Sistemas y Señales I

Análisis Frecuencial de señales en TD

Temario: Cap. 7: Items 7.1, 7.2, 7.3, 7.4, 7.5

Análisis Frecuencial de Señales en Tiempo Discreto

1. Serie de Fourier de Señales en Tiempo Discreto

Sea $x(n)$ una señal **periódica** con período N, es decir:

$$x(n) = x\left(n + N\right) \qquad \forall\ n$$

La representación de $x(n)$ en **serie de Fourier** puede expresarse como:

$$\boxed{x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k\ e^{j 2 \pi k n / N}} \qquad \textbf{(1)}$$

donde $\{c_k\}$ son los coeficientes de Fourier.

Para derivar la expresión de c_k usamos la identidad

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j 2 \pi k n / N} = \begin{cases} N & k = 0, \pm N, \pm 2N \\ 0 & c.o.c \end{cases}$$

Reemplazando en (1), tenemos:

$$x(n) e^{-j 2 \pi \ell n / N} = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \, e^{j 2 \pi (k-\ell) n / N}$$

Sumando sobre n

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j 2 \pi \ell n / N} = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} c_k \, e^{j 2 \pi (k-\ell) n / N}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} c_k \sum_{n=0}^{N-1} e^{j 2 \pi (k-\ell) n / N}$$

$$= N \, c_\ell$$

Luego:

$$\boxed{c_\ell = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j2\pi \ell n/N} \qquad \text{con} \quad \ell = 0, 1, \ldots, N-1} \quad \textbf{(2)}$$

Coeficientes de Fourier

- Como las componentes en frecuencia

$$S_k(n) = e^{-j2\pi k n/N}$$

son periódicas con período N, entonces los **coeficientes de Fourier** c_k son también **periódicos** cuando se calculan más allá del rango $k = 0, 1, \ldots, N\text{-}1$. Se tiene entonces:

$$c_{k+N} = c_k$$

Es decir, $\{c_k\}$ es una secuencia periódica con período fundamental N.

Tenemos entonces que el espectro de una señal $x(n)$ que es periódica con período N, es una secuencia periódica con período N.

Consecuentemente cualquier secuencia de N muestras de la señal o de su espectro provee una descripción completa de la señal en el dominio temporal o frecuencial.

- Si bien $\{c_k\}$ es una secuencia periódica, nos concentraremos en un solo período en el rango $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

En el dominio frecuencial esto implica cubrir el rango de frecuencias:

$$0 \le \omega_k = \frac{2\pi k}{N} < 2\pi \qquad \text{con} \quad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

2. Espectro de Densidad de Potencia de Señales Periódicas en Tiempo Discreto

La potencia media de una señal periódica de período N es:

$$\boxed{P_x = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, x^*(n)$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\left[\sum_{k=0}^{N-1} c_k^*\, e^{-j2\pi k n/N}\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} c_k^*\left[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j2\pi k n/N}\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} c_k^*\, c_k = \boxed{\sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2}$$

Identidad de Parseval para señales periódicas en TD

- La secuencia $| c_k |^2$, $k = 0 , 1 , \ldots , N\text{-}1$ se denomina **Espectro de Densidad de Potencia**
- La energía de la señal $x(n)$ en un período es:

$$E_N = \sum_{n=0}^{N-1} | x(n) |^2 = N \sum_{n=0}^{N-1} | c_k |^2$$

- Si la señal $x(n)$ es **real**, entonces:

$$\boxed{c_k^* = c_{-k} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} |c_{-k}| = |c_k| \\ -\angle c_{-k} = \angle c_k \end{cases}}$$

Ejemplos:

a) $x(n) = \cos \sqrt{2}\, \pi\, n$

$$\therefore \quad \omega_0 = \sqrt{2}\, \pi \quad \Rightarrow \quad f_0 = 1/\sqrt{2}$$

Como f_0 no es un número racional, $x(n)$ no es periódica $\Rightarrow$ No puede expandirse en series de Fourier. La señal posee sin embargo un espectro que consiste de una única componente de frecuencia $\omega = \omega_0 = \sqrt{2}\, \pi$

b) $x(n) = \cos \pi\, n / 3$

$$\therefore \quad 2\, \pi\, f_0 = \pi / 3 \quad \Rightarrow \quad f_0 = 1/6$$

$x(n)$ es periódica con período fundamental $N = 6$

Los coeficientes de Fourier resultan:

$$c_k = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{5} x(n)\, e^{-j\, 2\, \pi\, k\, n / 6} \quad ; \quad k = 0, 1, \ldots, 5$$

Usando la expresión con exponenciales complejas del "$\cos(\omega.n)$", podemos escribir:

$$x(n) = \cos 2\pi n/6 = \frac{1}{2} e^{j 2\pi n/6} + \frac{1}{2} e^{-j 2\pi n/6}$$

por lo que podemos concluir que:

$$c_1 = 1/2 \qquad\qquad c_{-1} = 1/2$$

Considerando que:

$$e^{-j2\pi n/6} = e^{j2\pi(5-6)n/6} = e^{j2\pi 5n/6} \, . \underbrace{e^{-j2\pi 6n/6}}_{=1}$$

vemos que:

$$c_{-1} = c_5$$

Teniendo entonces:

$$c_0 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$$

$$c_1 = 1/2 \qquad c_5 = 1/2$$

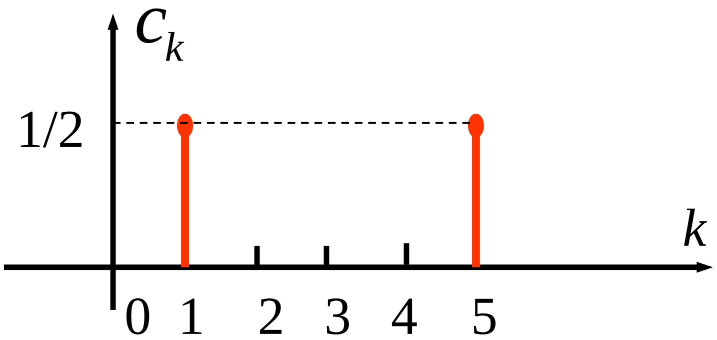


Fig. 1: Coeficientes de Fourier

c) Determinar los coeficientes de Fourier y el espectro de densidad de potencia de la señal periódica mostrada en la figura (onda cuadrada en tiempo discreto)

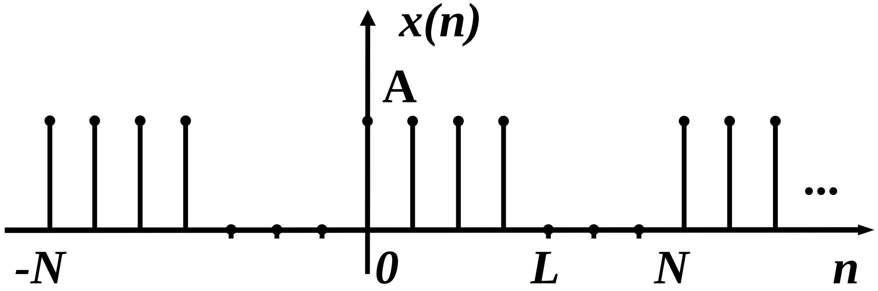


Fig. 2: Onda cuadrada en TD

$x(n)$ es periódica de período N

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j\,2\pi\,k\,n/N} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{L-1} A\, e^{-j\,2\pi\,k\,n/N} = \frac{A}{N}\sum_{n=0}^{L-1} e^{-j\,2\pi\,k\,n/N}$$

Considerando que:

$$\sum_{n=0}^{L-1} e^{-j\,2\pi\,k\,n/N} = \begin{cases} L & ; \quad k=0 \\ \dfrac{1-e^{-j\,2\pi\,k\,L/N}}{1-e^{-j\,2\pi\,k/N}} = e^{-j\,\pi\,k\,(L-1)/N}\, \dfrac{\operatorname{sen}(\pi\,k\,L/N)}{\operatorname{sen}(\pi\,k/N)} \end{cases} \qquad k = 1, \ldots, N-1$$

