

Sistemas y Señales I

Transparencias:
Análisis Frecuencial de Señales
usando ventanas

Autor: Dr. Juan Carlos Gómez

Análisis Frecuencial de Señales usando ventanas

Desde el punto de vista de implementación computacional, la Transformada de Fourier en Tiempo Discreto (DTFT), definida como:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \quad (1)$$

presenta dos problemas. El primero es el hecho de que se tiene una suma de infinitos términos (no es implementable), y el segundo es que en el intervalo fundamental de frecuencias $-\pi \leq \omega < \pi$ hay infinitas frecuencias por lo que no puede computarse la transformada para todas las frecuencias.

Como consecuencia de la primera observación, cuando se tienen señales de longitud infinita, el espectro de la señal sólo puede **aproximarse** por el de una señal de longitud finita $\tilde{x}(n)$ que se obtiene multiplicando a la señal de longitud infinita $x(n)$ por una ventana $w(n)$ de longitud finita L . Es decir:

$$\tilde{x}(n) = x(n)w(n)$$

$$\Rightarrow X(\omega) \approx \tilde{X}(\omega) = \sum_{n=0}^{L-1} \tilde{x}(n)e^{-j\omega n} \quad (2)$$

El problema de las infinitas frecuencias es fácil de resolver ya que puede computarse (2) en un número finito N de frecuencias equi-espaciadas de la forma

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3)$$

Si la señal a analizar es una señal analógica, la misma se pasa usualmente a través de un **filtro antialiasing**, y luego se muestrea con una frecuencia $F_s \geq 2B$, donde B es el ancho de banda de la señal filtrada.

La máxima frecuencia en la señal muestreada es $F_s/2$.

Luego, por las razones de implementación práctica mencionadas, se limita la duración de la señal a un intervalo de tiempo $T_0 = LT$, donde L es el número de muestras y $T = 1/F_s$ es el período de muestreo.

Veremos que la longitud finita de la ventana usada para truncar la señal pone un límite en la **resolución en frecuencia**, es decir en la capacidad de distinguir entre dos componentes de frecuencia que están separadas menos de $1/T_0 = 1/(L.T)$ en frecuencia.

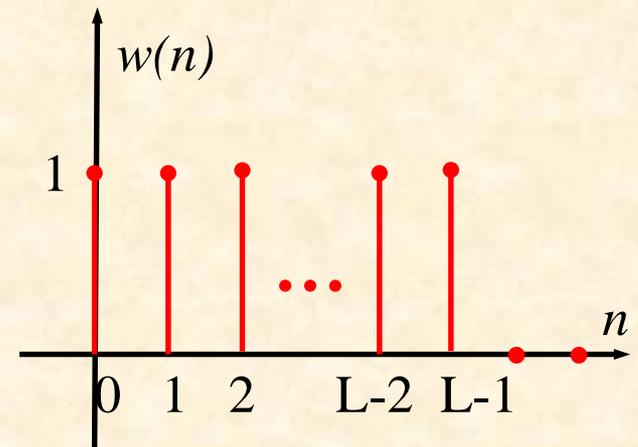
Sea $x(n)$ la señal a analizar.

Limitar la duración de la señal a L muestras en el intervalo $0 \leq n \leq L-1$ es equivalente a multiplicar a $x(n)$ por una función ventana rectangular $w(n)$ de longitud L , es decir:

$$\tilde{x}(n) = x(n) \cdot w(n)$$

$$\text{donde } w(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0 & \text{c.o.c.} \end{cases}$$

(4)



El espectro de la señal $x(n)$ estará entonces relacionado con el espectro de $\tilde{x}(n)$ a través de la convolución (periódica)

$$\tilde{X}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\lambda) W(\omega - \lambda) d\lambda \quad (5)$$

Es claro entonces que la forma del espectro de la ventana $W(\omega)$ afectará al espectro $\tilde{X}(\omega)$ con el cuál se quiere aproximar a $X(\omega)$.

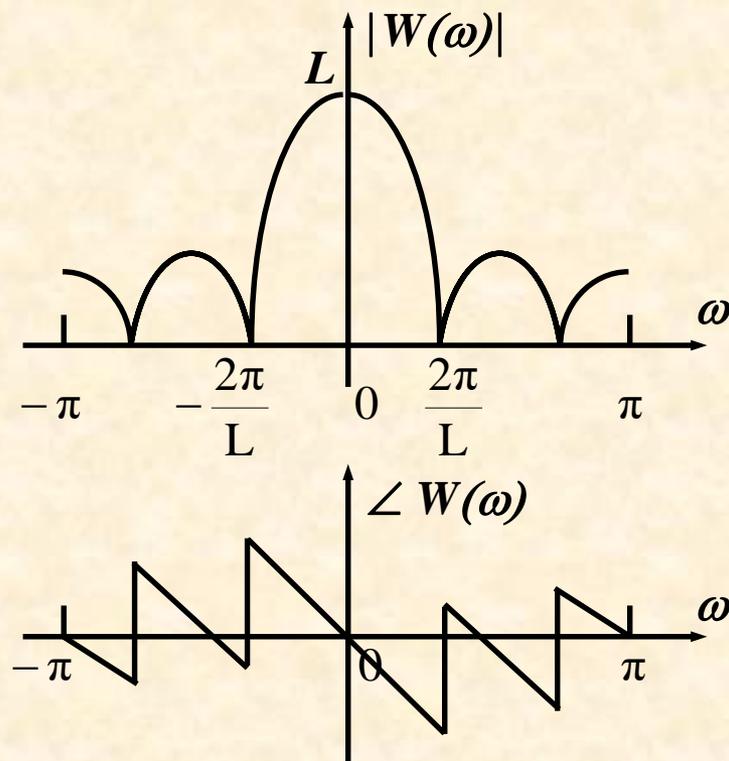
Para comprender mejor esto analicemos en primera instancia el caso de la ventana rectangular. Como ya vimos:

$$W(\omega) = e^{-j\omega(L-1)/2} \frac{\text{sen}(\omega L / 2)}{\text{sen}(\omega / 2)} \quad (6)$$

Por lo que:

$$|W(\omega)| = \begin{cases} L & \omega = 0 \\ \left| \frac{\text{sen}(\omega L / 2)}{\text{sen}(\omega / 2)} \right| & \text{c.o.c.} \end{cases}$$

$$\angle W(\omega) = -\frac{\omega}{2}(L-1) + \angle \frac{\text{sen}(\omega L / 2)}{\text{sen}(\omega / 2)}$$



De la convolución anterior (5) vemos que para tener:

$$\tilde{X}(\omega) = X(\omega)$$

deberá ser $W(\omega) = 2\pi\delta(\omega)$ para lo cuál $L = \infty$, o sea

$$\tilde{x}(n) = x(n)$$

En efecto, calculemos el espectro de una ventana rectangular de longitud infinita, es decir:

$$w(n) = 1 \quad , \quad \forall n$$

Podemos ver que la señal es periódica con período $N=1$. Los coeficientes de su serie de Fourier en TD vienen dados por:

$$c_\ell = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} w(n) e^{-j2\pi\ell n/N} \quad \text{con} \quad \ell = 0, 1, \dots, N-1$$

Que en este caso resulta en un único coeficiente

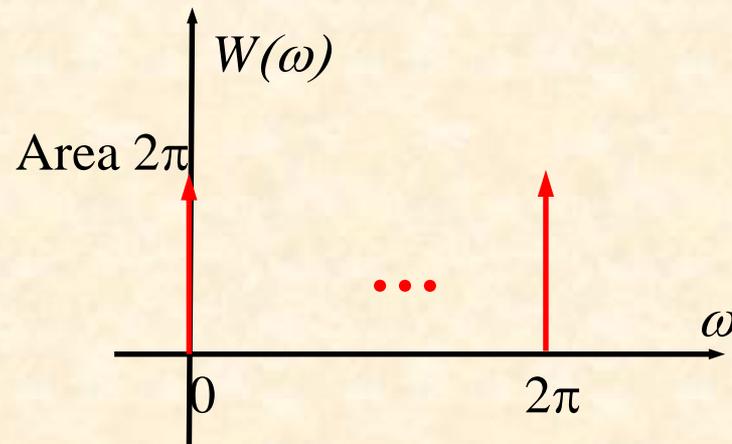
$$c_0 = \sum_{n=0}^0 w(n) e^{-j2\pi 0 n} = 1$$

Recordemos que la Transformada de Fourier en TD de una señal periódica viene dada por

$$W(\omega) = 2\pi \sum_{k=0}^{N-1} c_k \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N} - 2\pi\ell\right)$$

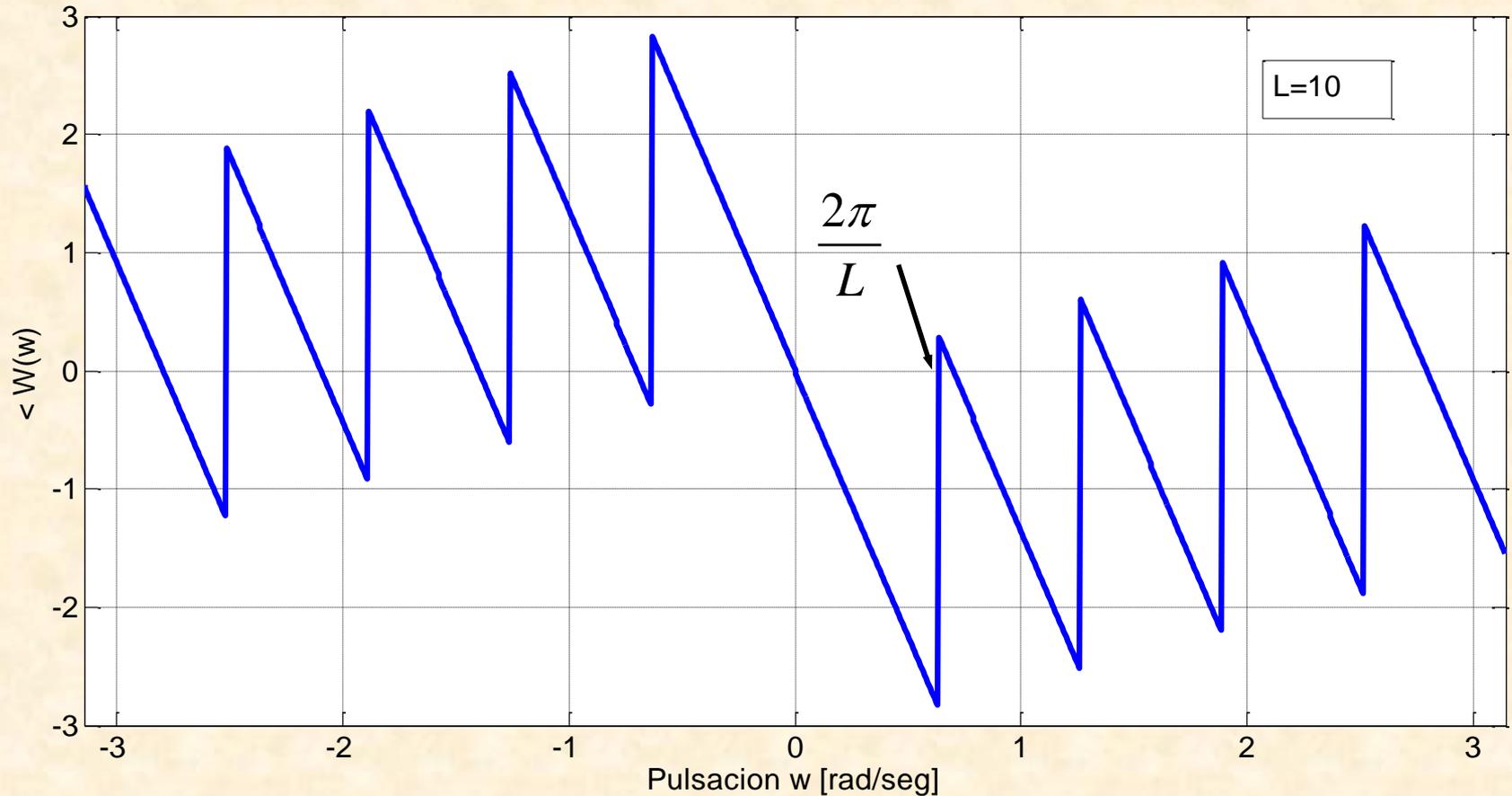
Para el caso de ejemplo resulta entonces

$$W(\omega) = 2\pi \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi\ell)$$





