Sistemas y Señales I

Ejemplo Criterio de Routh

Temario: **Cap. 3: Item 3.4.2**

Ejemplo: Consideremos el sistema representado en la Figura 1. El diagrama corresponde a una estrategia de **control por retroalimentación de salida**, que consiste en medir la salida, compararla con una referencia para la misma, y, en función del error, actuar sobre la planta o proceso, de manera de reducir ese error y de esa forma que la salida siga a la referencia.

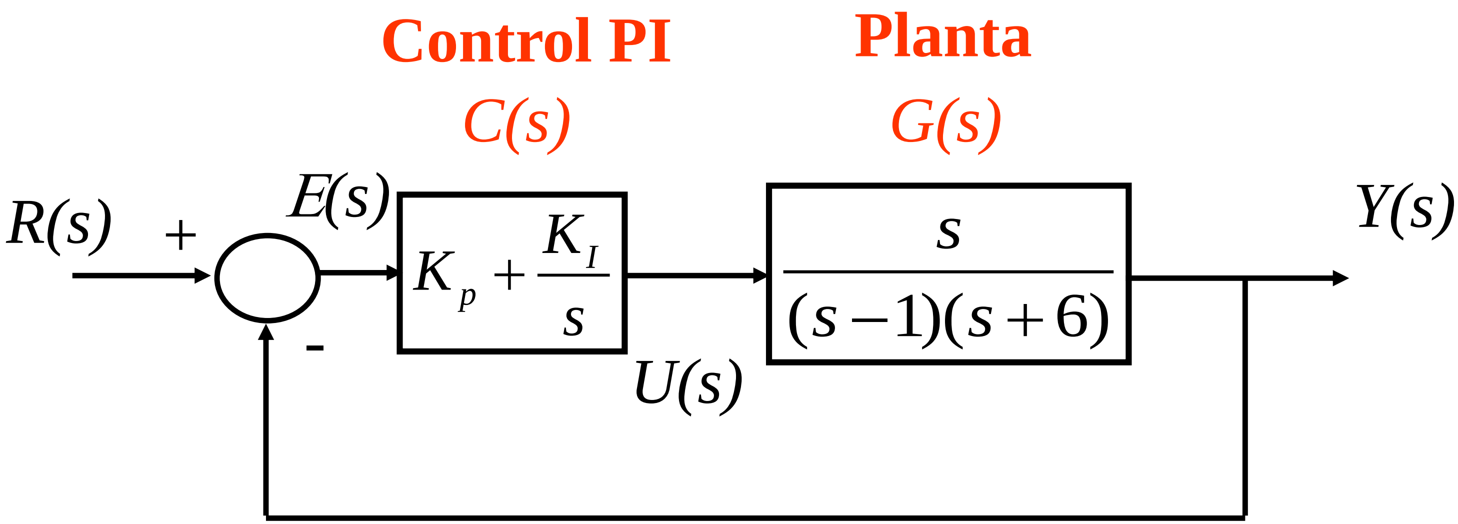


Figura 1: Esquema de Control por retroalimentación de salida, de tipo PI

En este caso, el controlador es un **Control PI**, que pertenece a la familia de **Controladores PID**, que tienen una estructura de la forma

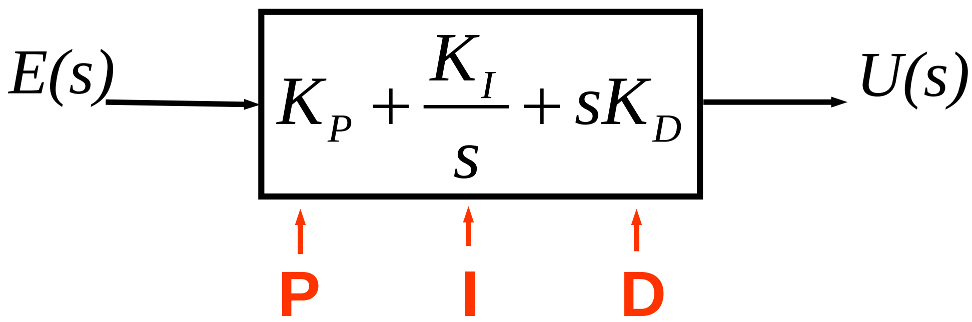


Figura 2: Control PID

Es decir, la señal de control $U(s)$ contiene tres términos aditivos: uno proporcional a la señal de error (**P**), otro proporcional a la integral del error (**I**) y otro proporcional a la derivada del error (**D**).