Resultando entonces que:

$$c_k = \begin{cases} \dfrac{A\,L}{N} & ; \quad k = 0 \\ \dfrac{A}{N} e^{-j\,\pi\,k\,(L-1)/N} \, \dfrac{sen(\pi\,k\,L/N)}{sen(\pi\,k/N)} & ; \quad k = 1, \ldots, N-1 \end{cases}$$

El espectro de densidad de potencia resultante es:

$$|\,c_k\,|^2 = \begin{cases} \left(\dfrac{A\,L}{N}\right)^2 & ; \quad k = 0 \\ \left(\dfrac{A}{N}\right)^2 \dfrac{sen^2(\pi\,k\,L/N)}{sen^2(\pi\,k/N)} & ; \quad k = 1, \ldots, N-1 \end{cases}$$

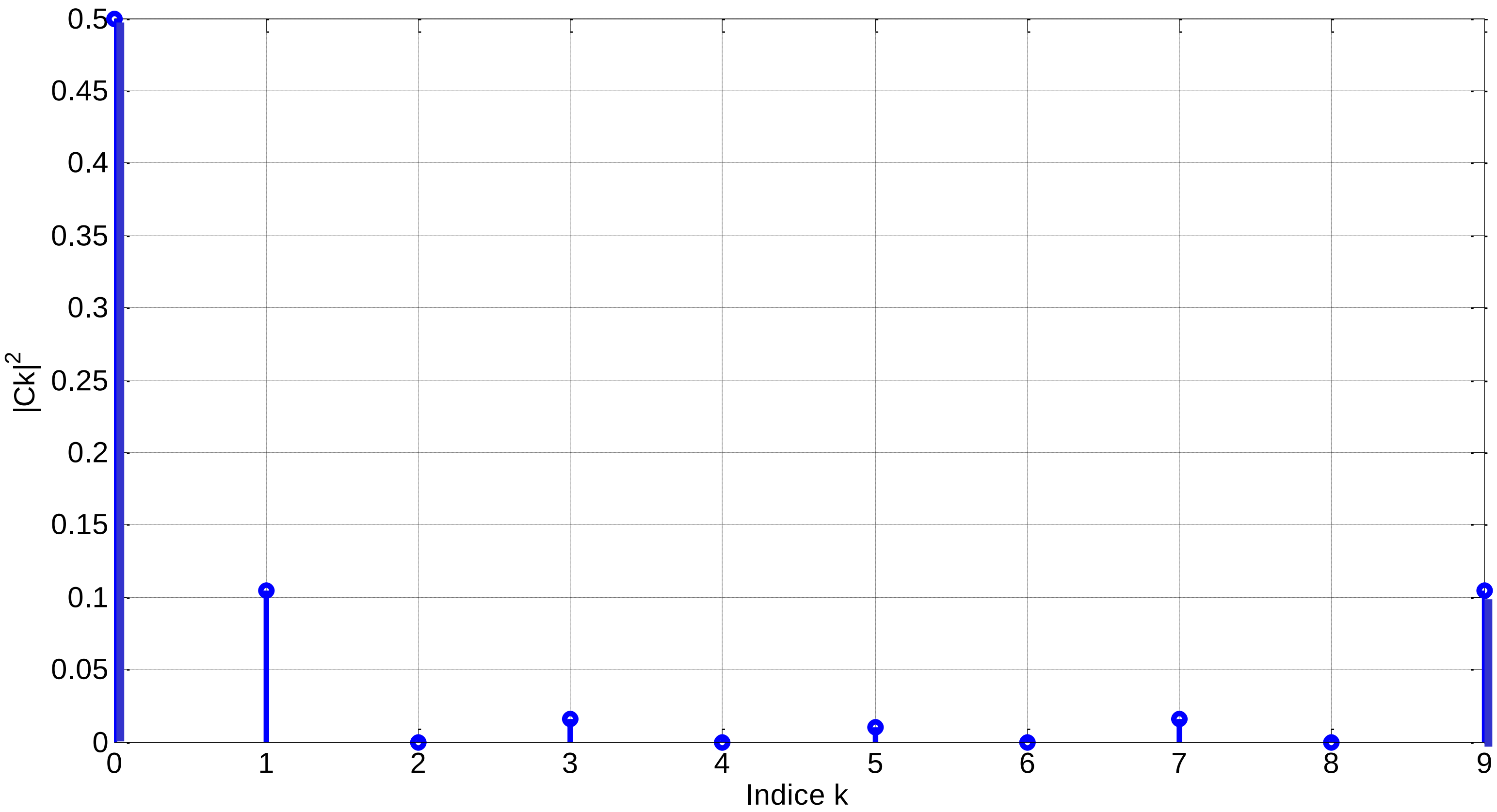


Fig. 3: Espectro de densidad de potencia

3. Transformada de Fourier en Tiempo Discreto

La DTFT de una señal $x(n)$ de energía finita se define como:

$$\boxed{X(\omega) \overset{\Delta}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}}$$

- $X(\omega)$ representa el **contenido frecuencial** de la señal $x(n)$; y se denomina **espectro** de $x(n)$
- Como el rango de frecuencias para una señal en TD es $(-\pi, \pi)$, $X(\omega)$ resulta periódica de período 2π.

En efecto,

$$X(\omega+2\pi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j(\omega+2\pi)n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} . \underbrace{e^{-j2\pi n}}_{=1} = X(\omega)$$

- Como $X(\omega)$ es una función periódica de la variable ω, admite una expansión en series de Fourier, siempre que se verifiquen las condiciones de Dirichlet.

De la definición anterior de $X(\omega)$ vemos que los coeficientes de Fourier son:

$$c_n = x(-n)$$

Si se conoce $X(\omega)$, la señal $x(n)$ puede entonces recuperarse como:

$$\boxed{x(n) = c_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)e^{j\omega n}\, d\omega} \qquad \textbf{(2)}$$

que es la **Transformada de Fourier en TD Inversa**

Convergencia de la DTFT

Definamos:

$$X_N(\omega)=\sum_{n=-N}^{N} x(n)e^{-j\omega n}$$

Decimos que $X_N(\omega)$ **converge uniformemente** a $X(\omega)$, para todo ω, cuando $N \to \infty$, si

$$\lim_{N\to\infty} \left| X(\omega)-X_N(\omega) \right| = 0$$

La convergencia uniforme de $X_N(\omega)$ queda garantizada si:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| x(n) \right| < \infty \qquad \textbf{(3)}$$

En efecto, si se verifica (3) entonces:

$$\left| X(\omega) \right| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| x(n) \right| < \infty$$

Luego, (3) es condición **suficiente** para existencia de DTFT

- Algunas secuencias no son absolutamente sumables (condición (3)) pero son cuadrado sumables, es decir son de energía finita

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty \qquad \textbf{(4)}$$

que es una condición más débil que (3)

$$[\ (3) \Rightarrow (4) \quad \text{pero} \quad (4) \not\Rightarrow (3)\ ]$$

Para poder definir la DTFT de estas señales, la condición de convergencia uniforme se debe relajar a **convergencia en media cuadrática**;

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega) - X_N(\omega)|^2 d\omega = 0$$

Es decir, la energía del error $|X(\omega)\text{-}X_N(\omega)|$ tiende a cero, pero no necesariamente el error tiende a cero para cada ω.

- De esta forma podemos ampliar la clase de señales que tienen DTFT para incluir a la señales de energía finita.