Espectro de módulo de la ventana rectangular ($L=10$)



Espectro de fase de la ventana rectangular ($L=10$)

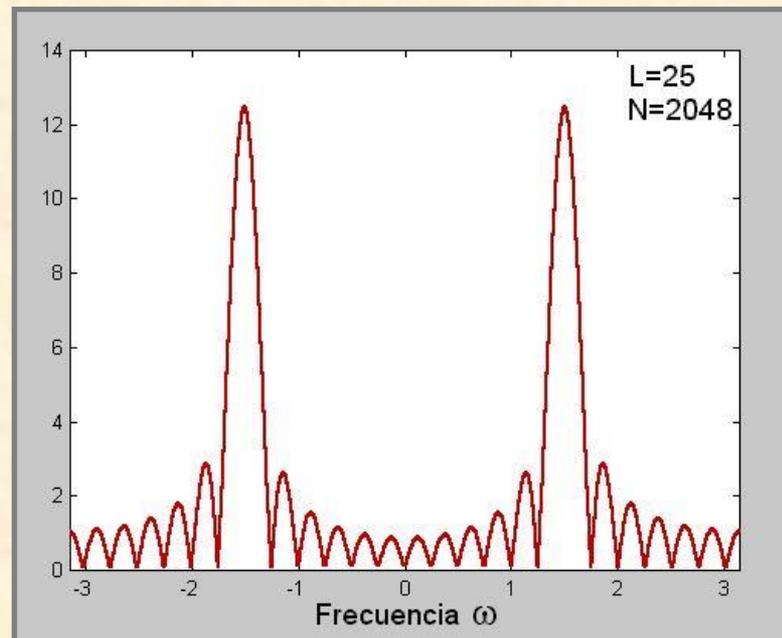
El hecho de que $W(\omega)$ no sea $\delta(\omega)$ trae varios problemas.
Consideremos una secuencia $x(n)$ que consiste de una sola senoide:

$$x(n) = \cos \omega_0 \cdot n$$

El espectro de la señal de duración finita $\tilde{x}(n)$ viene dado por (Teorema de Modulación):

$$\tilde{X}(\omega) = \frac{1}{2} [W(\omega - \omega_0) + W(\omega + \omega_0)]$$

$$|\tilde{X}(\omega)|$$



Como se ve en la figura anterior el espectro de $\tilde{X}(\omega)$ no está localizado en una única frecuencia, sino que está distribuido en todo el rango de frecuencias.

Este fenómeno (debido a la ventana) se denomina *leakage*

El ancho del lóbulo principal en el espectro de la ventana determina la resolución en frecuencia.

Para ver esto, consideremos una señal con dos componentes de frecuencia

$$x(n) = \cos \omega_1 \cdot n + \cos \omega_2 \cdot n$$

El espectro de la señal truncada a L muestras en el rango

$0 \leq n \leq L-1$ es:

$$\tilde{X}(\omega) = \frac{1}{2} [W(\omega - \omega_1) + W(\omega + \omega_1) + W(\omega - \omega_2) + W(\omega + \omega_2)]$$

Como el espectro de $W(\omega)$ tiene el primer cruce por cero en:

$$\omega = 2\pi / L$$

Entonces si $|\omega_1 - \omega_2| < 4\pi/L$, las dos funciones $W(\omega - \omega_1)$ y $W(\omega - \omega_2)$ se superponen y en consecuencia las dos líneas espectrales de $x(n)$ no se distinguen.

Sólo si $|\omega_1 - \omega_2| \geq 4\pi/L$ (donde $4\pi/L$ es el ancho del lóbulo principal del espectro de la ventana rectangular) se verán dos lóbulos separados en el espectro $\tilde{X}(\omega)$.

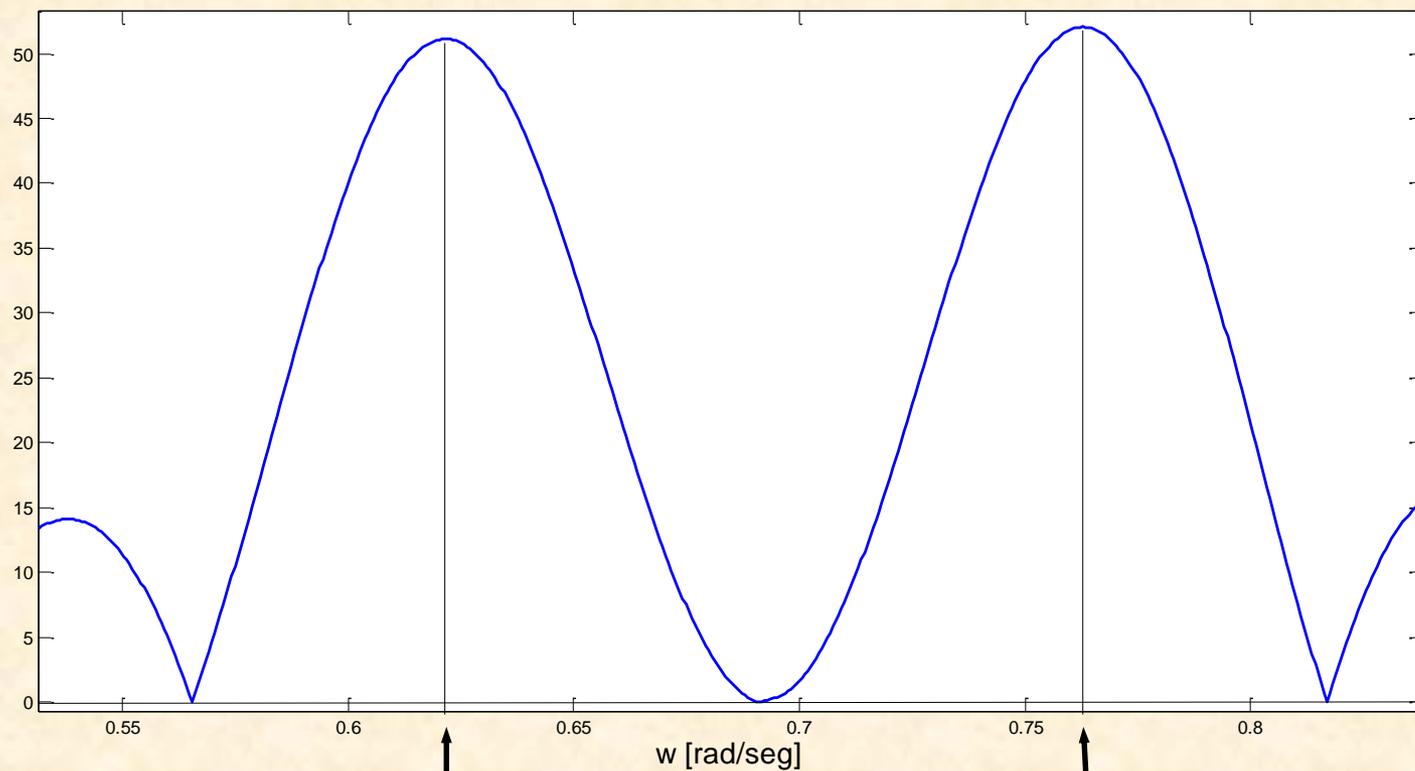
Es decir, **la capacidad para distinguir líneas espectrales de diferente frecuencia está limitada por el ancho del lóbulo principal de la ventana.**

Por ejemplo, sea $x(n) = \cos(0.2\pi n) + \cos(0.24\pi n)$

Luego

$$|\omega_2 - \omega_1| = 0.04\pi = \frac{4\pi}{L} \Rightarrow L = 100$$

y el espectro de $\tilde{x}(n) = x(n)w(n)$ resulta

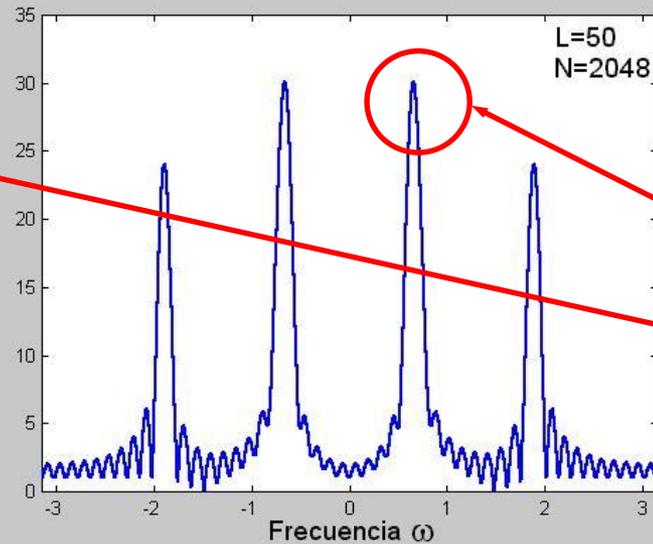
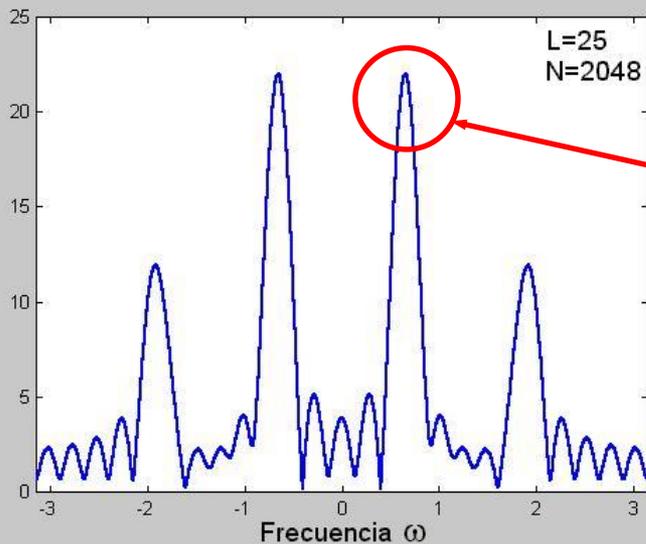


Consideremos ahora el ejemplo de una señal con tres componentes senoidales, dos de ellas con frecuencias muy próximas.

$$x(n) = \cos(0.2\pi.n) + \cos(0.22\pi.n) + \cos(0.6\pi.n)$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \omega_1 = 0.2\pi & \omega_2 = 0.22\pi & \omega_3 = 0.6\pi \end{array}$$

