

Sistemas y Señales I

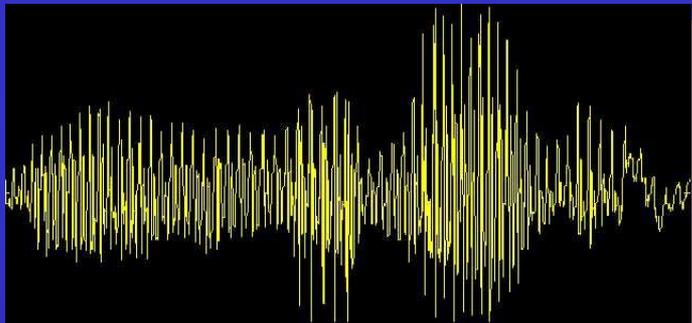
Análisis Frecuencial de Señales - Resumen

Dr. Juan Carlos Gómez

Análisis Frecuencial de Señales en TD

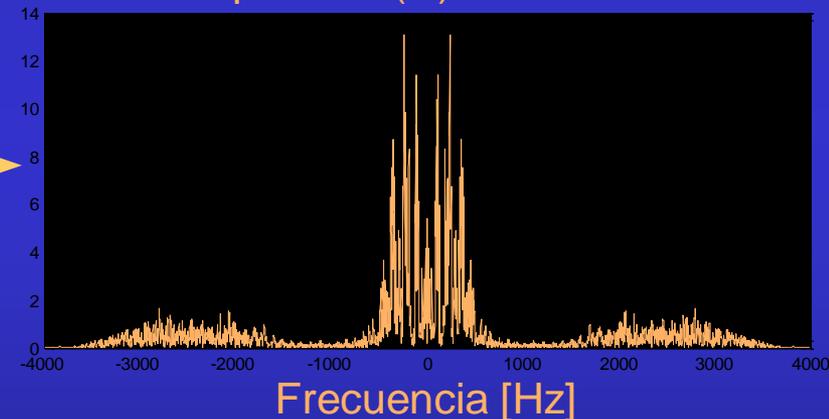
Motivación

señal analógica $x(t)$



contenido frecuencial
(en función del tiempo ?)

Espectro $X(\omega)$ de la señal



Transformada de Fourier en TC

Muestreo + DTFT

Muestreo + Enventanado + DTFT

Otros: Transformada Wavelet

Transformada de Fourier en Tiempo Continuo

Permite representar una señal de energía finita $x(t)$ como la superposición de infinitas senoides cubriendo todo el rango de frecuencias

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(F) e^{j2\pi Ft} dF$$

TFI

superposición

Senoides complejas

donde $X(F)$ es la **Transformada de Fourier** de $x(t)$, definida como

$$X(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi Ft} dt$$

TF

Problema con la TF

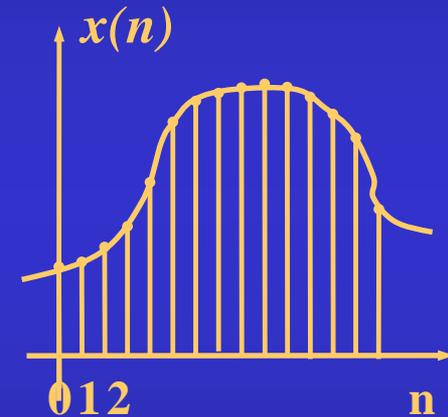
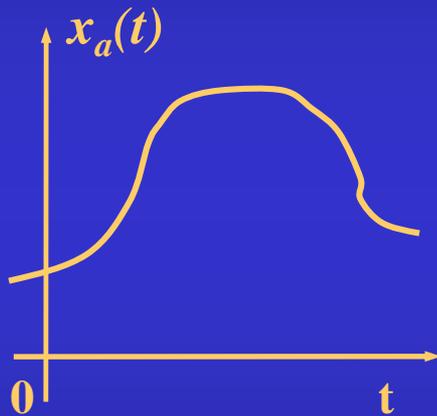
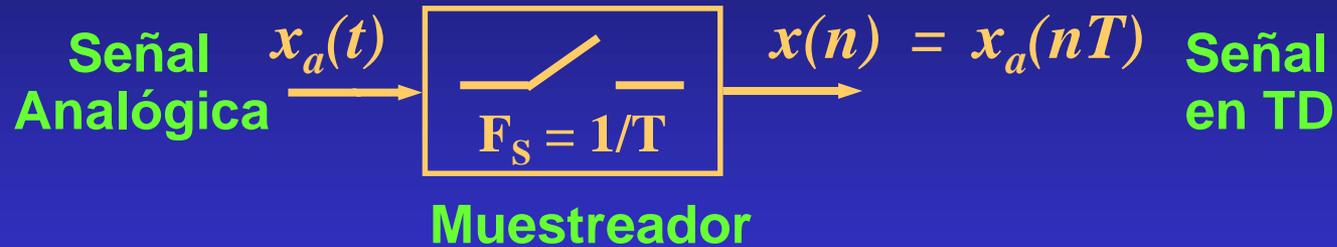
Usualmente uno no dispone de una expresión analítica de $x(t)$ y por lo tanto no podría calcularse la Transformada de Fourier.



