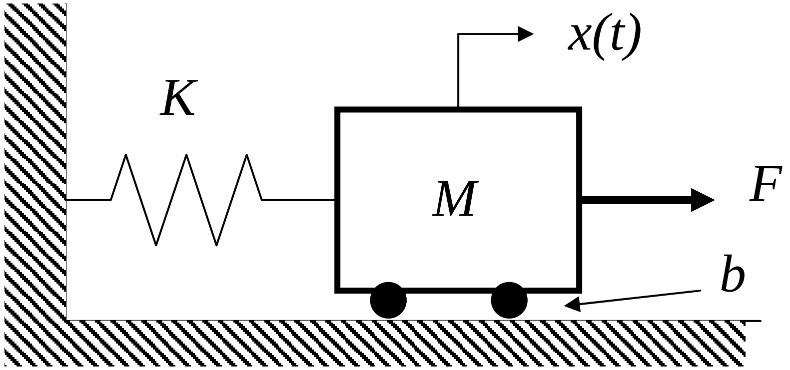
Ejemplo de integración numérica de ecuación diferencial: Sistema Masa-Resorte-Amortiguador



Por 2da. Ley de Newton resulta:

$$Mx''(t) = F - Kx(t) - bx'(t)$$

$$\Rightarrow x''(t) = \frac{1}{M}\left(F - Kx(t) - bx'(t)\right)$$

(1) $$\Rightarrow \boxed{x''(t) + \frac{b}{M}x'(t) + \frac{K}{M}x(t) = \frac{1}{M}F}$$

Ecuación Diferencial de segundo orden

Como la ecuación diferencial es de segundo orden, necesitamos saber como aproximar la derivada segunda por el método de Euler. Para evitar esto podemos convertir la ecuación diferencial de segundo orden en la variable $x(t)$ en dos ecuaciones diferenciales de primer orden en las variables:

$$\begin{cases} x_1(t) = x(t) \\ x_2(t) = x'(t) \end{cases}$$

Resulta entonces:

$$(2)\quad \begin{cases} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= \dfrac{1}{M}\left(F - Kx_1(t) - bx_2(t)\right) \end{cases}$$

Sistema de dos Ecuaciones Diferenciales de Primer orden

Discretizando el tiempo de la forma $t=nT$, con n entero y T el paso de integración numérica, podemos aproximar las derivadas por el método de Euler de Primer orden, de la forma

$$\frac{d(x_1(t))}{dt} \approx \frac{x_1\left((n+1)T\right) - x_1(nT)}{T}$$

$$\frac{d(x_2(t))}{dt} \approx \frac{x_2\left((n+1)T\right) - x_2(nT)}{T}$$

por lo que el **equivalente discreto** del sistema de ecuaciones diferenciales (2) resulta:

$$\begin{cases} \dfrac{x_1\left((n+1)T\right) - x_1(nT)}{T} & \approx \quad x_2(nT) \\ \dfrac{x_2\left((n+1)T\right) - x_2(nT)}{T} & \approx \quad \dfrac{1}{M}\left(F(nT) - Kx_1(nT) - bx_2(nT)\right) \end{cases} \qquad (3)$$

Ecuaciones en Diferencias

El sistema de ecuaciones (3) puede escribirse como

$$\begin{cases} x_1\left(nT\right) & \approx & x_1((n-1)T)+Tx_2((n-1)T) \\ x_2(nT) & \approx & x_2((n-1)T)+\dfrac{T}{M}\Big(F((n-1)T)-Kx_1((n-1)T)-bx_2((n-1)T)\Big) \end{cases} \quad (4)$$

Conociendo la entrada $F(t)$ para todo t, y las condiciones iniciales de la posición y velocidad de la masa *M*, $x_1(0)$ y $x_2(0)$, pueden iterarse las ecuaciones (4) para obtener $x_1(t)$ y $x_2(t)$ para todo t de la forma $t=nT$.

El algoritmo está implementado en el script Matlab:

`mass_spring.m`

Elección del paso de integración numérica T

La ecuación característica asociada a la ecuación diferencial (1) que describe la dinámica del sistema es:

$$\lambda^2 + \frac{b}{M}\lambda + \frac{K}{M} = 0$$

que tiene dos raíces. Podemos tener diferentes casos respecto a la ubicación de las raíces. Veremos dos de los posibles

Caso 1: dos raíces reales negativas distintas λ_1, λ_2

La respuesta libre en este caso está caracterizada por los siguientes modos

$$e^{-\frac{t}{\left(1/|\lambda_1| \right)}}, e^{-\frac{t}{\left(1/|\lambda_2| \right)}}$$

Vemos entonces que para tener una buena aproximación de la derivada por el método de Euler se debe verificar que:

$$T \ll \min\left(1/|\lambda_1|,\ 1/|\lambda_2| \right)$$

Por otra parte, si queremos ver la respuesta completa, el tiempo final de integración deberá ser

$$T_{final} \approx 5\max\left(1/|\lambda_1|,\ 1/|\lambda_2| \right)$$

Caso 2: dos raíces complejas conjugadas con parte real negativa

$$\lambda_{1,2} = -\sigma \pm j\omega$$

La respuesta libre en este caso está caracterizada por los siguientes modos (oscilatorios amortiguados)

$$e^{-\sigma t}\cos(\omega t), e^{-\sigma t}\sin(\omega t)$$

Vemos entonces que para tener una buena aproximación de la derivada por el método de Euler se debe verificar que:

$$\boxed{T \ll \min\left(\frac{1}{\sigma}, \frac{2\pi}{\omega}\right)}$$

Por otra parte, si queremos ver la respuesta completa, el tiempo final de integración deberá ser

$$\boxed{T_{final} \approx \frac{5}{\sigma}}$$