El Espectro de Módulo usando ventana rectangular, para $L = 25$, y $L = 50$ resulta:

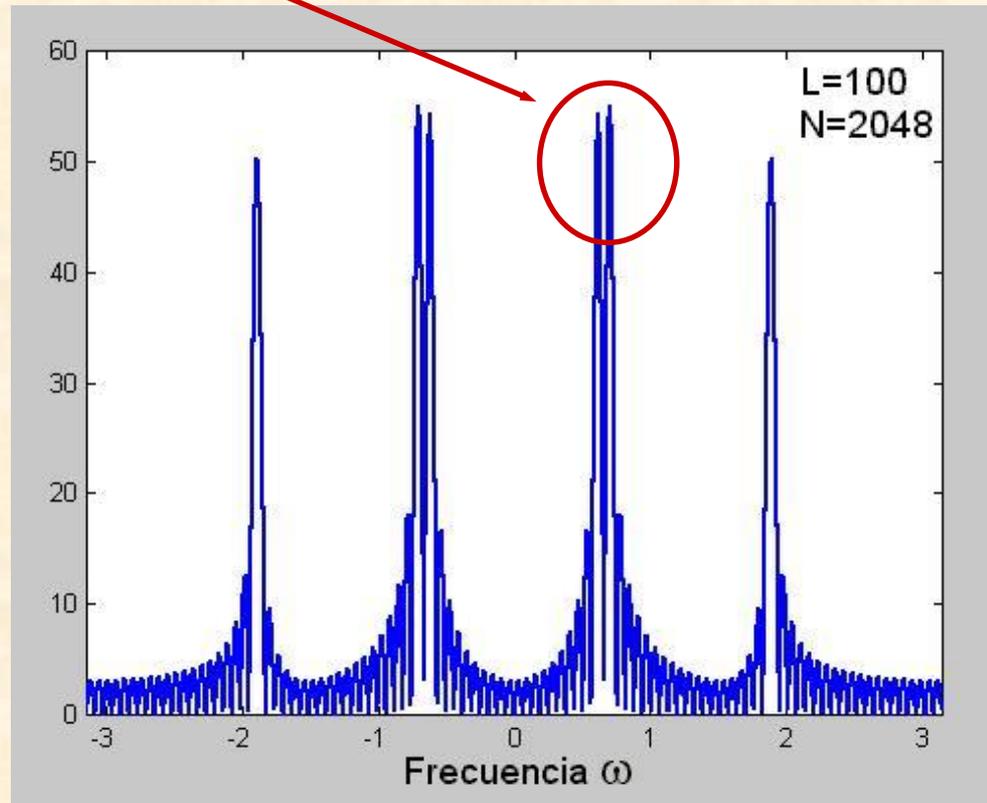


No se distinguen
 ω_1 y ω_2

De donde puede observarse que no se distinguen las líneas espectrales correspondientes a las frecuencias próximas ω_1 y ω_2

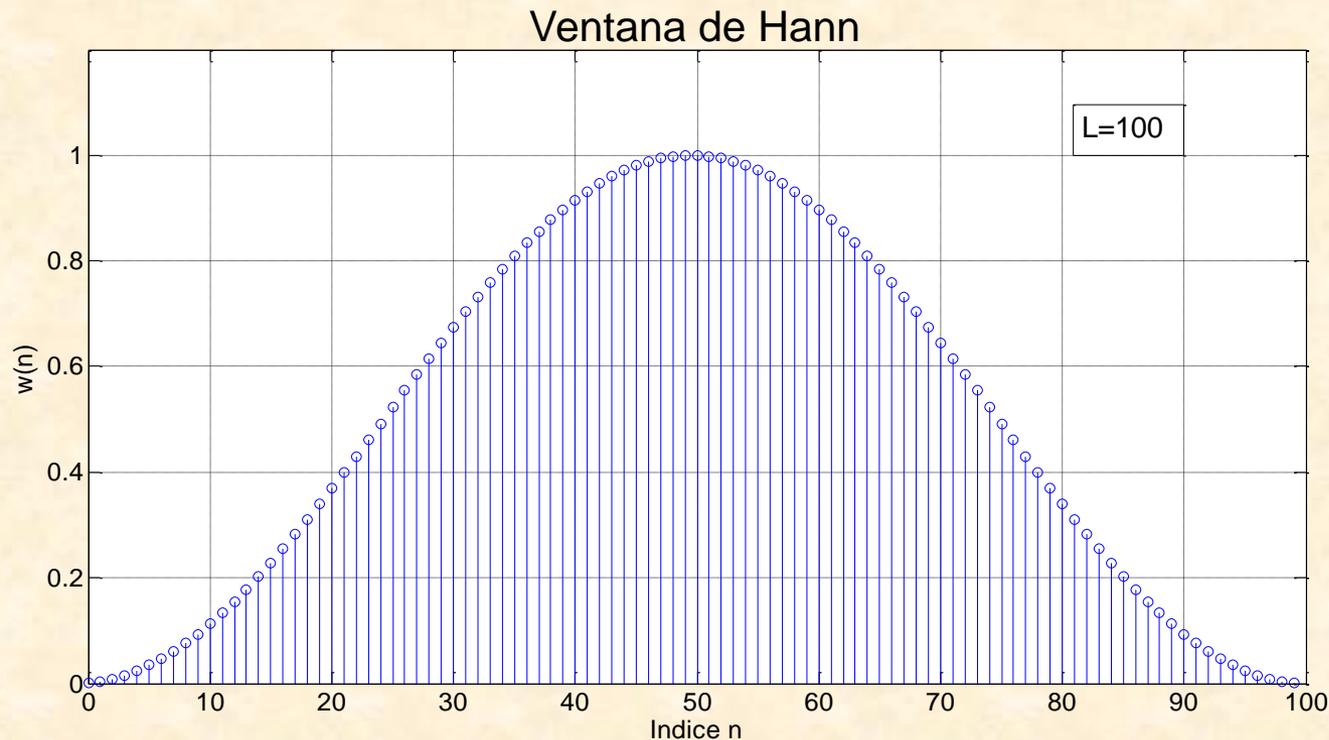
ω_1 y ω_2

Si consideramos en cambio $L = 100$, las líneas espectrales son distinguibles.

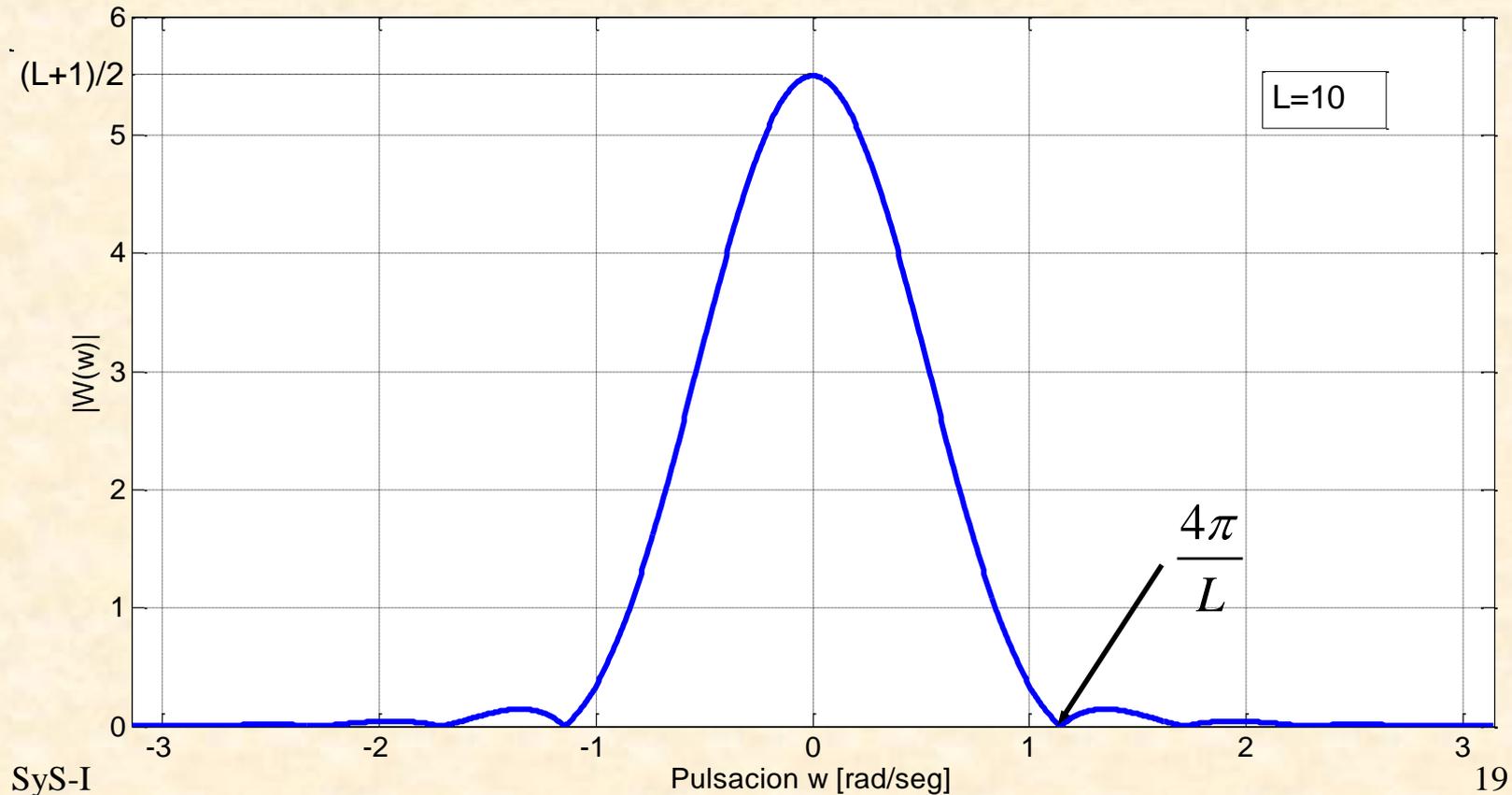


Para solucionar el problema del *leakage* se propone utilizar una ventana que tenga un espectro que se asemeje en mayor medida al impulso. Por ejemplo si consideramos la **ventana de Hann (hanning)**:

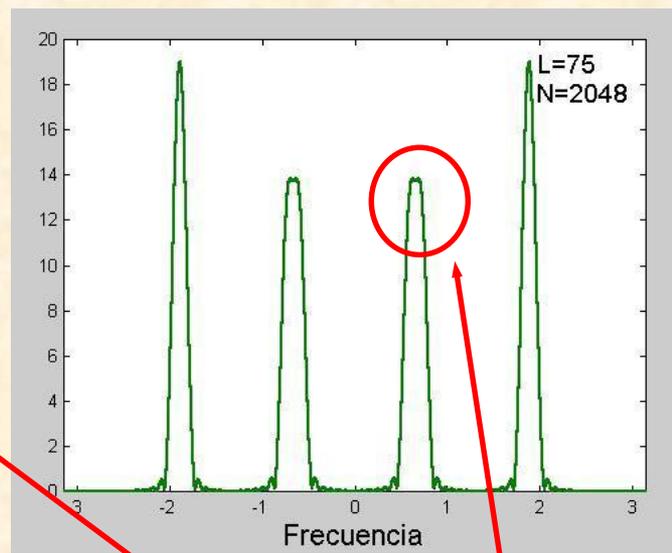
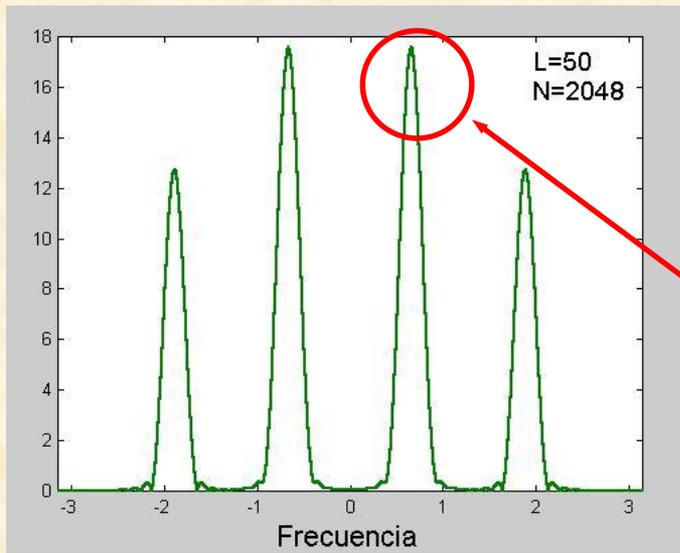
$$w(n) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi n}{L} \right) \right) & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0 & \text{c.o.c.} \end{cases}$$



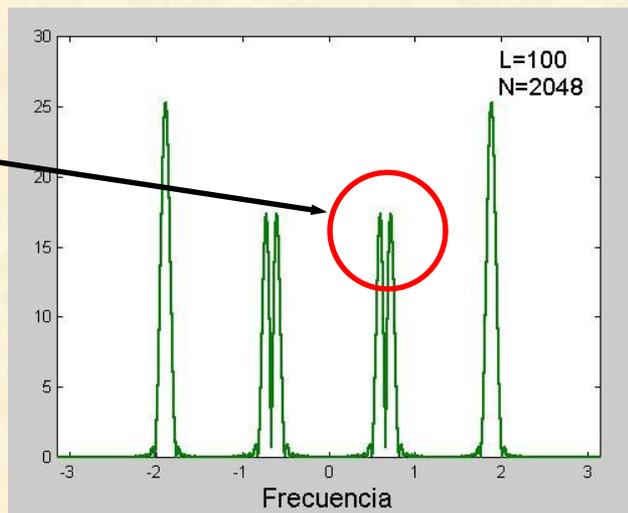
- El espectro de módulo tiene las siguientes características:
- Lóbulos laterales significativamente más pequeños que la ventana rectangular (menor leakage)
 - Lóbulo principal aproximadamente 2 veces más ancho que la ventana rectangular (peor resolución)



Considerando el ejemplo con las tres componentes senoidales, pero usando una ventana Hann con los mismos valores de L , los espectros resultan:



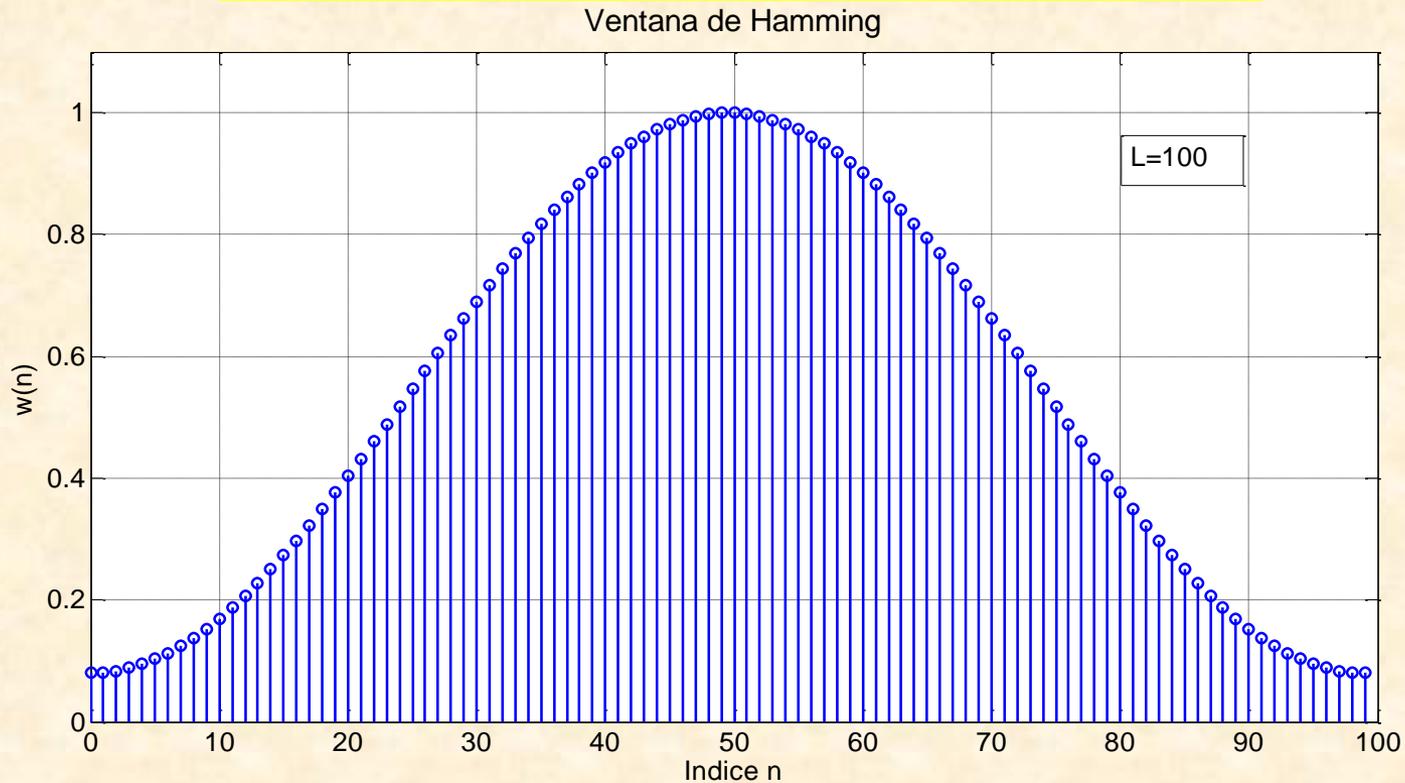
Pueden distinguirse
 ω_1 y ω_2



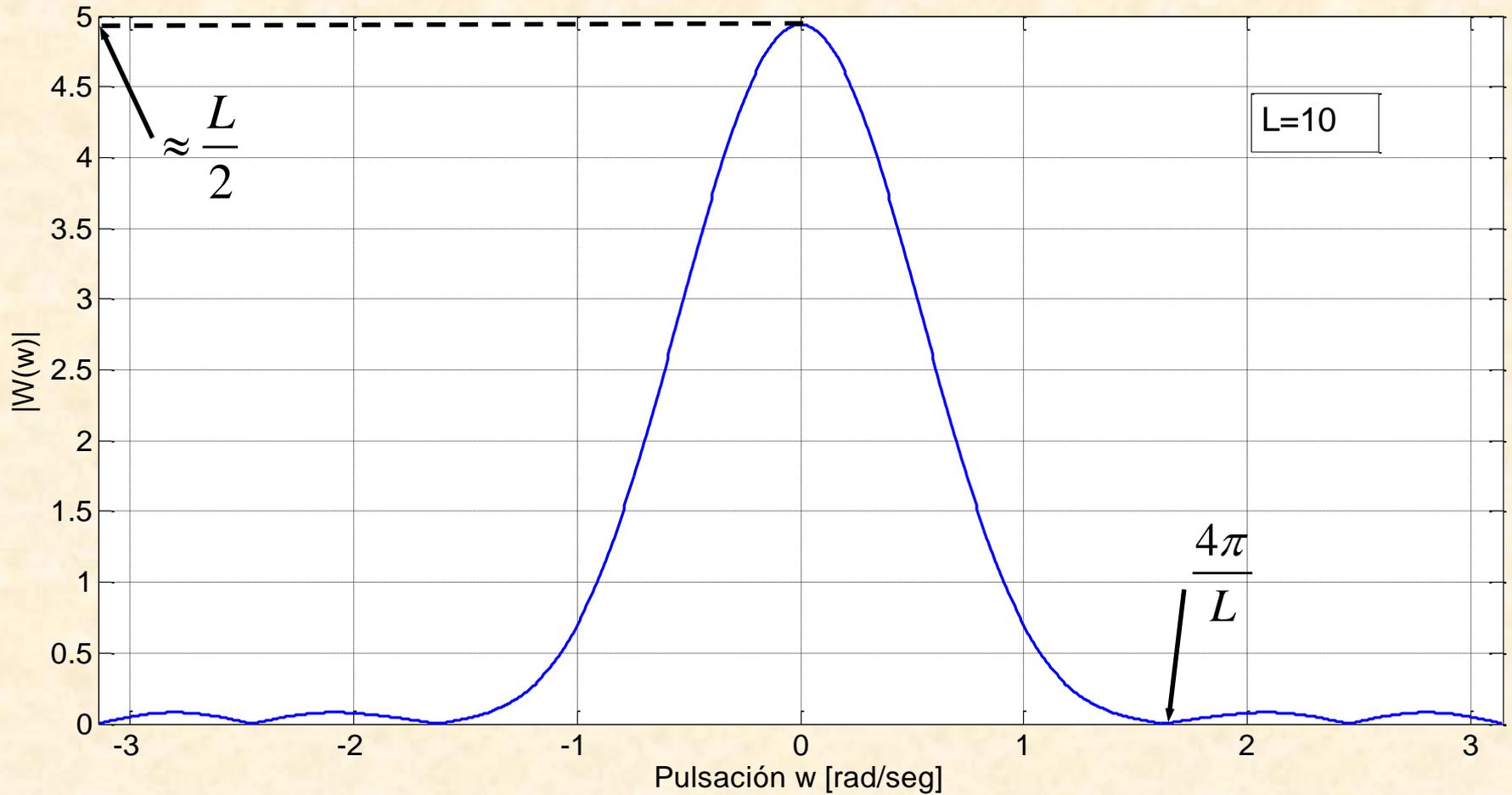
No se distinguen
 ω_1 y ω_2

Otra ventana, con un espectro similar al de la ventana de Hann es la **ventana de Hamming** (**hamming**), que se muestra a continuación:

$$w(n) = \begin{cases} 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{L}\right) & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0 & \text{c.o.c.} \end{cases}$$



El espectro de una ventana de Hamming con $L = 10$ se muestra a continuación.



Cómputo de la Transformada de Fourier en Tiempo Discreto para señales de longitud finita

Sea $x(n)$ una señal causal de longitud finita L . Su DTFT viene dada por:

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{L-1} x(n)e^{-j\omega n} \quad (7)$$

Para solucionar el problema de que existen infinitas frecuencias en el intervalo fundamental $-\pi \leq \omega < \pi$, calcularemos (7) en un número finito N de frecuencias equi-espaciadas de la forma

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (8)$$

En forma matricial, resulta:

$$\begin{bmatrix} X(\omega_0) \\ X(\omega_1) \\ \vdots \\ X(\omega_{N-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-j\frac{2\pi \times 0 \times 0}{N}} & e^{-j\frac{2\pi \times 0 \times 1}{N}} & \dots & e^{-j\frac{2\pi \times 0 \times (L-1)}{N}} \\ e^{-j\frac{2\pi \times 1 \times 0}{N}} & e^{-j\frac{2\pi \times 1 \times 1}{N}} & \dots & e^{-j\frac{2\pi \times 1 \times (L-1)}{N}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e^{-j\frac{2\pi \times (N-1) \times 0}{N}} & e^{-j\frac{2\pi \times (N-1) \times 1}{N}} & \dots & e^{-j\frac{2\pi \times (N-1) \times (L-1)}{N}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(L-1) \end{bmatrix} \quad (10)$$

que es muy simple de implementar en un algoritmo en, por ejemplo, **Matlab**.