Ejemplo:

Supongamos que la señal $x(n)$ tiene DTFT

$$X(\omega)=\begin{cases}1 & , \quad |\omega|\leq \omega_c \\ 0 & , \quad \omega_c<|\omega|\leq \pi\end{cases}$$

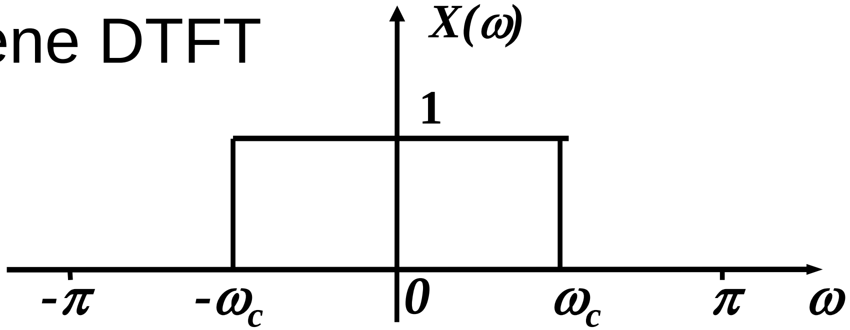


Fig. 4: Espectro discontinuo

Recordemos que $X(\omega)$ es periódica con período 2π

La transformada inversa resulta:

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)e^{j\omega n}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n}d\omega=\frac{\text{sen }\omega_c n}{\pi n} \quad \text{con } n\neq 0$$

Para $n = 0$, tenemos:

$$x(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} d\omega=\frac{\omega_c}{\pi}$$

Es decir:

$$x(n)=\begin{cases}\dfrac{\omega_c}{\pi} & \text{con } n=0\\[2ex] \dfrac{\omega_c}{\pi}\,\dfrac{\operatorname{sen}\omega_c n}{\omega_c n} & \text{con } n\neq 0\end{cases}$$

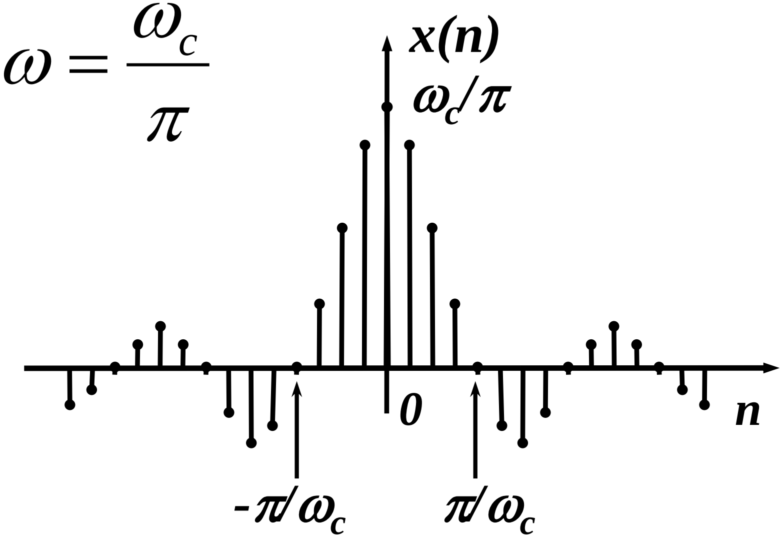


Fig. 5: Señal $x(n)$

Podemos verificar que $x(n)$ no es absolutamente sumable pero es cuadrado sumable (de energía finita).
En efecto:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|=\frac{\omega_c}{\pi}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\omega_c}{\pi}\left|\frac{sen\,\omega_c n}{\omega_c n}\right|\leq\frac{\omega_c}{\pi}+\underbrace{\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}}_{\text{Diverge}}$$

Además:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\, x(n)|^2 = \frac{\omega_c^2}{\pi^2} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_c^2}{\pi^2} \left| \frac{\operatorname{sen}\, \omega_c n}{\omega_c n} \right|^2 \leq \frac{\omega_c^2}{\pi^2} + \frac{2}{\pi^2} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}_{\text{Converge}}$$

Concluimos entonces que la DTFT $X(\omega)$ de $x(n)$ converge en media cuadrática, pero no converge uniformemente punto a punto (en los puntos de discontinuidad).

Para ver esto en mayor detalle consideremos la suma finita

$$X_N(\omega) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{\operatorname{sen}\, \omega_c n}{\pi n} e^{-j\omega n}$$

para distintos valores de N crecientes.

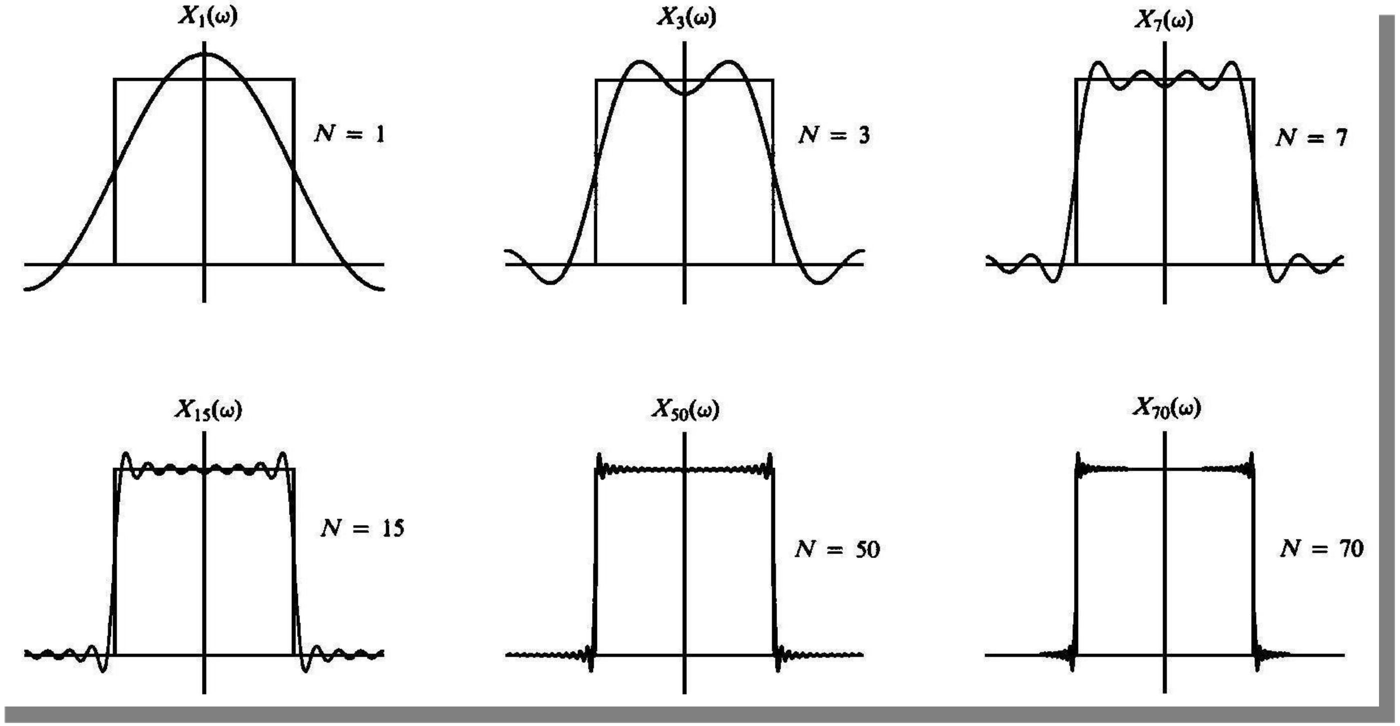


Fig. 6: Suma finita $X_N(\omega)$ para valores de N crecientes

Vemos que hay una oscilación en la frecuencia $\omega = \omega_c$.

Cuando N aumenta, la oscilación es más rápida y cuando $N \rightarrow \infty$ la oscilación converge al punto de discontinuidad $\omega = \omega_c$, pero su amplitud no va a cero. Este fenómeno oscilatorio de $X_N(\omega)$ se denomina **Fenómeno de Gibbs**.

5. Espectro de Densidad de Energía de Señales Aperiódicas

La energía de la señal *x(n)* es:

$$\boxed{E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, x^*(n)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X^*(\omega) e^{-j\omega n} d\omega \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X^*(\omega) \underbrace{\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \right]}_{X(\omega)} d\omega$$

$$\boxed{= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2\, d\omega}$$

Identidad de Parseval para señales aperiódicas en TD

- $X(\omega)$ es, en general, una función a valores complejos, que puede expresarse como:

$$X(\omega) = |X(\omega)| e^{j\theta(\omega)}$$

donde:

$|X(\omega)|$: Espectro de magnitud

$\theta(\omega) = \angle X(\omega)$: Espectro de Fase

- $S_{xx}(\omega) = |X(\omega)|^2$ se denomina **Espectro de densidad de energía** de $x(n)$. $S_{xx}(\omega)$ no contiene información de la fase.