Solución en la “Era Digital”

Procesamiento Digital de la Señal

Muestreo



Contenido Frecuencial → Transformada de Fourier en Tiempo Discreto (DTFT)

Transformada de Fourier en Tiempo Discreto

Permite representar una señal de energía finita en tiempo discreto $x(n)$ como la superposición de infinitas senoides cubriendo todo el rango de frecuencias

$$x(n) = \int_{-1/2}^{1/2} X(f) e^{j2\pi f n} df$$

IDTFT

superposición

Senoides complejas

donde $X(f)$ es la **Transformada de Fourier en Tiempo Discreto (DTFT)** de $x(n)$, definida como

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j2\pi f n}$$

DTFT

Relación entre el espectro de la señal analógica y el espectro de la señal muestreada

Esta relación es provista por el **Teorema de Muestreo**. El espectro $X(f)$ de la señal en TD consiste de una repetición periódica del espectro $X_a(F)$ de la señal en tiempo continuo, escalado por F_s , es decir:

$$X\left(\frac{F}{F_s}\right) = F_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(F + kF_s)$$

Si se pudiera computar $X(f)$, entonces el espectro de la señal en tiempo continuo podría recuperarse a partir del período fundamental de ese espectro, re-escalando por $1/F_s$, siempre que se verifique la condición $F_s > 2 F_{max}$ del Teorema de Muestreo.

Problema con la DTFT

De la definición de la DTFT

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j2\pi f n}$$

vemos que hay dos problemas para su cálculo a partir de las muestras:

1. Es una suma infinita !!!! → **Enventanado**
2. Existen infinitas frecuencias donde calcularla !!!! → **cálculo en un número finito N de frecuencias equiespaciadas en el período fundamental.**

Enventanado

$$\tilde{x}(n) = x(n)w(n)$$

Señal truncada

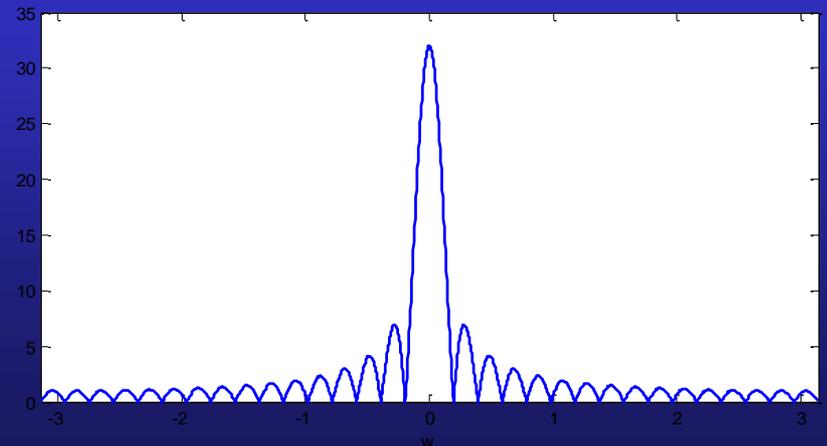
Ventana de longitud L

Ejemplo: Ventana rectangular

$$w(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0 & \text{c.o.c.} \end{cases}$$

$$W(\omega) = e^{-j\omega(L-1)/2} \frac{\text{sen}(\omega L/2)}{\text{sen}(\omega/2)}$$