Implementación de la DTFT en Matlab

Consideremos la ecuación (10)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} X(\omega_0) \\ X(\omega_1) \\ \vdots \\ X(\omega_{N-1}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} e^{-j\frac{2\pi \times 0 \times 0}{N}} & e^{-j\frac{2\pi \times 0 \times 1}{N}} & \dots & e^{-j\frac{2\pi \times 0 \times (L-1)}{N}} \\ e^{-j\frac{2\pi \times 1 \times 0}{N}} & e^{-j\frac{2\pi \times 1 \times 1}{N}} & \dots & e^{-j\frac{2\pi \times 1 \times (L-1)}{N}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e^{-j\frac{2\pi \times (N-1) \times 0}{N}} & e^{-j\frac{2\pi \times (N-1) \times 1}{N}} & \dots & e^{-j\frac{2\pi \times (N-1) \times (L-1)}{N}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{E}_{kn}} \underbrace{\begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(L-1) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}}$$

Escribiremos una *function* de Matlab, con argumentos de entrada la señal, como vector columna x , y el número de frecuencias N , y como argumentos de salida el vector columna X con las transformadas y las pulsaciones ω .

```

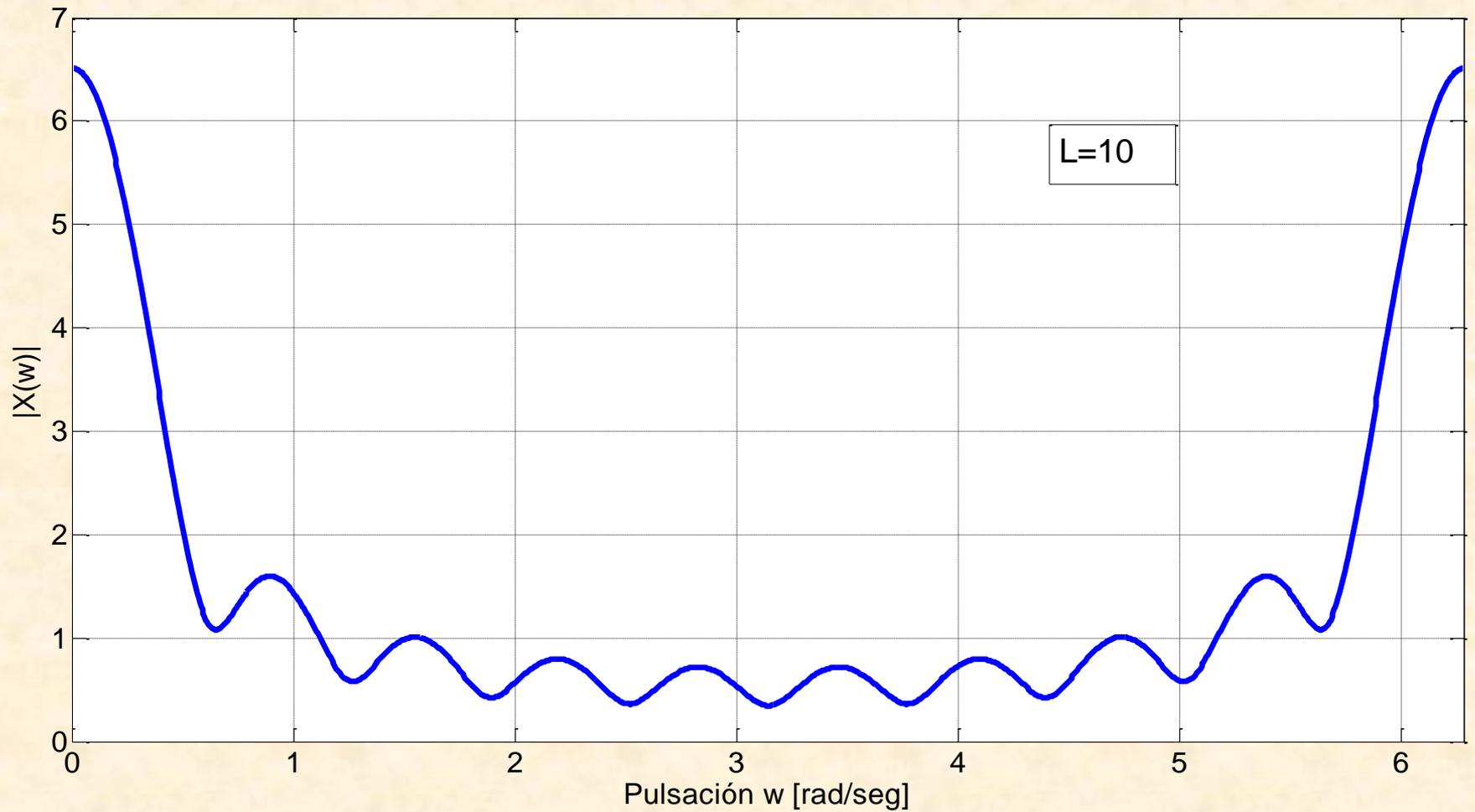
function [X,w]=dtft2020(x,N)
%=====
% Uso:
%      [X,w]=dtft2020(x,N);
%=====
% x: vector columna con la señal
% N: número de frecuencias donde
%    se computa la transformada
% X: vector columna con la DTFT
% w: vector columna con las pulsaciones w
%=====
L=length(x);
k=[0:1:N-1]';
w=2*pi*k/N;
n=[0:1:L-1]';
Ekn=exp(-j*w*n');
X=Ekn*x;
end

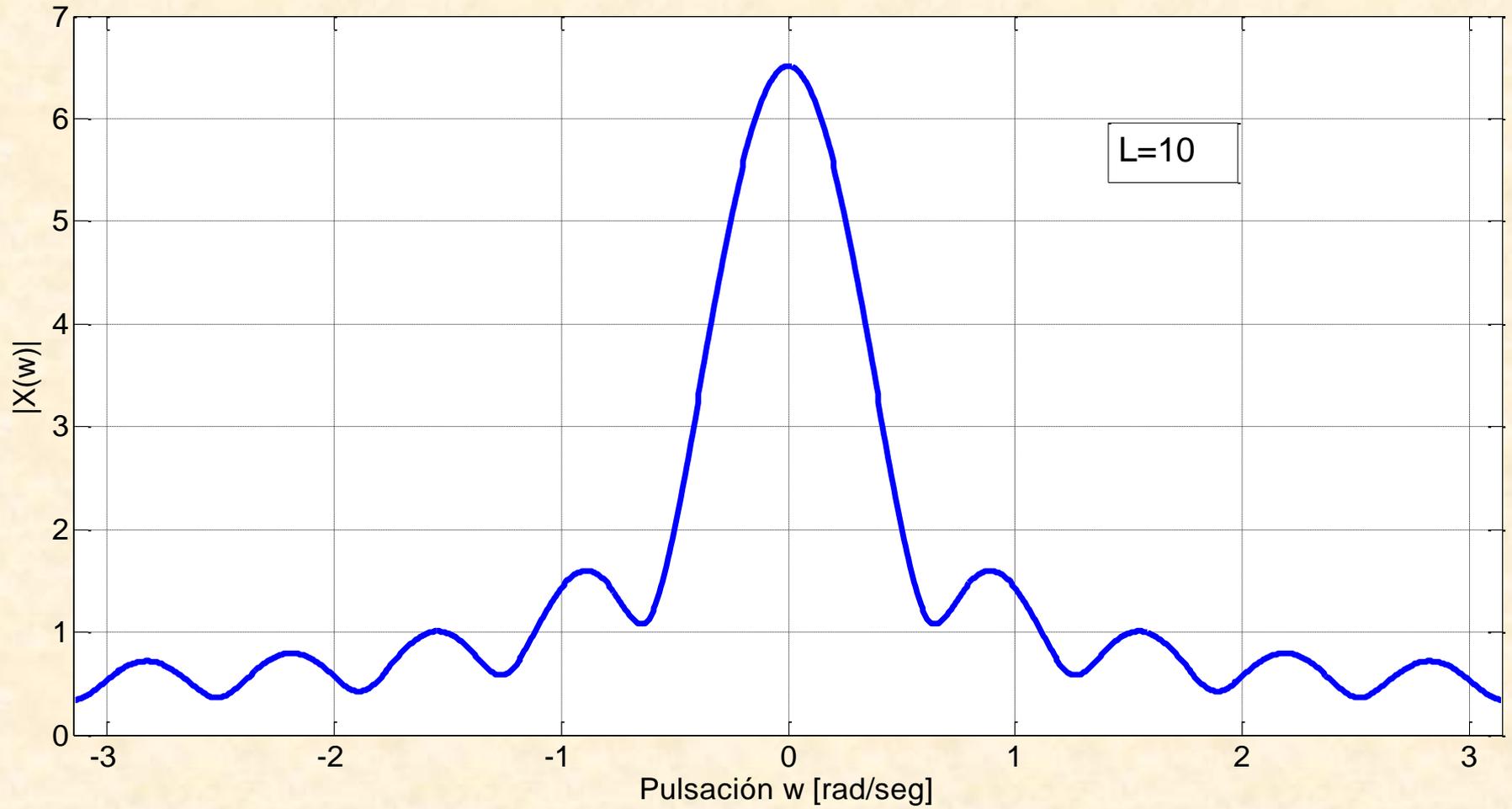
```