- Si $x(n)$ es una señal real, entonces:

$$X^*(\omega) = X(\omega) \Rightarrow \begin{cases} |X(-\omega)| = |X(\omega)| & \textbf{Simetría Par} \\ \angle X(-\omega) = -\angle X(\omega) & \textbf{Simetría Impar} \\ S_{xx}(-\omega) = S_{xx}(\omega) & \textbf{Simetría Par} \end{cases}$$

- Basados en las propiedades anteriores de simetría podemos concluir que para una señal real basta con conocer $X(\omega)$ en el rango de frecuencias $0 \leq \omega \leq \pi$ para que $x(n)$ (señal real) quede completamente determinada.

Ejemplo 1:

Calcule y grafique el espectro de densidad de energía $S_{xx}(\omega)$ de la señal:

$$x(n) = a^n \mu(n) \quad , \quad 0 < a < 1$$

La DTFT de $x(n)$ resulta

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(a e^{-j\omega} \right)^n = \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}}$$

Luego

$$S_{xx}(\omega) = \left| X(\omega) \right|^2 = \left| \frac{1}{1 - a\cos(\omega) + ja\sin(\omega)} \right|^2$$

$$= \frac{1}{\left(1 - a\cos(\omega)\right)^2 + a^2 \sin^2(\omega)}$$

$$= \frac{1}{1 + a^2 - 2a\cos(\omega)}$$

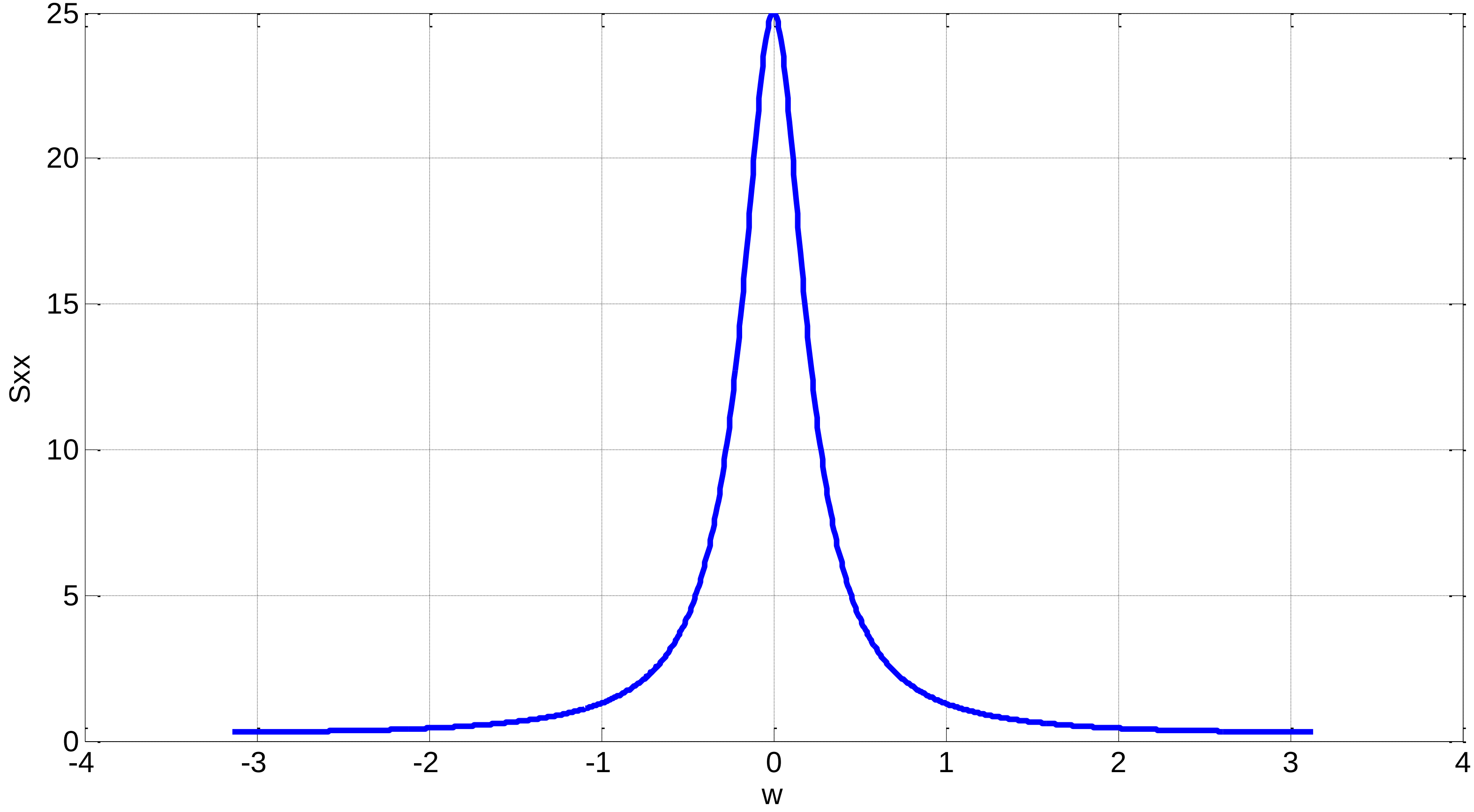


Fig. 7: Espectro de Densidad de Energía ($a = 0.8$)

Ejemplo 2:

Determine la DTFT y el espectro de densidad de energía de la señal:

$$x(n)=\begin{cases} A & , \quad 0\le n\le L-1 \\ 0 & , \quad c.o.c. \end{cases}$$

La DTFT resulta

$$X(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}=A\sum_{n=0}^{L-1}e^{-j\omega n}$$

$$=A\sum_{n=0}^{L-1}\left(e^{-j\omega}\right)^{n}=A\frac{1-e^{-j\omega L}}{1-e^{-j\omega}}$$

$$=A\frac{e^{-j\omega L/2}e^{j\omega L/2}-e^{-j\omega L/2}e^{-j\omega L/2}}{e^{-j\omega/2}e^{j\omega/2}-e^{-j\omega/2}e^{-j\omega/2}}$$

$$=A\frac{e^{-j\omega L/2}}{e^{-j\omega/2}}\frac{\sin\left(\omega L/2\right)}{\sin\left(\omega/2\right)}$$

$$=Ae^{-j\omega(L-1)/2}\frac{\sin\left(\omega L/2\right)}{\sin\left(\omega/2\right)}$$

El espectro de densidad de energía resulta

$$S_{xx}(\omega) = |X(\omega)|^2 = A^2 \frac{\sin^2(\omega L/2)}{\sin^2(\omega/2)}$$