Espectro de Módulo



Relación entre el espectro de la señal muestreada y el espectro de la señal enventanada

$$\tilde{X}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\lambda) W(\omega - \lambda) d\lambda$$

Es claro entonces que la forma del espectro de la ventana $W(\omega)$ afectará al espectro de la señal truncada con el cuál se quiere aproximar a $X(\omega)$.

Vemos que para lograr que

$$\tilde{X}(\omega) = X(\omega)$$

el espectro de la ventana “ideal” debería ser un impulso, pero eso equivaldría a tener

$$w(n) = 1 \quad ; \quad \forall n$$

Es decir, no se estaría truncando la señal !!!

Espectro de la señal inventanada

Calculamos la DTFT de la señal $\tilde{x}(n)$ en N frecuencias equiespaciadas de la forma

$$f_k = \frac{k}{N} \quad ; \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$\tilde{X}(f_k) = \sum_{n=0}^{L-1} \tilde{x}(n) e^{-j2\pi kn/N} \quad ; \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$



computable

Si $N \geq L$ puede escribirse

$$\tilde{X}(f_k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j2\pi kn/N} \quad ; \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

que se denomina **Transformada Discreta de Fourier con N-puntos (DFT con N-puntos)** de $\tilde{x}(n)$ y se denota

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j2\pi kn/N} \quad ; \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

Si $N \geq L$, la DFT con N puntos puede interpretarse como muestras en las frecuencias f_k de la DTFT de la señal enventanada $\tilde{x}(n)$.

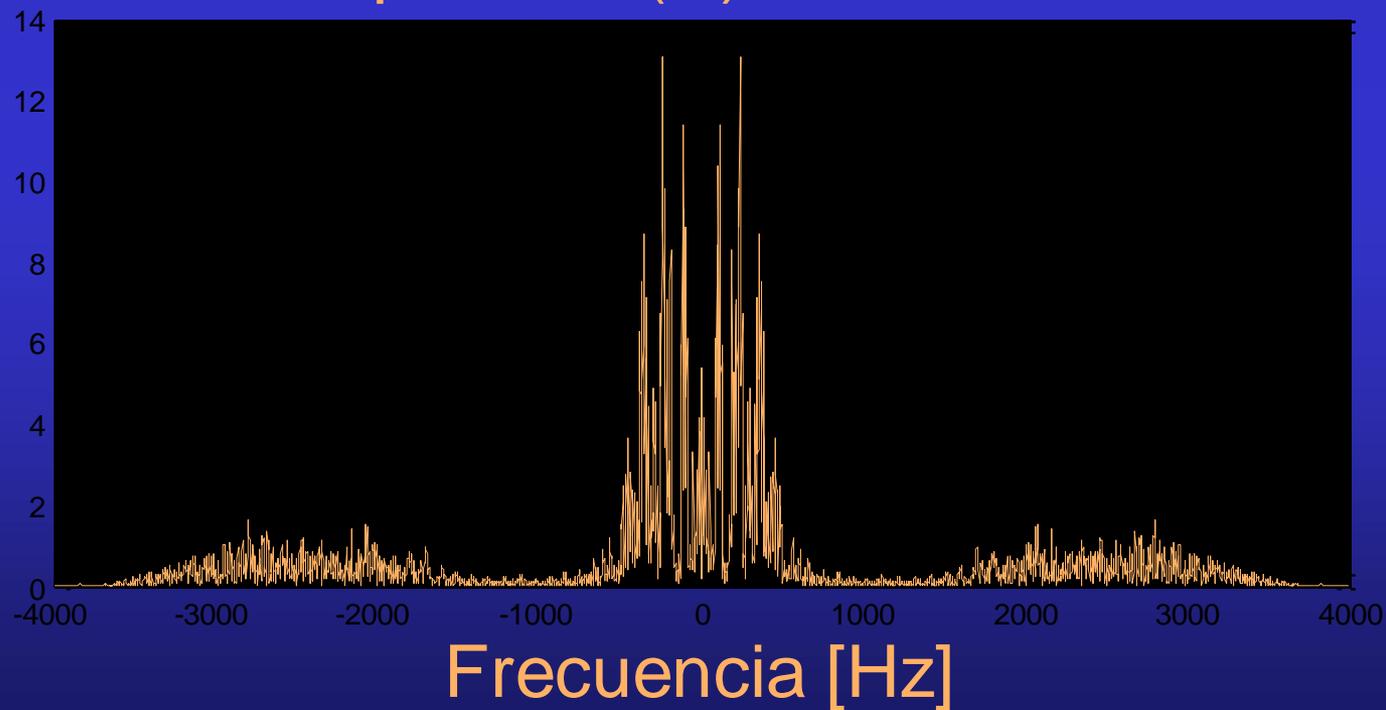
Existen diversos algoritmos para el cómputo de la DFT con N -puntos. Uno de los más difundidos es la **FFT (Fast Fourier Transform)**, que aprovecha cierta simetría para calcular en forma rápida los coeficientes, cuando $N = 2^m$.