Ejemplo: Usaremos la función desarrollada para calcular la DTFT de la señal

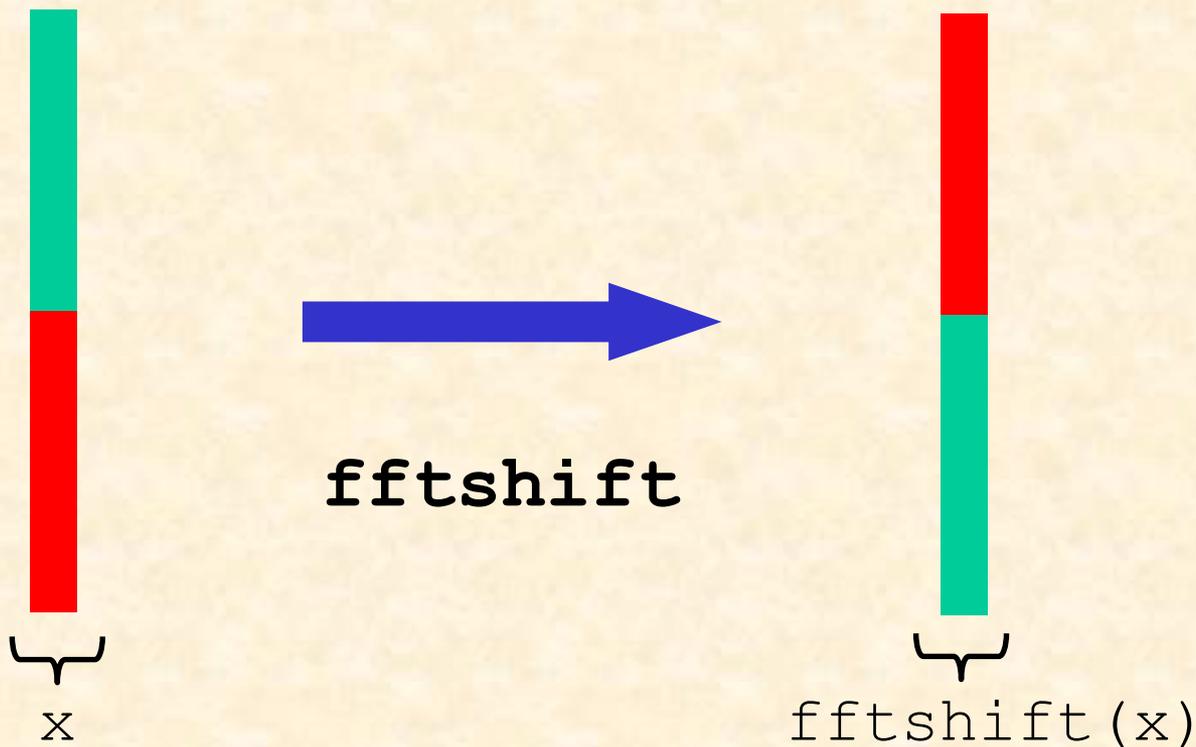
$$x(n) = (0.9)^n [\mu(n) - \mu(n-L)] \quad (11)$$

```
L=10;  
n=[0:1:L-1]';  
x=0.9.^n;  
N=1024;  
[X,w]=dtft2020(x,N);  
figure(1)  
plot(w,abs(X))  
ww=[-pi:2*pi/N:pi-2*pi/N]';  
figure(2)  
plot(ww,abs(fftshift(X)))
```





Para poder graficar las frecuencias ω entre $-\pi$ y π se utilizó el comando `fftshift` de Matlab.



Consideremos ahora la señal de longitud infinita

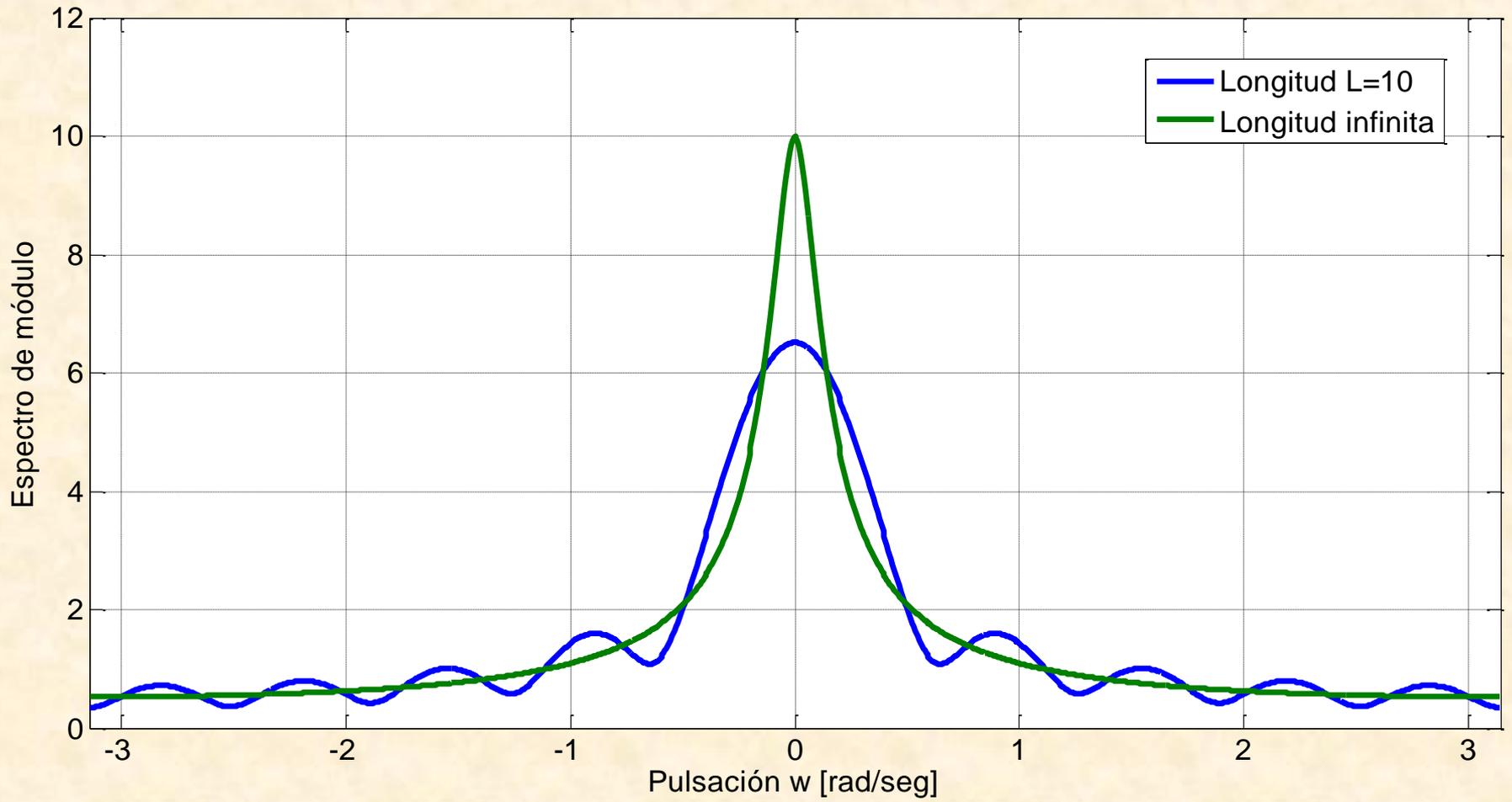
$$x_1(n) = (0.9)^n \mu(n) \quad (12)$$

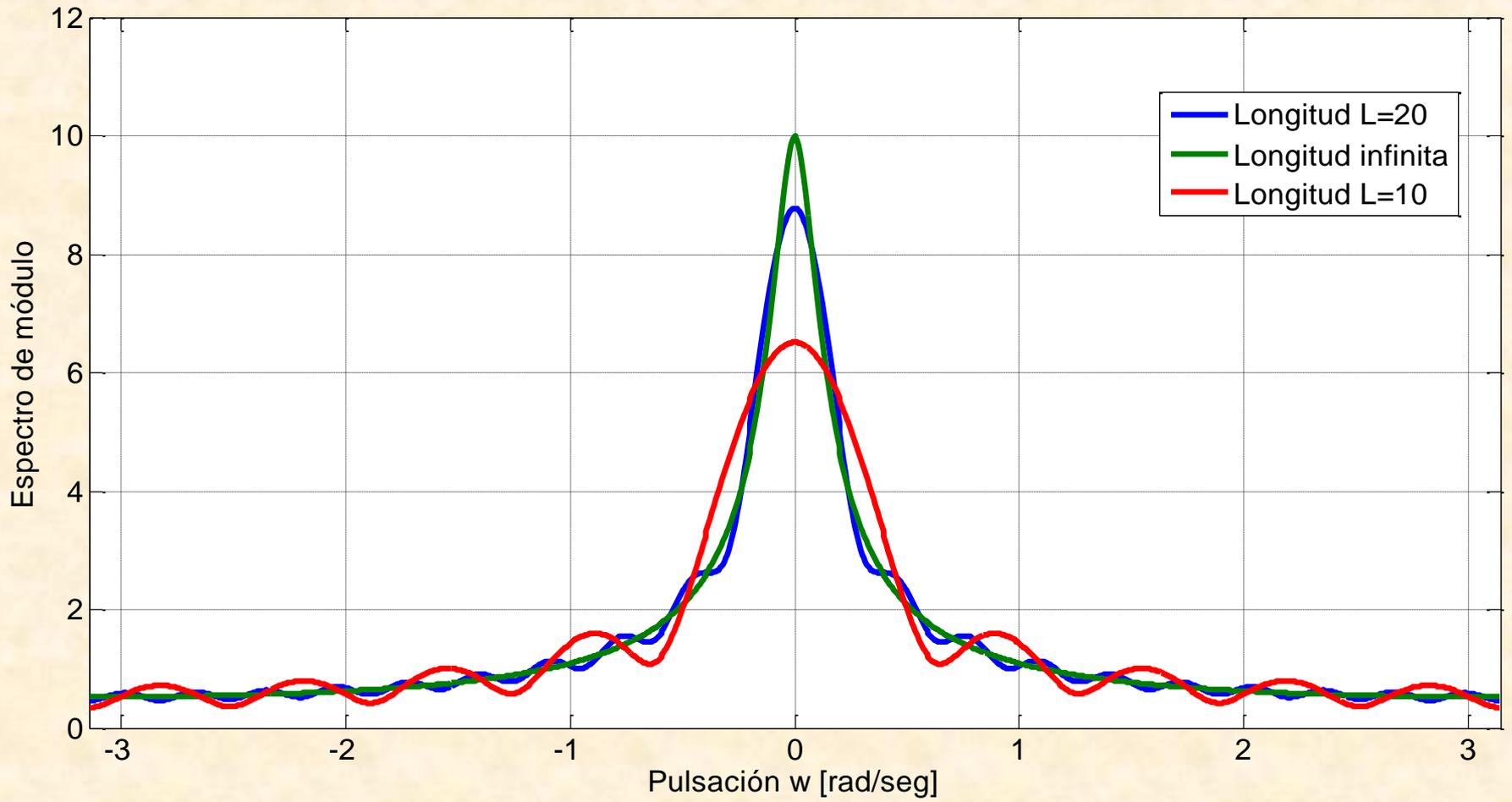
Podemos pensar que $x(n)$ en (11) es una versión truncada con una ventana rectangular de longitud L de la señal de longitud infinita (12). Calculemos la DTFT de $x_1(n)$.