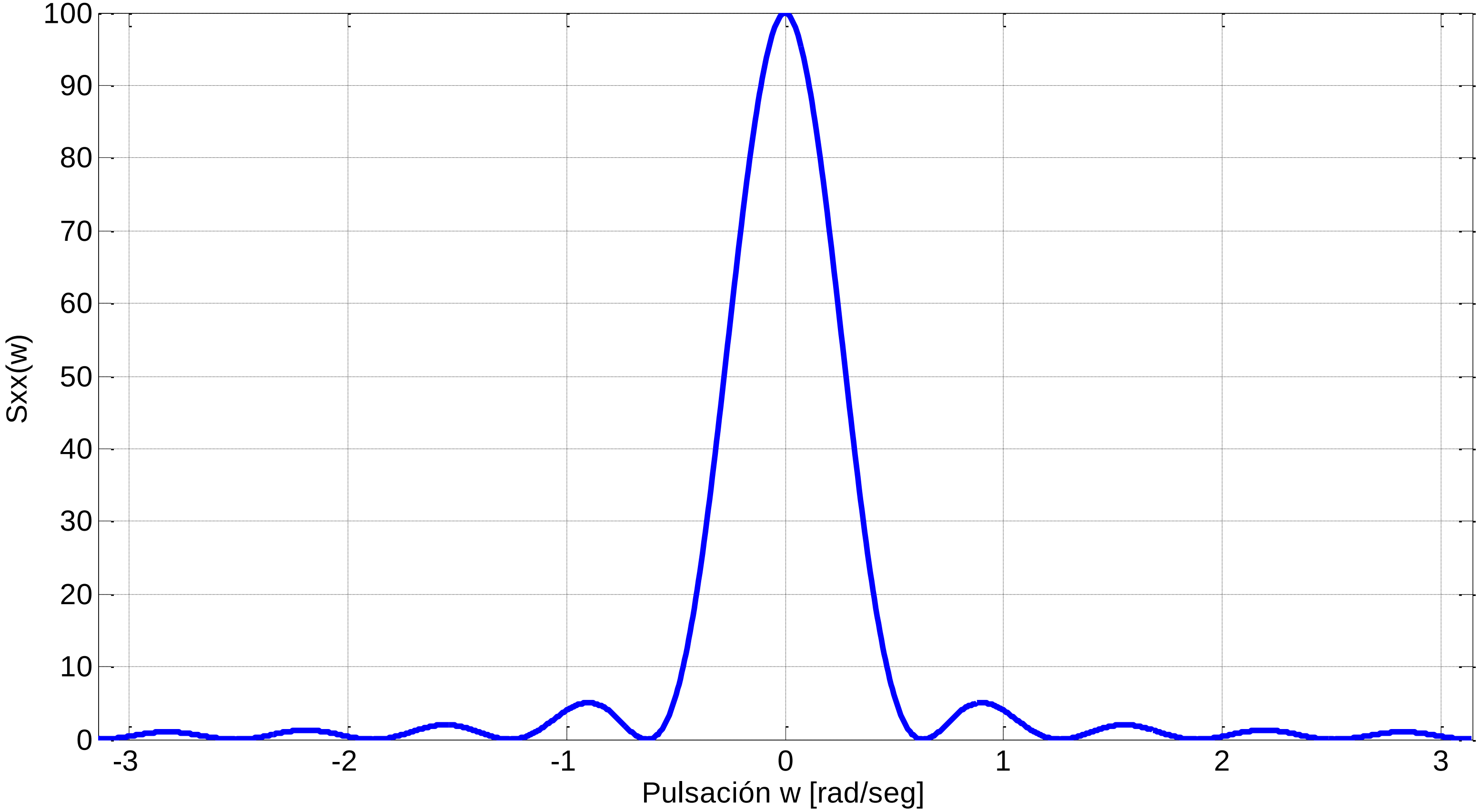


Fig. 8: Espectro de densidad de energía (L=10, A=1)

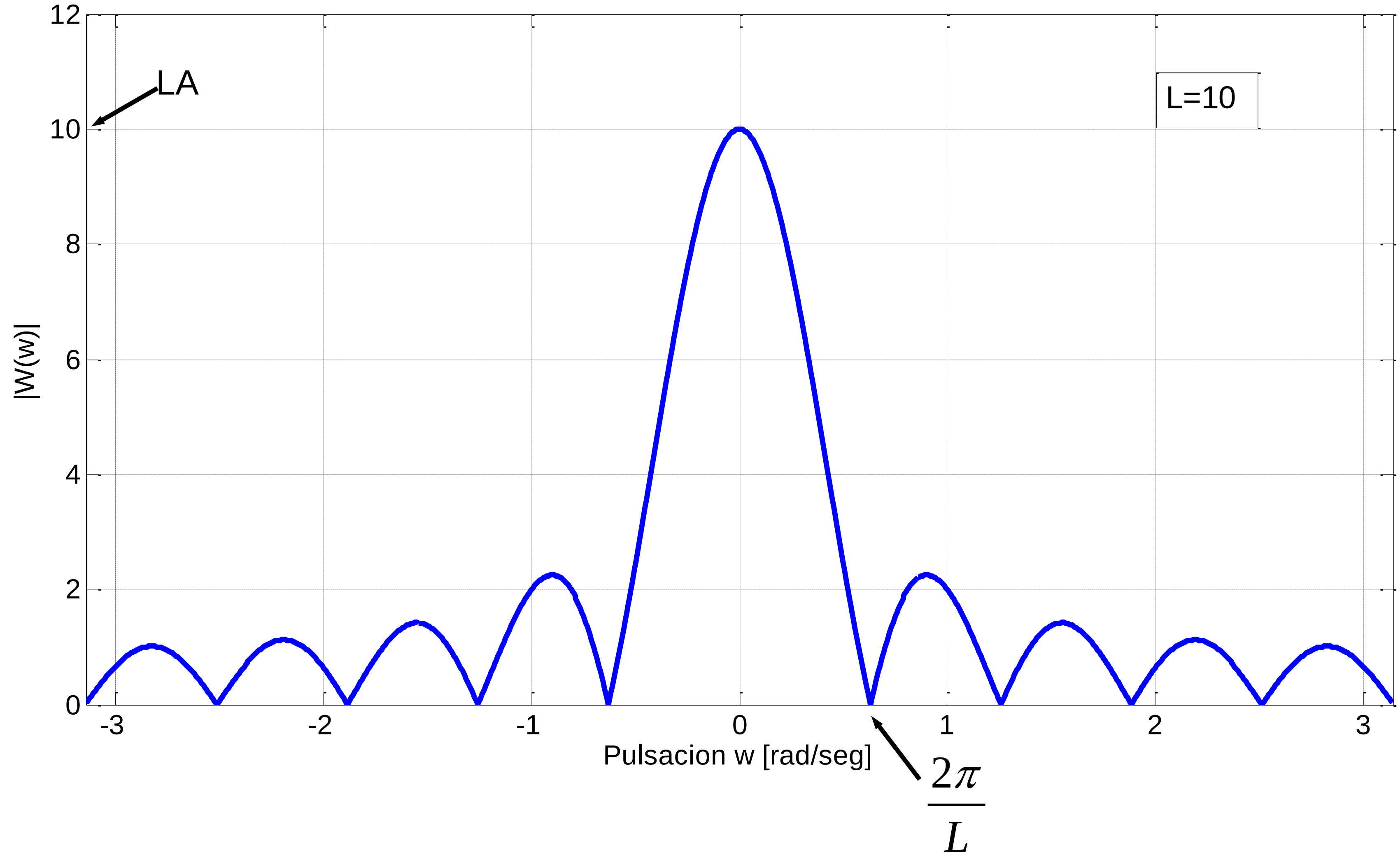


Fig. 9: Espectro de módulo (L=10, A=1)

