

Sistemas y Señales I

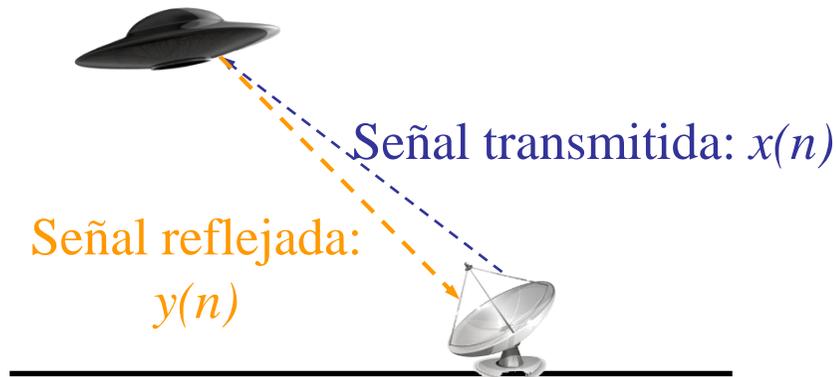
Correlación de Señales en TD

Temario: Cap. 2: Item 2.4

• Correlación de señales en TD

- La correlación de dos señales mide el grado de similitud de las mismas.
- Aplicaciones en radar, sonar, comunicaciones digitales, reconocimiento de voz, etc.

Ejemplo: radar



$$y(n) = \alpha x(n-D) + W(n)$$

α : factor de atenuación

$W(n)$: ruido aditivo

D : retardo transmisión/recepción

Problema de radar: determinar si existe un blanco, y si existe determinar el retardo D que permite determinar la distancia al blanco.

- Si la componente de ruido es muy grande, la simple inspección de $y(n)$ no permitirá determinar si existe un blanco.

La correlación permitirá extraer esta información de $y(n)$.

• Secuencia de auto-correlación y correlación cruzada

Supongamos dos señales $x(n)$ e $y(n)$ de energía finita. La **secuencia de correlación cruzada** de las dos señales se define como:

$$r_{xy}(\ell) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n-\ell) \quad \ell=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

o equivalentemente

$$r_{xy}(\ell) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n+\ell)y(n) \quad \ell=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

- El orden de los subíndices en $r_{xy}(\ell)$ indica la dirección en que la primer señal es desplazada con respecto a la otra.

Similarmente se definen

$$r_{yx}(\ell) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)x(n-\ell) \quad \ell=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

o equivalentemente

$$r_{yx}(\ell) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n+\ell)x(n) \quad \ell=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

- Es fácil verificar que

$$r_{xy}(\ell) = r_{yx}(-\ell)$$

por lo que $r_{xy}(\ell)$ provee exactamente la misma información que $r_{yx}(\ell)$.

- Puede probarse que:

$$r_{xy}(\ell) = x(\ell) * y(-\ell)$$

- En el caso especial de $x(n) = y(n)$, se tiene la **secuencia de autocorrelación** de $x(n)$.

$$r_{xx}(\ell) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x(n-\ell)$$

o equivalentemente

$$r_{xx}(\ell) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n+\ell)x(n)$$

- Si $x(n)$ e $y(n)$ son señales de duración finita N , resulta

$$r_{xy}(\ell) = \sum_{n=i}^{N-|k|-1} x(n)y(n-\ell) \quad r_{xx}(\ell) = \sum_{n=i}^{N-|k|-1} x(n)x(n-\ell)$$

donde $i = \ell, k = 0$ para $\ell \geq 0$

$i = 0, k = \ell$ para $\ell < 0$

- Correlación de señales de potencia

- Para señales de potencia $x(n)$ e $y(n)$ la **correlación cruzada** se define

$$r_{xy}(\ell) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^M x(n)y(n-\ell) \quad (1)$$

- Si $x(n) = y(n)$ resulta la **autocorrelación** de la señal de potencia

$$r_{xx}(\ell) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^M x(n)x(n-\ell) \quad (2)$$