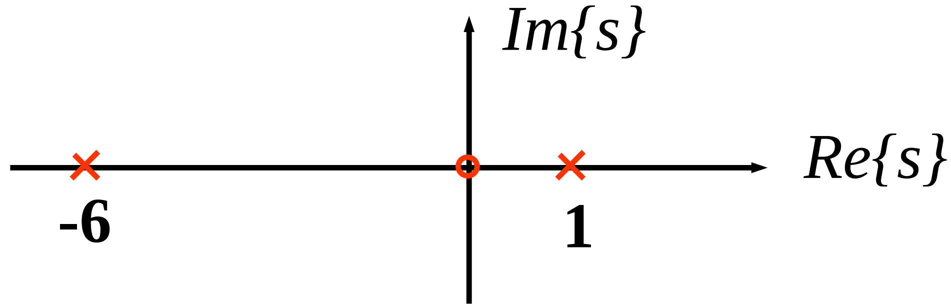
En el caso del ejemplo, el controlador no tiene el término derivativo (D).

El objetivo del ejemplo es determinar el rango de valores que pueden tomar los parámetros K_P y K_I del controlador de manera que el sistema en lazo cerrado sea BIBO estable.

Notar que la planta en lazo abierto es inestable. En efecto, su función transferencia es

$$G(s) = \frac{s}{(s-1)(s+6)}$$

que tiene polos en: $p_1 = 1$ (**inestable**) y $p_2 = -6$ y un cero en $c = 0$



Calculemos la función transferencia en lazo cerrado.

$$G_{LC}(s)=\frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)}=\frac{\dfrac{K_P s+K_I}{s}\,\dfrac{s}{s^2+5s-6}}{1+\dfrac{K_P s+K_I}{s}\,\dfrac{s}{s^2+5s-6}}$$

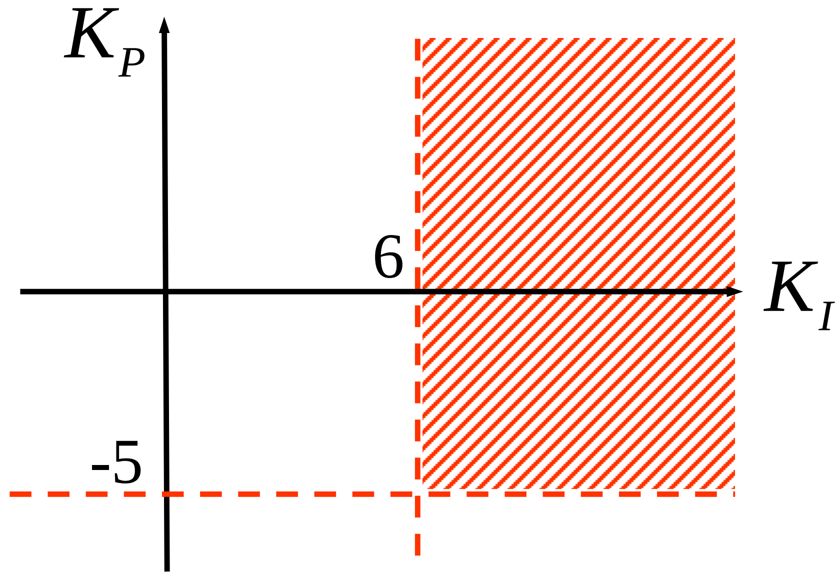
$$=\frac{K_P s+K_I}{s^2+5s-6+K_P s+K_I}$$

$$=\frac{K_P\left(s+\dfrac{K_I}{K_P}\right)}{s^2+\left(5+K_P\right)s+\left(K_I-6\right)} \qquad (1)$$

Vemos que la transferencia en lazo cerrado es de segundo orden por lo que la condición necesaria y suficiente para BIBO estabilidad es que el polinomio denominador este completo con todos los coeficientes del mismo signo, es decir:

$$K_P + 5 > 0 \Rightarrow K_P > -5$$
$$K_I - 6 > 0 \Rightarrow K_I > 6$$

(2)



Las mismas condiciones resultan si construímos la Tabla de Routh.

$$\begin{array}{lcc} s^2: & 1 & K_I - 6 \\ s^1: & K_P + 5 & 0 \\ s^0: & b_1 & 0 \end{array}$$

$$b_1 = \frac{(K_P + 5)(K_I - 6)}{(K_P + 5)} = K_I - 6$$

El sistema es BIBO estable si no hay cambios de signo en la primer columna de la tabla, es decir resultan las condiciones (2).