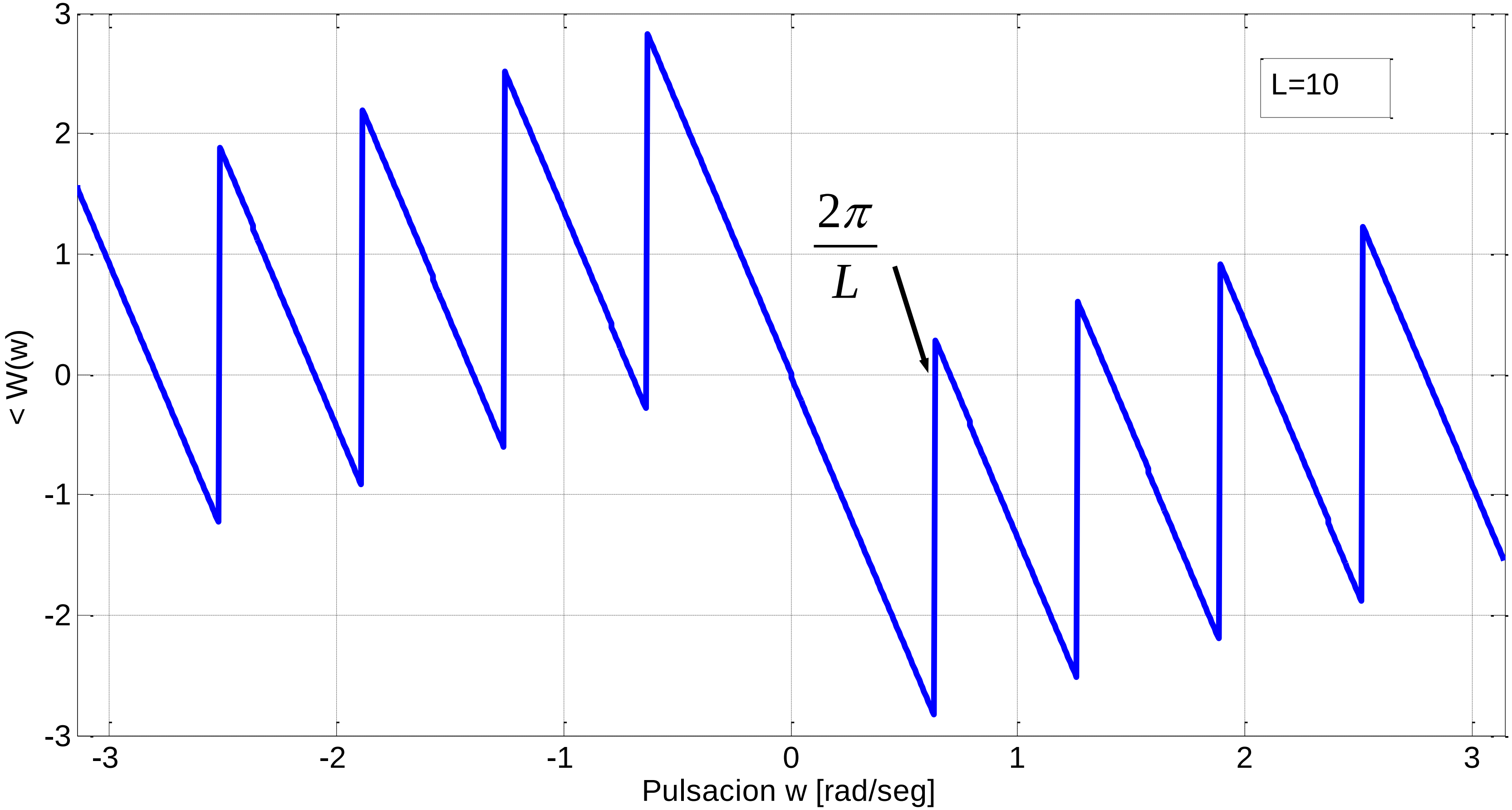


Fig. 10: Espectro de fase (L=10, A=1)

6. Propiedades de la DTFT

- Linealidad

$$a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) \xleftrightarrow{F} a_1 X_1(\omega) + a_2 X_2(\omega)$$

- Corrimiento Temporal

Si $\quad x(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega)$

entonces $\quad x(n-k) \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega k} X(\omega)$

- Inversión en el tiempo

Si $\quad x(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega)$

entonces $\quad x(-n) \xleftrightarrow{F} X(-\omega)$

- Convolución de 2 secuencias

Si
$$x_1(n) \overset{F}{\longleftrightarrow} X_1(\omega)$$
$$x_2(n) \overset{F}{\longleftrightarrow} X_2(\omega)$$

entonces: $$x_1(n) * x_2(n) \overset{F}{\longleftrightarrow} X_1(\omega) . X_2(\omega)$$

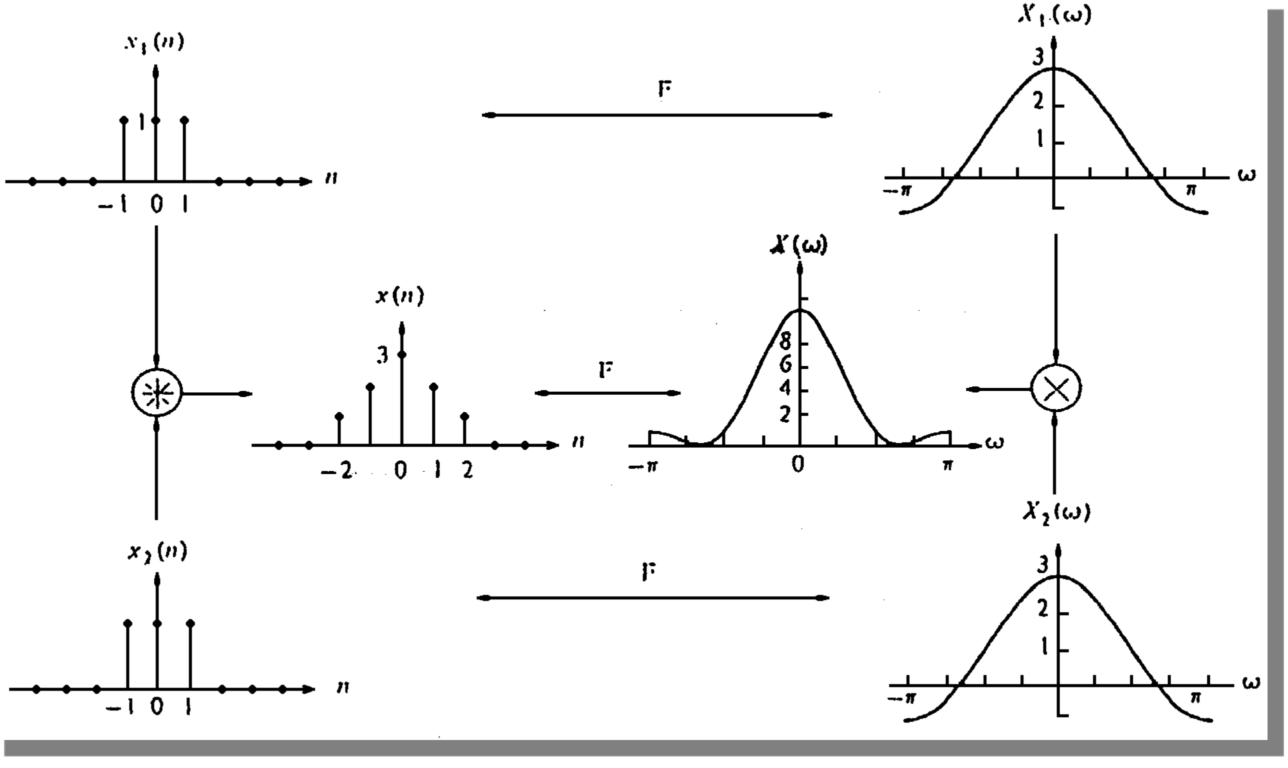


Fig. 11: DTFT de la convolución de 2 señales

- Corrimiento en Frecuencia:

Si $x(n) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\omega)$

entonces $e^{j\omega_0 n}\, x(n) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\omega - \omega_0)$

