Sistemas y Señales I

Ecuaciones de Estado

Temario: Modelo en Ecuaciones de Estado de SLE en TC

Variables de Estado

Definición: Las **Variables de Estado** son variables internas del sistema, cuyo conocimiento para todo tiempo, junto con el conocimiento de las entradas, permite computar cualquier otra variable del sistema.

Definición: El mínimo número de variables de estado linealmente independientes, que permiten determinar cualquier otra variable del sistema es el denominado **orden del sistema**.

Ecuaciones de Estado

La dinámica de un sistema puede representarse en función de las variables de estado con una ecuación diferencial de primer orden, de la forma:

EE $$\boxed{x'(t) = F\left(x(t), u(t)\right)}$$

donde

$$x(t) = \left[x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)\right]^T$$

es el vector de estado de dimensión n (igual al orden del sistema), $u(t)$ es el vector de entrada, y $F(x,u)$ es una función, en general no lineal, del estado y la entrada.

Ecuación de Salida

La **Ecuación de Salida** es una ecuación algebraica donde las salidas del sistema se escriben en función de las variables de estado y las entradas. Es decir

ES

$$\boxed{y(t) = G\left(x(t), u(t)\right)}$$

Ejemplo

Consideremos el sistema masa-resorte representado en la Fig. 1

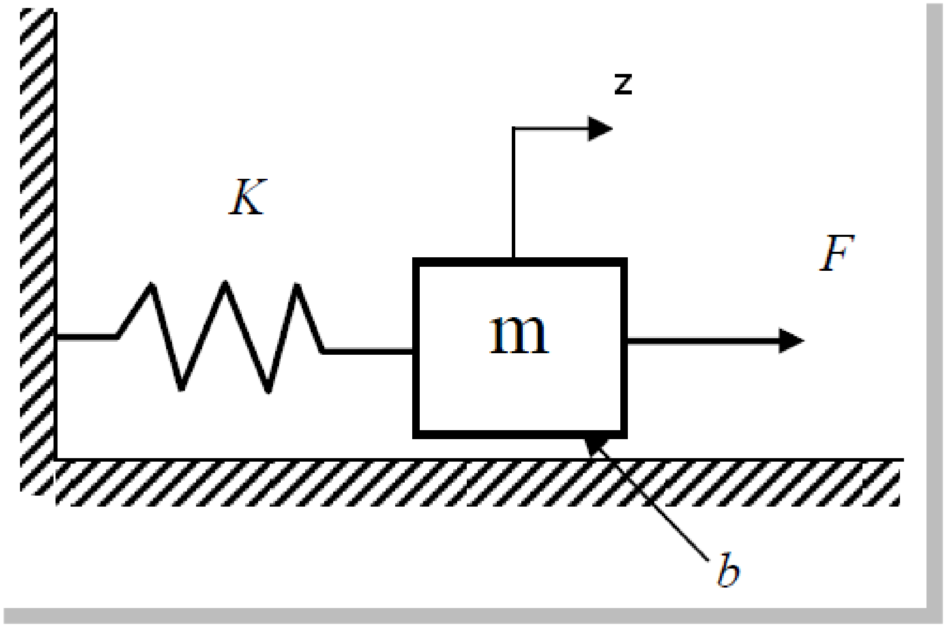

Figura 1: Sistema masa-resorte

La ecuación diferencial que describe la dinámica del sistema es:

$$m\ddot{z}(t) = F - kz(t) - b\dot{z}(t)$$

Donde se asumió que el resorte tiene una característica lineal y que el rozamiento es de tipo viscoso, es decir, la fuerza de roce es proporcional a la velocidad.

En este caso podemos definir como variables de estado la posición y la velocidad de la masa “m”, es decir:

$$x_1(t) = z(t)$$

$$x_2(t) = z'(t)$$

Las Ecuaciones de Estado resultan entonces:

EE

$$\begin{cases} x_1'(t) & = & x_2(t) \\ x_2'(t) & = & \dfrac{1}{m}F - \dfrac{k}{m}x_1(t) - \dfrac{b}{m}x_2(t) \end{cases}$$

En este caso (**sistema lineal**), las EE pueden escribirse en forma matricial

EE

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix}}_{X'(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}}_{X(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{F(t)}_{u(t)}$$

Es decir, son de la forma

EE

$$X'(t) = AX(t) + Bu(t)$$

donde: A es la **matriz de transición** $X(t)$ es el **vector de estado**

B es la **matriz de entrada** $u(t)$ es el **vector de entrada**

Suponiendo que nos interesan como salidas del sistema la posición de la masa “m” y la fuerza de rozamiento, la ecuación de salida resulta:

ES

$$\begin{cases} y_1(t) = x_1(t) \\ y_2(t) = b x_2(t) \end{cases}$$

que en este caso (**sistema lineal**) puede escribirse en forma matricial

ES

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}}_{Y(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}}_{X(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{F(t)}_{u(t)}$$