En **Matlab** está implementado en la función **fft**.

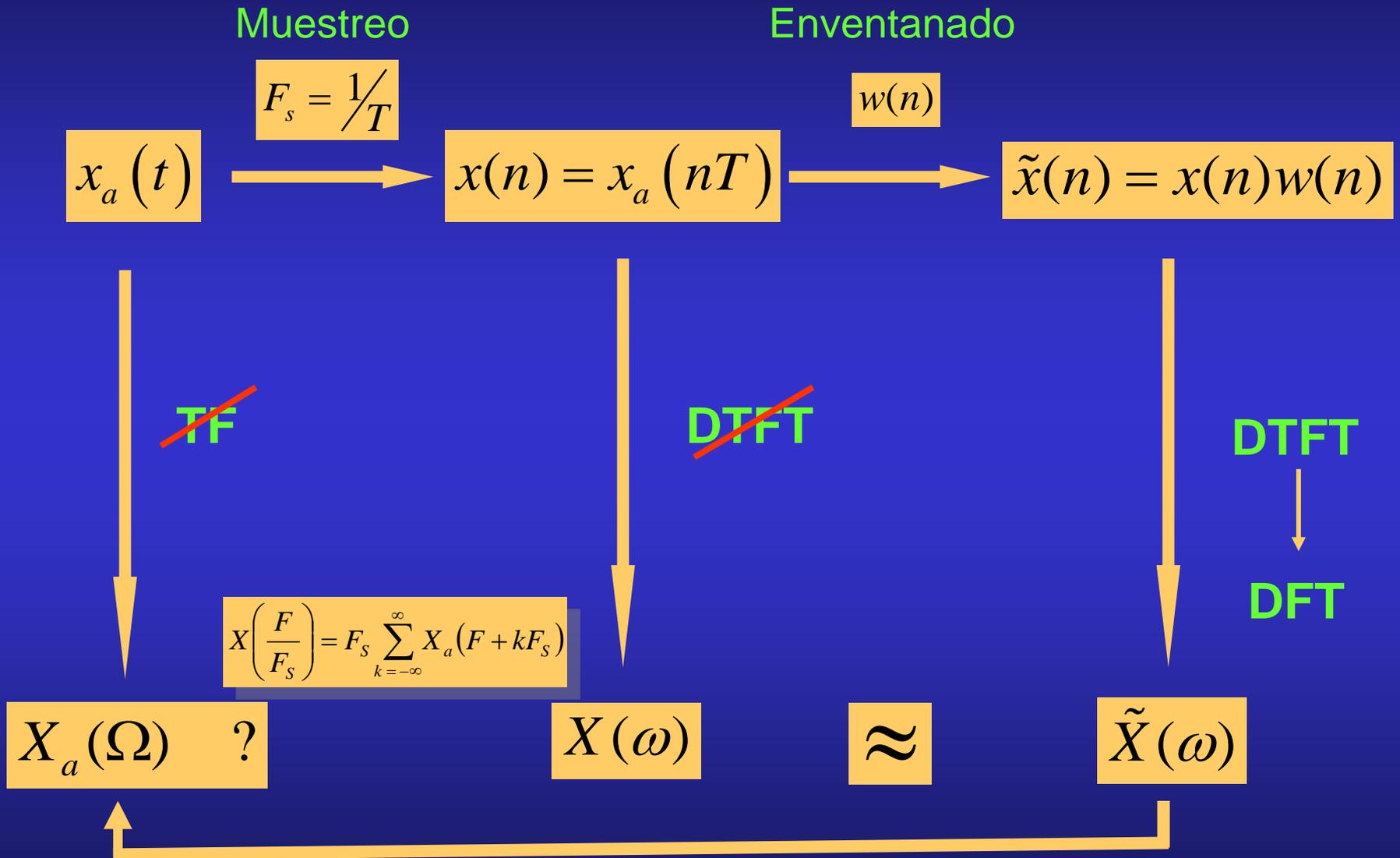
Ejemplo:

```
[y, Fs, Nbits]=wavread('bienvenido.wav');  
Y=fftshift(fft(y));  
w=[-Fs/2:Fs/length(y):Fs/2-Fs/length(y)]';  
plot(w,abs(Y))
```