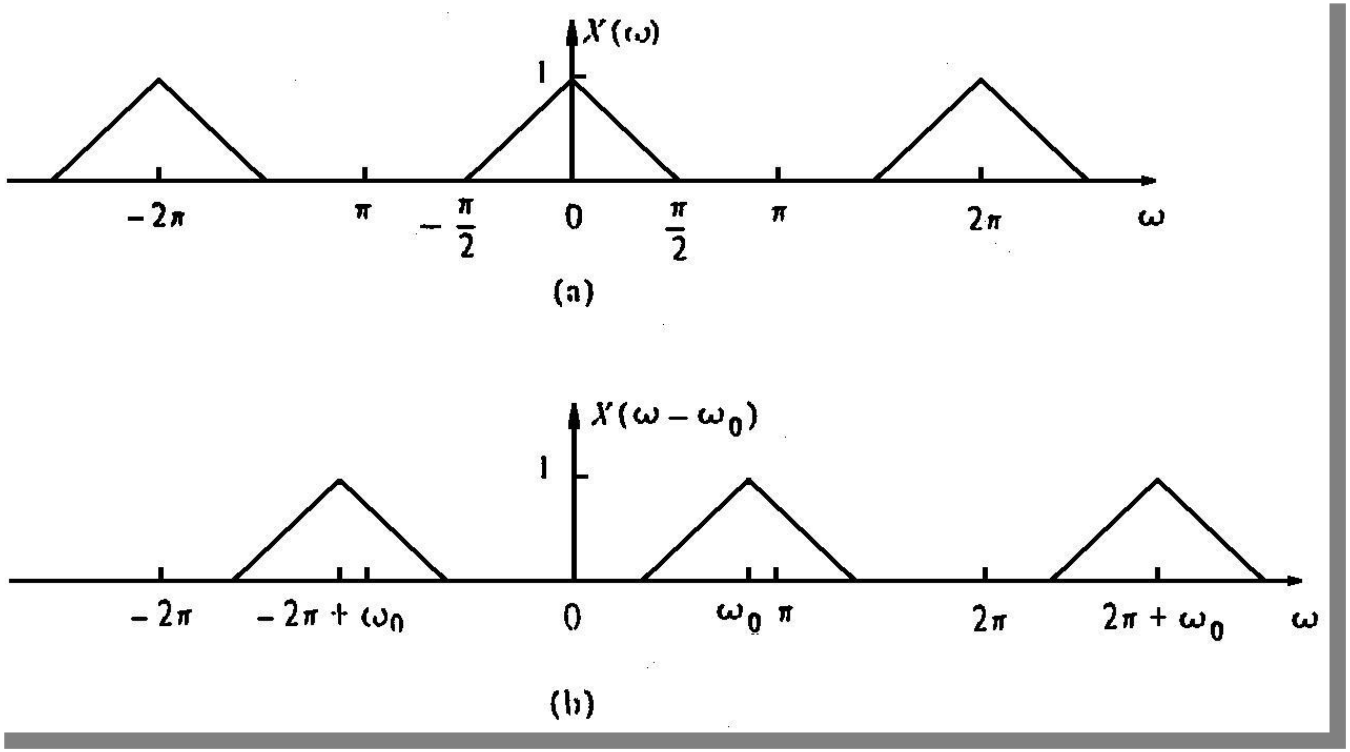
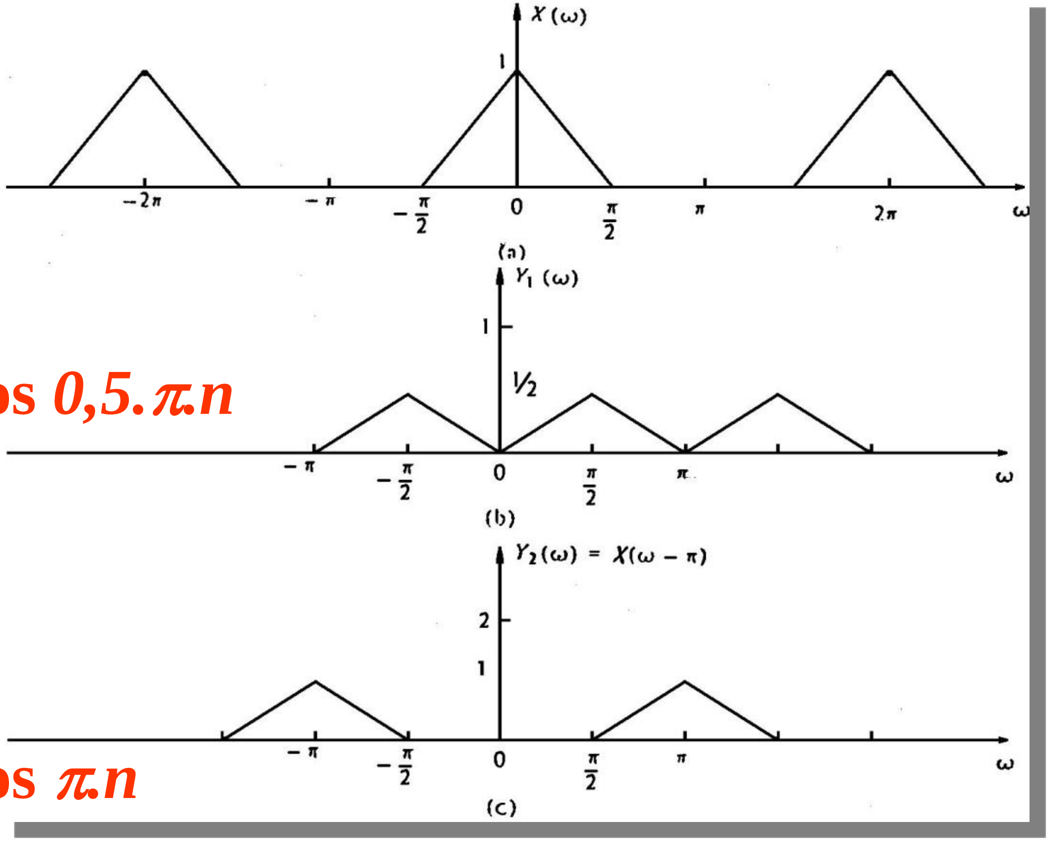


Fig. 12: Propiedad de corrimiento en frecuencia

- Modulación:

Si $\quad x(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega)$

entonces $\quad x(n)\cos\omega_0 n \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2}\left[X(\omega+\omega_0)+X(\omega-\omega_0)\right]$



$y_1(n) = x(n)\cos 0{,}5.\pi.n$

$y_2(n) = x(n)\cos \pi.n$

Fig. 13: Teorema de Modulación

Prueba del Teorema de Modulación

Sea $X(\omega)$ la DTFT de la señal $x(n)$, y sea

$$x_1(n) = x(n)\cos(\omega_0 n)$$

Entonces

$$X_1(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\cos(\omega_0 n)e^{-j\omega n}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{j\omega_0 n}e^{-j\omega n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega_0 n}e^{-j\omega n}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j(\omega-\omega_0)n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j(\omega+\omega_0)n}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[X(\omega-\omega_0) + X(\omega+\omega_0)\right]$$

- Multiplicación de 2 secuencias (Windowing Theorem)

Si $$x_1(n) \xleftrightarrow{F} X_1(\omega)$$

$$x_2(n) \xleftrightarrow{F} X_2(\omega)$$

Luego $$x_3(n) = x_1(n).x_2(n) \xleftrightarrow{F} X_3(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(\lambda) X_2(\omega-\lambda)\, d\lambda$$

Producto en el dominio temporal $\longleftrightarrow$ Convolución en el dominio frecuencial

- Diferenciación en el dominio frecuencial

Si $$x(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega)$$

entonces $$n\, x(n) \xleftrightarrow{F} j\,\frac{d\, X(\omega)}{d\omega}$$

- Teorema de Correlación

Si $$x_1(n) \xleftrightarrow{F} X_1(\omega)$$

$$x_2(n) \xleftrightarrow{F} X_2(\omega)$$

Luego $$r_{x_1x_2}(n) \xleftrightarrow{F} S_{x_1x_2}(\omega) = X_1(\omega)\,X_2(-\omega)$$

<u>Caso particular:</u> Wiener-Khintchine

Sea *x(n)* una señal a valores reales. Entonces:

$$r_{xx}(\ell) \xleftrightarrow{F} S_{xx}(\omega)$$

El espectro de densidad de energía de una señal de energía finita es la Transformada de Fourier en Tiempo Discreto de su secuencia de autocorrelación.

Prueba del Teorema de Wiener-Khintchine

Sea $X(\omega)$ la DTFT de la señal a valores reales $x(n)$, y sea $r_{xx}(\ell)$ su secuencia de autocorrelación. Entonces

$$F\{r_{xx}(\ell)\} = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} r_{xx}(\ell) e^{-j\omega\ell} = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x(n+\ell)\right]e^{-j\omega\ell} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} x(n+\ell) e^{-j\omega\ell}$$

Cambio de variable

$$m = n + \ell$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) e^{-j\omega(m-n)}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{j\omega n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) e^{-j\omega m}$$

$$= X^*(\omega) X(\omega) = |X(\omega)|^2 = S_{xx}(\omega)$$

- Teorema de Parseval

Si $$x_1(n) \xleftrightarrow{F} X_1(\omega)$$

$$x_2(n) \xleftrightarrow{F} X_2(\omega)$$

Luego $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)\, x_2^*(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(\omega)\, X_2^*(\omega)\, d\omega$$

7. DTFT de Señales periódicas

Si se admiten como posibles transformadas los **impulsos**, puede ampliarse la clase de funciones en TD que son transformables Fourier para incluir a las funciones periódicas.