Es decir, la **Ecuación de Salida** es de la forma

ES $$Y(t) = CX(t) + Du(t)$$

donde: C es la **matriz de salida**

D es la **matriz de transferencia directa**

$Y(t)$ es el **vector de salida**

$X(t)$ es el **vector de estado**

$u(t)$ es el **vector de entrada**

Representación en Espacio de Estados de un Sistema Lineal Estacionario

Para un **sistema lineal estacionario** la representación en espacio de estados toma la forma

$$\boxed{\begin{cases} X'(t) = AX(t) + Bu(t) \\ Y(t) = CX(t) + Du(t) \end{cases}}$$

donde $\quad X \in \mathbb{R}^n \;,\; u \in \mathbb{R}^m \;,\; Y \in \mathbb{R}^p$

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n},\; B \in \mathbb{R}^{n\times m},\; C \in \mathbb{R}^{p\times n},\; D \in \mathbb{R}^{p\times m}$$

Es decir, el sistema queda representado por la cuadrupla

$$\boxed{(A, B, C, D)}$$

La representación en Espacio de Estados **no es única**. En efecto, basta con realizar un cambio de coordenadas en el espacio de estados, de la forma

$$\tilde{X}(t) = TX(t), \qquad T \;\; \text{matriz no singular}$$

para obtener una representación equivalente. Existen por lo tanto infinitas representaciones (realizaciones) en Espacio de Estados equivalentes. Hallemos la representación equivalente.

$$\tilde{X}'(t) = TX'(t) = TAX(t) + TBu(t)$$

$$= \underbrace{TAT^{-1}}_{\tilde{A}} \tilde{X}(t) + \underset{\tilde{B}}{TB}\, u(t)$$

$$
\begin{aligned}
Y(t) &= CX(t) + Du(t) \\
&= \underbrace{CT^{-1}}_{\tilde{C}}\, \tilde{X}(t) + \underbrace{D}_{\tilde{D}}\, u(t)
\end{aligned}
$$

La representación en espacio de estados equivalente está dada entonces por la cuadrupla:

$$\boxed{\left(TAT^{-1}, TB, CT^{-1}, D\right)}$$

<u>Definición:</u> Una realización en Espacio de Estado se dice **mínima**, si el vector de estados tiene la mínima dimensión posible.

Relación entre la representación en Espacio de Estados y la representación con Función Transferencia de un Sistema Lineal Estacionario

Sea un sistema LE representado por su EE y ES:

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) + Bu(t) \\ Y(t) = CX(t) + Du(t) \end{cases}$$

Transformando Laplace resulta:

$$\begin{cases} sX(s) = AX(s) + BU(s) & (1) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) & (2) \end{cases}$$

De la ecuación (1) resulta

$$\begin{aligned}&(sI-A)X(s)=BU(s)\\&\Rightarrow X(s)=(sI-A)^{-1}BU(s)\end{aligned}\qquad(3)$$

Reemplazando (3) en (2) resulta

$$\begin{aligned}&Y(s)=C(sI-A)^{-1}BU(s)+DU(s)\\&\Rightarrow Y(s)=\left[C(sI-A)^{-1}B+D\right]U(s)\end{aligned}\qquad(4)$$

donde

$$H(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$$

Matriz Transferencia

Ejemplo: Consideremos un sistema de 2do. orden representado por su Función Transferencia de la forma

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{Y(s)}{U(s)} \qquad (5)$$

de donde puede obtenerse la Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) que describe el comportamiento dinámico del sistema

$$y''(t) + 2\xi\omega_n y'(t) + \omega_n^2 y(t) = \omega_n^2 u(t) \qquad (6)$$

Definiendo como variables de estado:

$$\begin{cases} x_1(t) = y(t) \\ x_2(t) = y'(t) \end{cases}$$

las Ecuaciones de Estado resultan

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = -\omega_n^2 x_1(t) - 2\xi\omega_n x_2(t) + \omega_n^2 u(t) \end{cases}$$

Que pueden escribirse en forma matricial como

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix}}_{X'(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\xi\omega_n \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}}_{X(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \omega_n^2 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{u(t)}_{u(t)} \qquad (7)$$

Calculemos los autovalores de la matriz A. Debemos hallar las raíces de la ecuación característica

$$\boxed{\det(\lambda I - A) = 0} \qquad (8)$$

Es decir:

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\xi\omega_n \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ \omega_n^2 & \lambda + 2\xi\omega_n \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\lambda(\lambda + 2\xi\omega_n) + \omega_n^2 = 0$$

$$\lambda^2 + 2\xi\omega_n\lambda + \omega_n^2 = 0 \qquad (9)$$

Puede verse que las raíces de la ec. (9) (es decir, los **autovalores de la matriz A**) coinciden con la raíces del polinomio denominador de la Función Transferencia del sistema en ec. (5) (es decir, los **polos de la FT**).

autovalores de A = polos de G(s)

Esto se da siempre que la realización en espacio de estado sea mínima, por lo que no existiría cancelación de polos y ceros en la FT. En general se verifica:

autovalores de A $\supseteq$ polos de G(s)