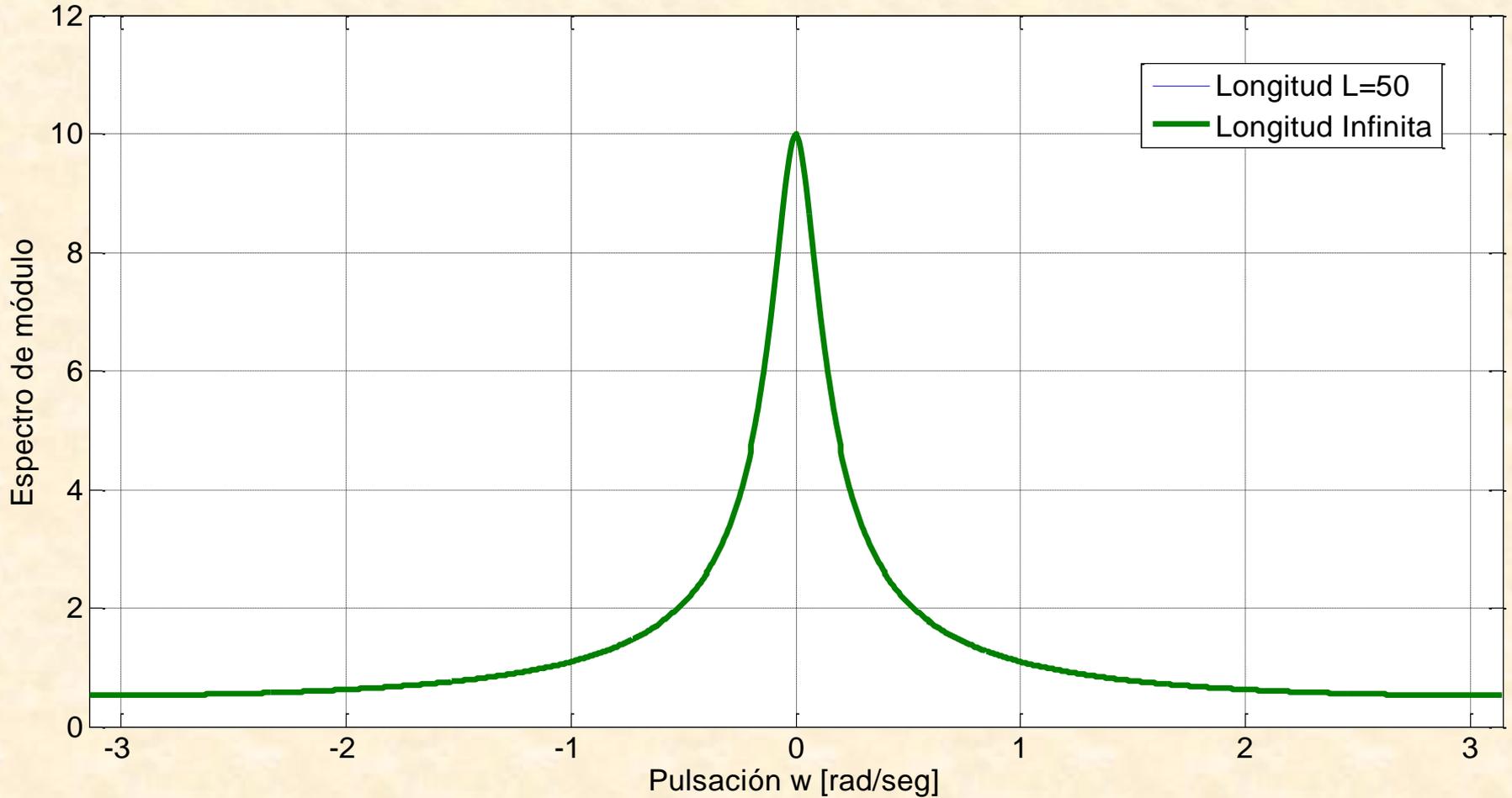
Resulta

$$X_1(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} (0.9e^{-j\omega})^n = \frac{1}{1-0.9e^{-j\omega}} \quad (13)$$

Grafiquemos el espectro de módulo de $x_1(n)$ y de $x(n)$ para distintos valores de L .







Para $L = 50$ las curvas son casi indistinguibles.

Transformada Discreta de Fourier (DFT)

Vimos que la DTFT de una señal causal $x(n)$, de longitud finita L , calculada en N frecuencias equi-espaciadas de la forma:

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (14)$$

viene dada por

$$X(\omega_k) = \sum_{n=0}^{L-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (15)$$

Puede pensarse entonces que $X(\omega_k)$ son muestras del espectro $X(\omega)$ en las frecuencias ω_k .

Se define entonces la **Transformada Discreta de Fourier (DFT) con N puntos** de la señal $x(n)$ como

$$X(k) \triangleq \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi kn}{N}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (16)$$

Vemos, comparando (16) con (15), que si la señal es de longitud $L \leq N$, la transformada Discreta de Fourier con N puntos puede pensarse como muestras del espectro $X(\omega)$ en las frecuencias equiespaciadas ω_k . Si en cambio no se verifica que $L \leq N$, la DFT con N puntos no puede pensarse como muestras del espectro $X(\omega)$ en ω_k .

No es difícil probar que la DFT con N puntos $X(k)$ es periódica con período N. En efecto

$$\begin{aligned} X(k+N) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi(k+N)n}{N}} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi kn}{N}} \underbrace{e^{-j \frac{2\pi kN}{N}}}_{=1} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi kn}{N}} = X(k) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $X(k)$ es periódica con período N , y observando la expresión de $X(k)$, notamos que esa expresión es la Serie de Fourier discreta de $X(k)$, por lo que podemos concluir que

$$X(k) \triangleq \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} \quad \Rightarrow \quad x(n) = c_{-n}$$

siendo c_{-n} los coeficientes de Fourier. Finalmente, teniendo en cuenta la expresión de los coeficientes de Fourier

$$c_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{-j2\pi kn/N} \quad \text{con } n = 0, 1, \dots, N-1$$

podemos concluir que

$$x(n) \triangleq \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j \frac{2\pi k n}{N}} \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (17)$$

Es decir que, para el caso en que $L \leq N$, la señal $x(n)$ puede recuperarse a partir de las muestras $X(k)$ según la expresión (17), que se denomina **Transformada Discreta de Fourier Inversa (IDFT)**:

Transformada Rápida de Fourier (FFT: Fast Fourier Transform)

El algoritmo desarrollado en pág. 25 para el cálculo directo de la DTFT no es eficiente desde el punto de vista computacional ya que requiere del orden de N^2 multiplicaciones complejas. Por ejemplo, si se calculan 1024 frecuencias, se requerirían 1048576 multiplicaciones.

Si se tienen en cuenta algunas propiedades de simetría de los coeficientes

$$e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}$$

se pueden desarrollar algoritmos más rápidos.

En particular, uno de los más difundidos es el algoritmo denominado **Transformada Rápida de Fourier (FFT: Fast Fourier Transform)** que requiere del orden de

$$\frac{N}{2} \log_2 (N)$$

multiplicaciones complejas, cuando N es potencia entera de 2. Para el ejemplo de $N = 1024$, resultan 5120 multiplicaciones, lo que representa un factor de mejora en la velocidad de 204.8.

En **Matlab** este algoritmo está implementado en la rutina `fft`. La sintáxis es la siguiente:

```
>> X=fft(x,N);
```

donde:

x : vector con las muestras de la señal

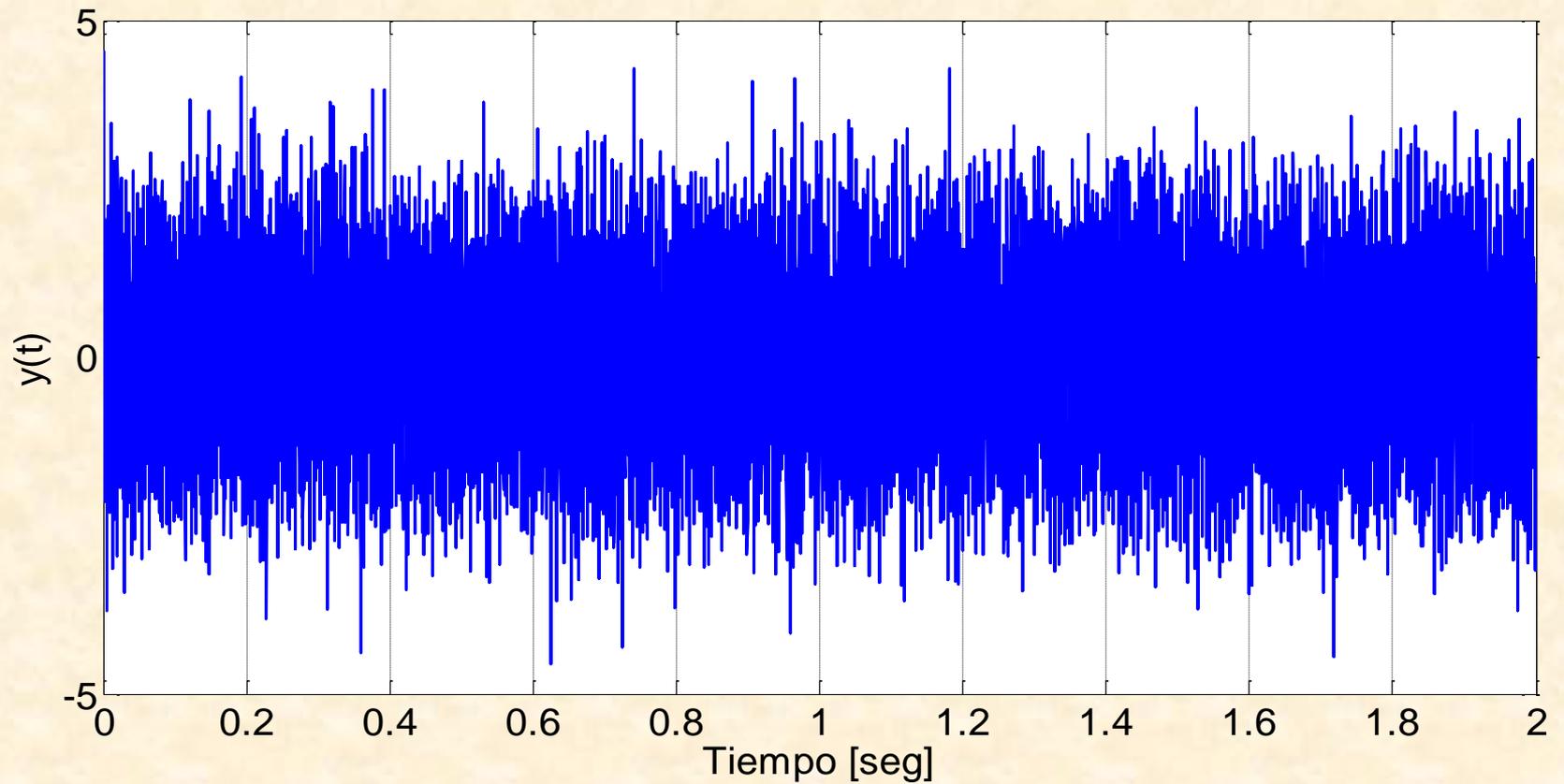
X : vector con las transformadas

N : número de frecuencias donde se calcula la transformada, que debe ser de la forma $N = 2^m$ para que el algoritmo sea rápido.