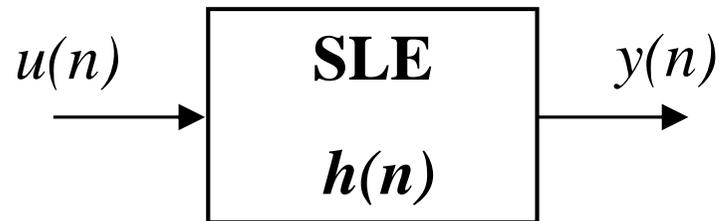
- En particular, si $x(n)$ e $y(n)$ son **señales periódicas** con período N , las relaciones (1) y (2) pueden computarse en un período.

$$r_{xy}(\ell) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)y(n-\ell)$$

$$r_{xx}(\ell) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)x(n-\ell)$$

- Es fácil ver que en este caso $r_{xy}(\ell)$ y $r_{xx}(\ell)$ resultan secuencias periódicas de período N .

- Secuencias de correlación Entrada/Salida



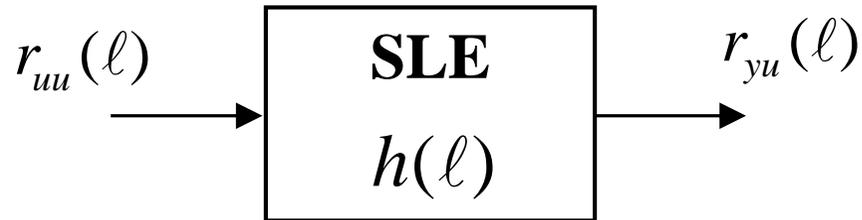
La respuesta a una entrada arbitraria $u(n)$ es

$$\begin{aligned} y(n) &= h(n) * u(n) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)u(n-k) \end{aligned}$$

La correlación entre la entrada y la salida es:

$$\begin{aligned} r_{yu}(\ell) &= y(\ell) * u(-\ell) \\ &= h(\ell) * u(\ell) * u(-\ell) = h(\ell) * r_{uu}(\ell) \end{aligned}$$

$$r_{yu}(\ell) = h(\ell) * r_{uu}(\ell) \quad (3)$$



- La relación (3) se puede emplear para la estimación de un número finito de términos de la respuesta al impulso $\{h(n)\}$ a partir del cómputo de las secuencias de correlación entrada salida $r_{yu}(\ell)$ y de la autocorrelación de la entrada $r_{uu}(\ell)$.

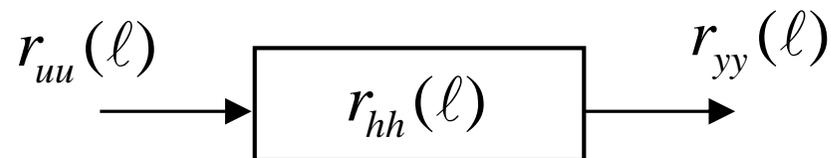
(resolver este problema de estimación)

- La autocorrelación de la salida resulta

$$\begin{aligned} r_{yy}(\ell) &= y(\ell) * y(-\ell) \\ &= [h(\ell) * u(\ell)] * [h(-\ell) * u(-\ell)] \\ &= [h(\ell) * h(-\ell)] * [u(\ell) * u(-\ell)] \\ &= r_{hh}(\ell) * r_{uu}(\ell) \end{aligned}$$

$$r_{yy}(\ell) = r_{hh}(\ell) * r_{uu}(\ell)$$

Nota: $r_{hh}(\ell)$ existe si el sistema es estable



Propiedades de la Autocorrelación

- Simetría

$$r_{xx}(\ell) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n+\ell)x(n)$$

Cambio de variable \longrightarrow $m = n + \ell$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)x(m-\ell) = r_{xx}(-\ell)$$

Simetría par

- Autocorrelación y Energía de la señal

Calculemos la autocorrelación para $\ell = 0$

$$r_{xx}(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n+0)x(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)^2 = E_x$$

Energía de la señal

- Autocorrelación de una señal periódica

Sea $x(n)$ una señal periódica con periodo N , es decir se verifica que

$$x(n) = x(n + N)$$

Luego, la autocorrelación resulta

$$r_{xx}(\ell + N) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n + N + \ell)x(n)$$

ya que

$$x(n + N + \ell) = x(n + \ell) \longrightarrow = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n + \ell)x(n) = r_{xx}(\ell)$$

Es decir, es periódica con periodo N .