Consideremos la señal periódica senoidal

$$x(n) = e^{j\omega_0 n}$$

Su Transformada de Fourier (calculada aplicando la definición) resulta

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 n} e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega-\omega_0)n}$$

Puede probarse que resulta igual a un tren de impulsos de la forma

$$X(\omega) = 2\pi \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi\ell)$$

Para ver esto, basta con calcular la Transformada Inversa y verificar que es igual a $x(n)$. En efecto

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)e^{j\omega n}\,d\omega = \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\omega_0-2\pi\ell)e^{j\omega n}\,d\omega$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega n}\delta(\omega-\omega_0-2\pi\ell)\,d\omega = e^{j(\omega_0+2\pi\ell)n} = e^{j\omega_0 n} = x(n)$$

Donde en el pasaje al segundo renglón se usó el hecho de que siempre existe un indice ℓ de manera que la frecuencia $(\omega_0 + 2\,\pi\ell)$ cae en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

Consideremos ahora una señal $x(n)$ periódica con período N, representada con su Serie de Fourier

$$\boxed{x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k\, e^{j\frac{2\pi k n}{N}}}$$

Su Transformada de Fourier resulta entonces

$$X(\omega) = 2\pi \sum_{k=0}^{N-1} c_k \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N} - 2\pi\ell\right)$$

Es decir que la Transformada de Fourier de una señal periódica puede calcularse en forma directa a partir de sus coeficientes de Fourier c_k .

Ejemplo 1:

$$x(n) = \cos\omega_0 n = \frac{1}{2}e^{j\omega_0 n} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 n}$$

La transformada de Fourier resulta entonces

$$X(\omega) = \pi \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi\ell) + \pi \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi\ell)$$

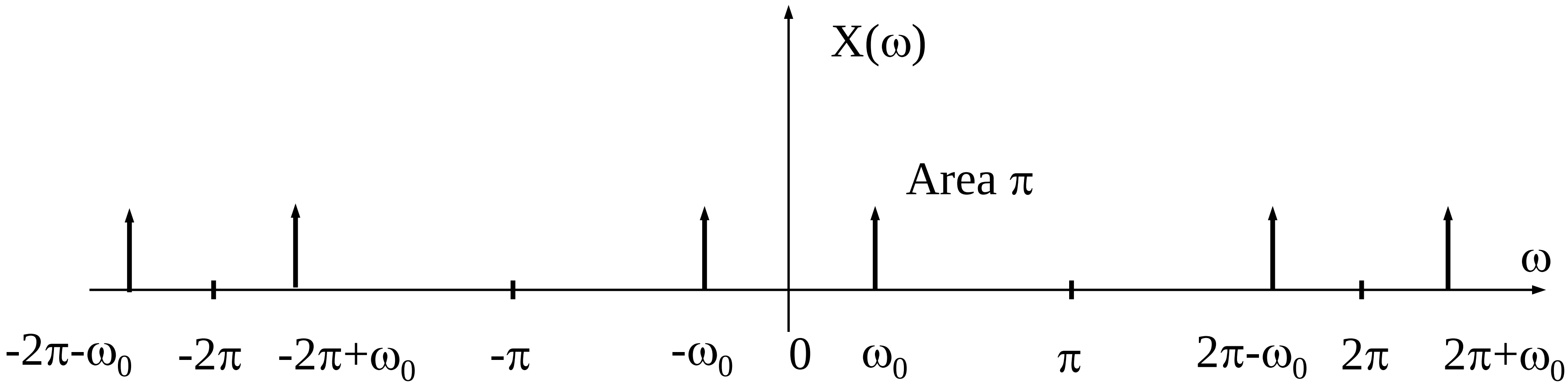


Fig. 14: Espectro de la señal

<u>Ejemplo 2:</u> Tren de impulsos periódico

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n - kN)$$

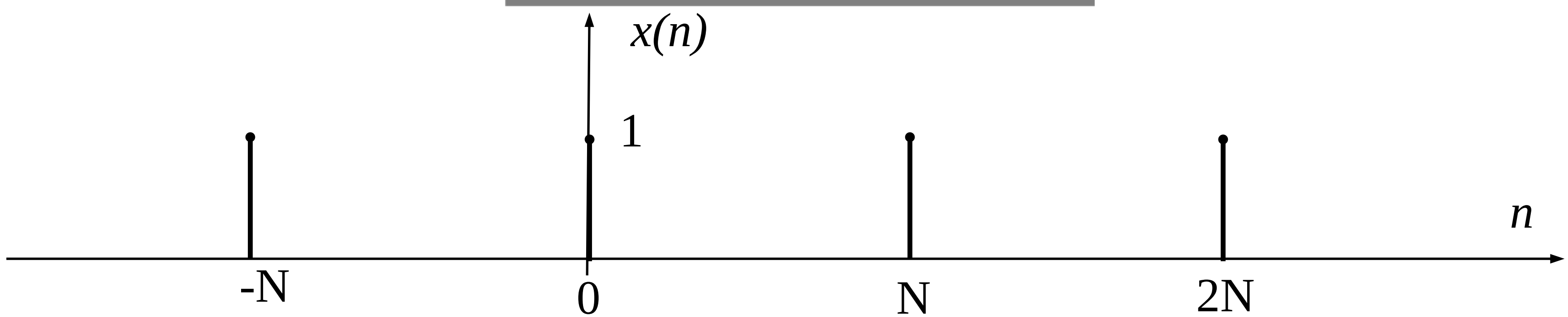


Fig. 15: Tren de impulsos

Los coeficientes de la serie de Fourier resultan

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j\frac{2\pi k n}{N}} = \frac{1}{N} \qquad ; \ \forall k$$

por lo que la Transformada de Fourier resulta

$$\boxed{X(\omega) = \frac{2\pi}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\ \sum_{\ell=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N} - 2\pi\ell\right)}$$

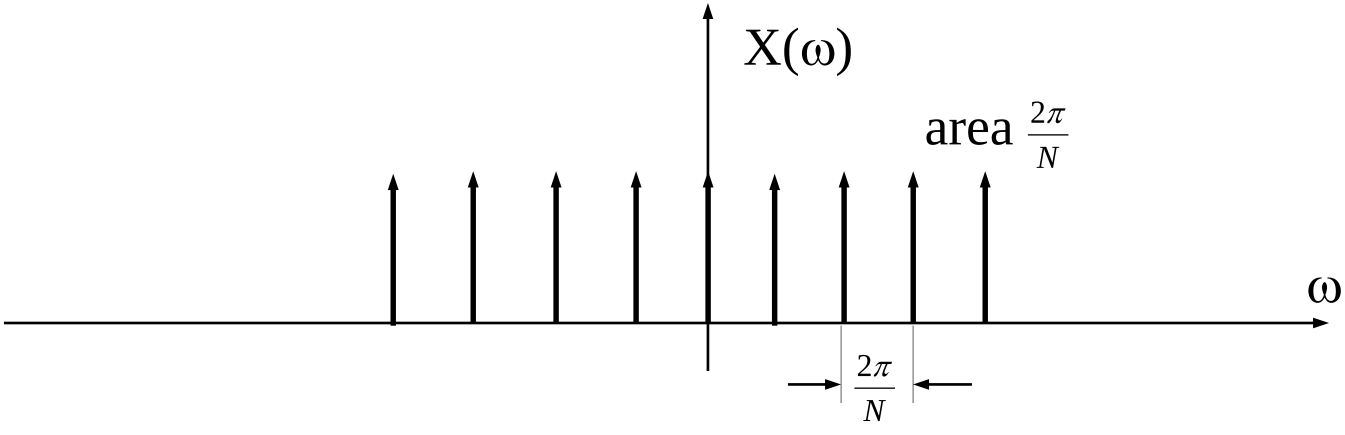


Fig. 16: Espectro de la señal