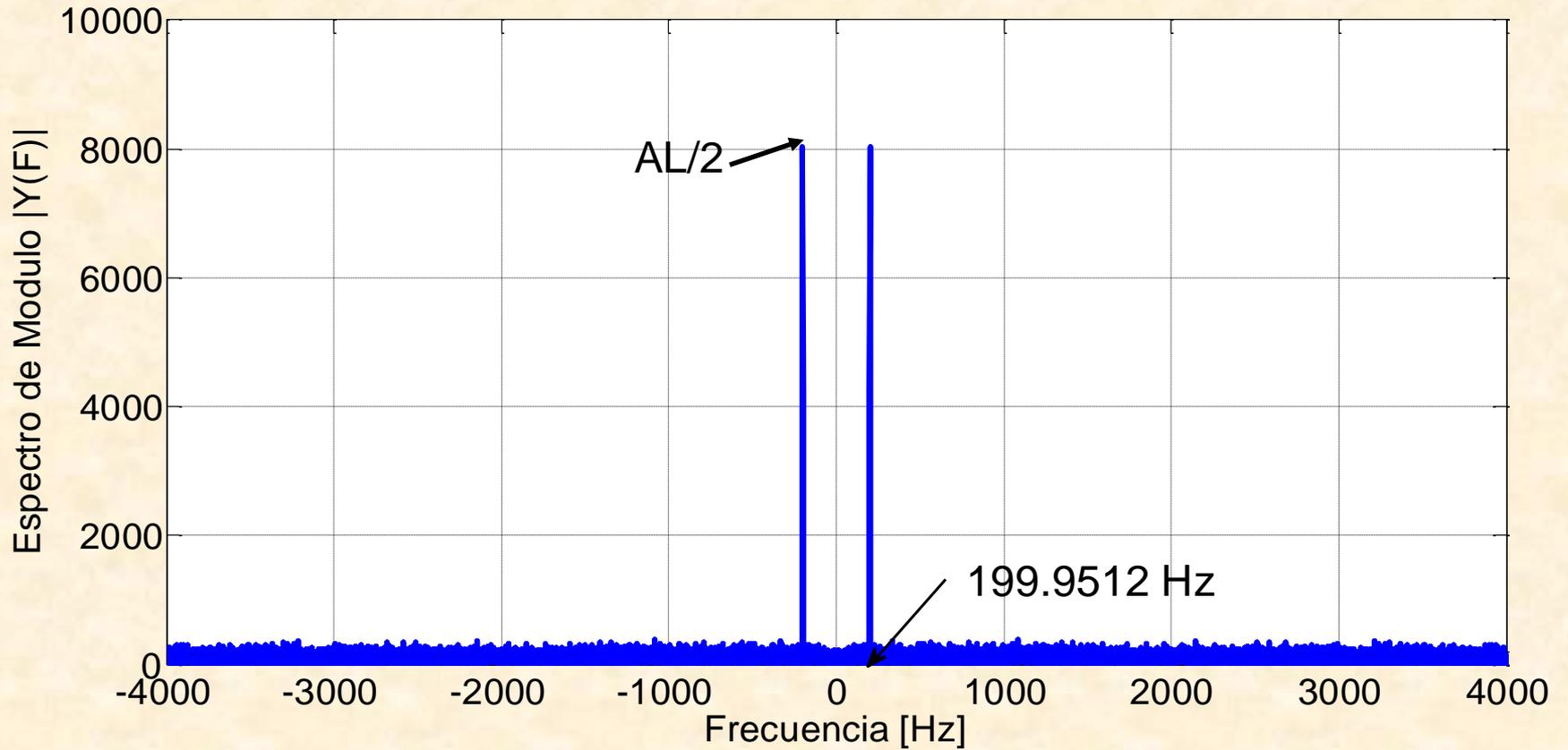
Ejemplo: Problema 4 del TP3

```
load('TP3Prob4_2022.mat')
L=length(y);
Fs=8000;      % Frecuencia de muestreo
N=4096*8;    % notar que N > L
Y=fft(y,N);
F=[-Fs/2:Fs/N:Fs/2-Fs/N]';
[picomax,ind]=max(abs(fftshift(Y)));
A=2*picomax/L; % amplitud de la senoide
Fsen=-F(ind);  % frecuencia de la senoide
figura(1)
plot(t,y)
figure(2)
plot(F,abs(fftshift(Y)))
```

$A = 1.0056$; $F_{sen} = 199.9512$



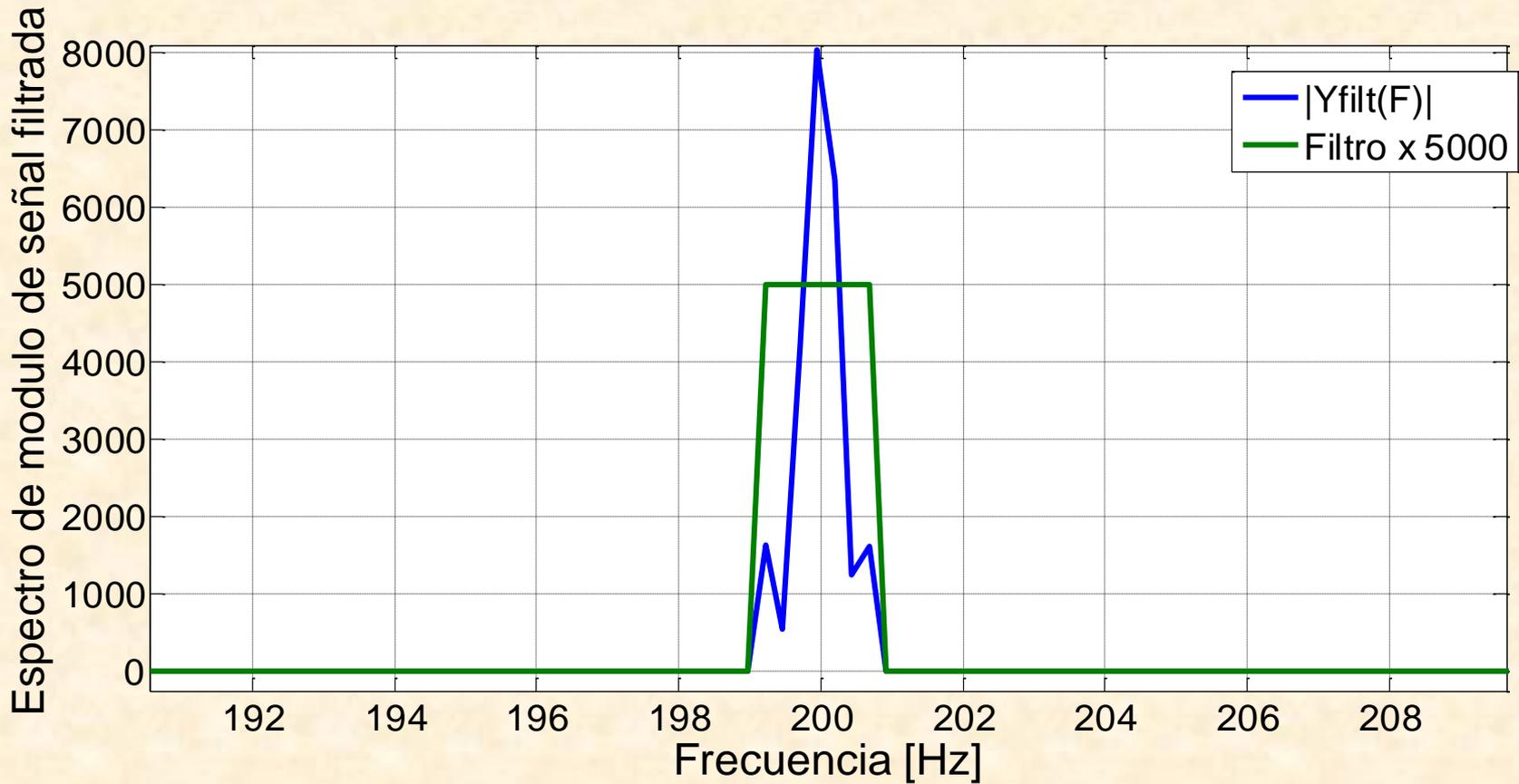
Señal senoidal inmersa en ruido



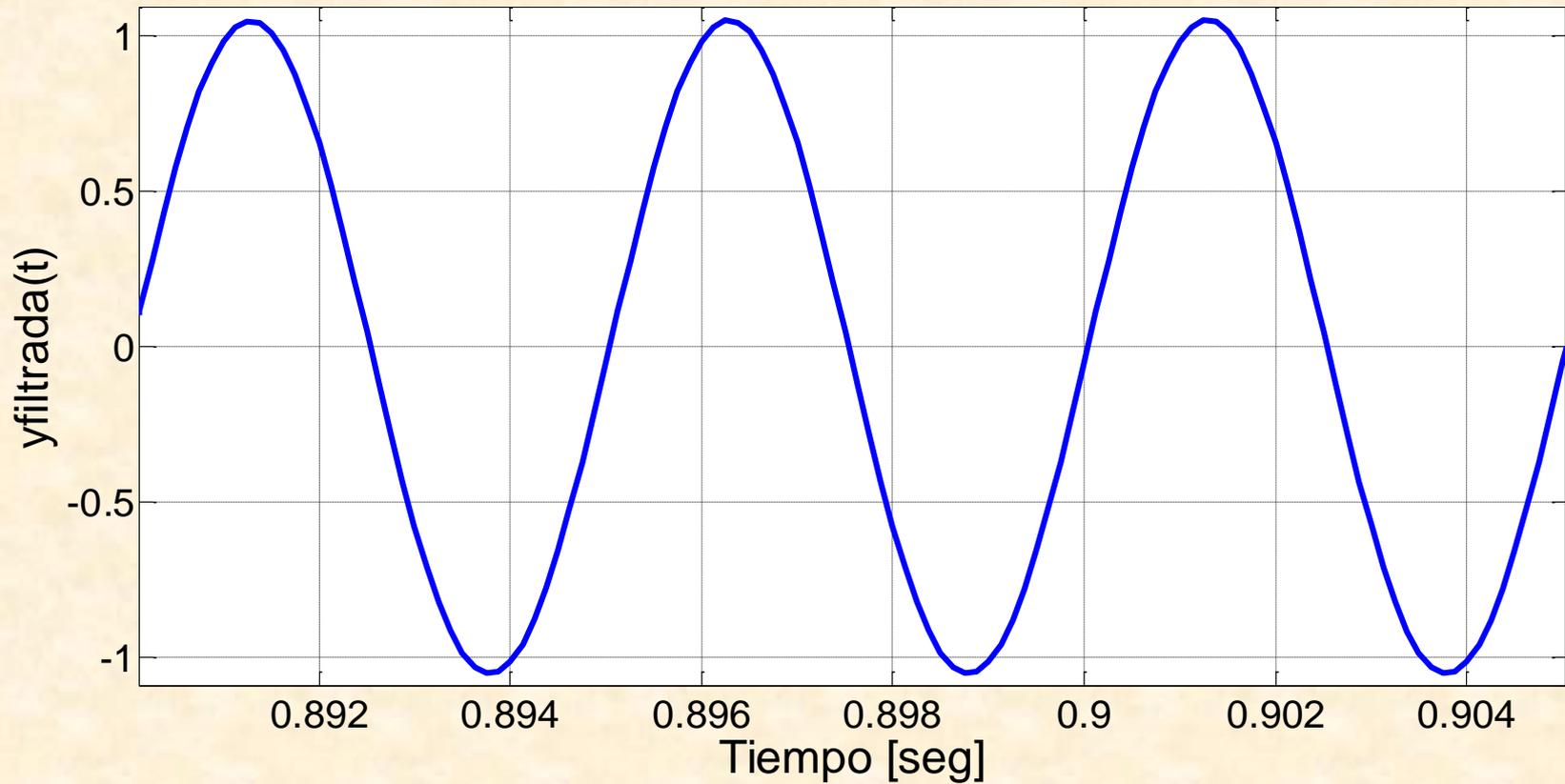
Espectro de módulo

Filtrado en el dominio FFT

```
%=====
% Filtrado en el dominio FFT
%=====
[pico,indi]=max(abs(Y));
filtro=zeros(N,1);
filtro(indi-3:indi+3)=1;
filtro(N-indi-3:N-indi+3)=1;
Yfiltrada=Y.*filtro;
yfiltrada=real(ifft(Yfiltrada,N));
yfiltrada=yfiltrada(1:L);
figure(3)
plot(F,abs(fftshift(Yfiltrada)),F,5000*fftshift(filtro))
figure(4)
plot(t,yfiltrada)
```



Zoom del espectro de módulo de la señal
filtrada y del filtro x 5000



Señal filtrada (zoom) ($F= 200$ Hz)