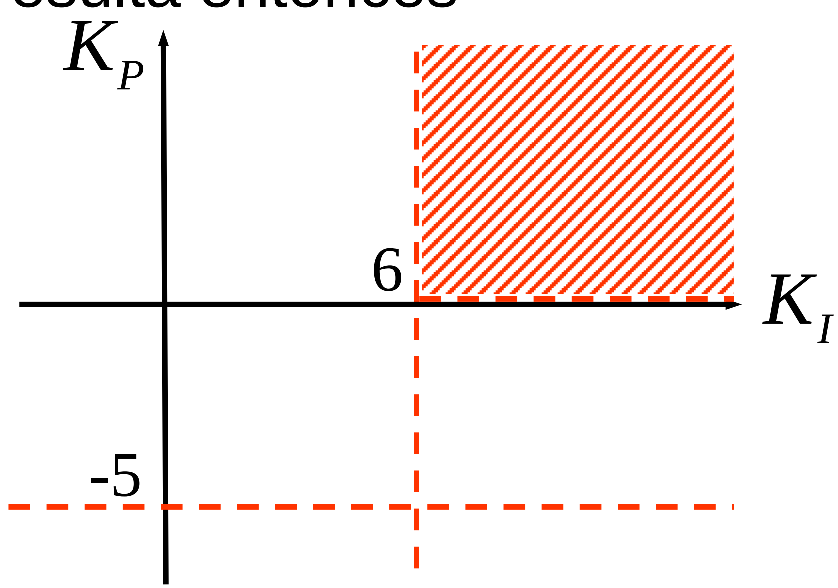
Notemos que en este caso el controlador tiene dos grados de libertad, ya que podemos variar los dos parámetros K_P y K_I . Como uno aparece en el coeficiente del término en s y el otro en el término independiente del polinomio denominador, podemos manipularlos (sintonizarlos), no sólo para lograr la BIBO estabilidad en lazo cerrado, sino también para ubicar los polos en lazo cerrado en las posiciones arbitrarias que se deseen. Es decir, podemos hacer que el sistema en lazo cerrado tenga la dinámica arbitraria que se desee.

$$G_{LC}(s) = \frac{K_P\left(s + \dfrac{K_I}{K_P}\right)}{s^2 + \left(5 + K_P\right)s + \left(K_I - 6\right)}$$

Impongamos ahora, además de la condición de estabilidad del sistema en lazo cerrado, la condición de **mínima fase.** Notemos de la expresión de la transferencia en lazo cerrado (1), que ésta tiene un cero en:

$$c_{LC} = -\frac{K_I}{K_p}$$

Para que el sistema sea mínima fase el cero debe estar en el semiplano izquierdo por lo que K_P y K_I deben ser del mismo signo. La región en el plano K_P - K_I para BIBO estabilidad y mínima fase resulta entonces



Notar que si se quieren fijar los polos del sistema en lazo cerrado manipulando los parámetros del controlador, se pierde control sobre la ubicación del cero de la transferencia en lazo cerrado.

Por ejemplo supongamos que se quieren tener polos del sistema en lazo cerrado en

$$p_{1LC} = -3 \quad , \quad p_{2LC} = -5$$

entonces

$$(s+3)(s+5) = s^2 + (5+K_P)s + (K_I - 6)$$

$$s^2 + 8s + 15 = s^2 + (5+K_P)s + (K_I - 6)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8 = 5 + K_P \\ 15 = K_I - 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_P = 3 \\ K_I = 21 \end{cases}$$

Mínima fase

El cero en lazo cerrado resulta entonces en: $c_{LC} = -\dfrac{K_I}{K_p} = -\dfrac{21}{3} = -7$