Espectro $X(w)$ de la señal



Resumen



Resolución en Frecuencia

El hecho de que $W(\omega)$ no sea $\delta(\omega)$ trae varios problemas.

Consideremos una secuencia $x(n)$ que consiste de una sola senoide:

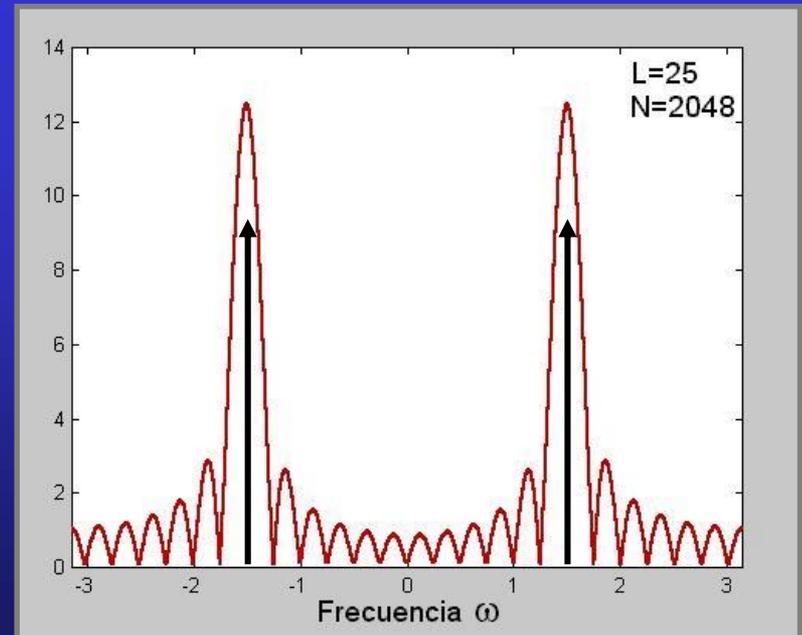
$$x(n) = \cos \omega_0 \cdot n$$

El espectro de la señal de duración finita viene dado por:

$$\tilde{X}(\omega) = \frac{1}{2} [W(\omega - \omega_0) + W(\omega + \omega_0)]$$

$$|\tilde{X}(\omega)|$$

Ventana
rectangular



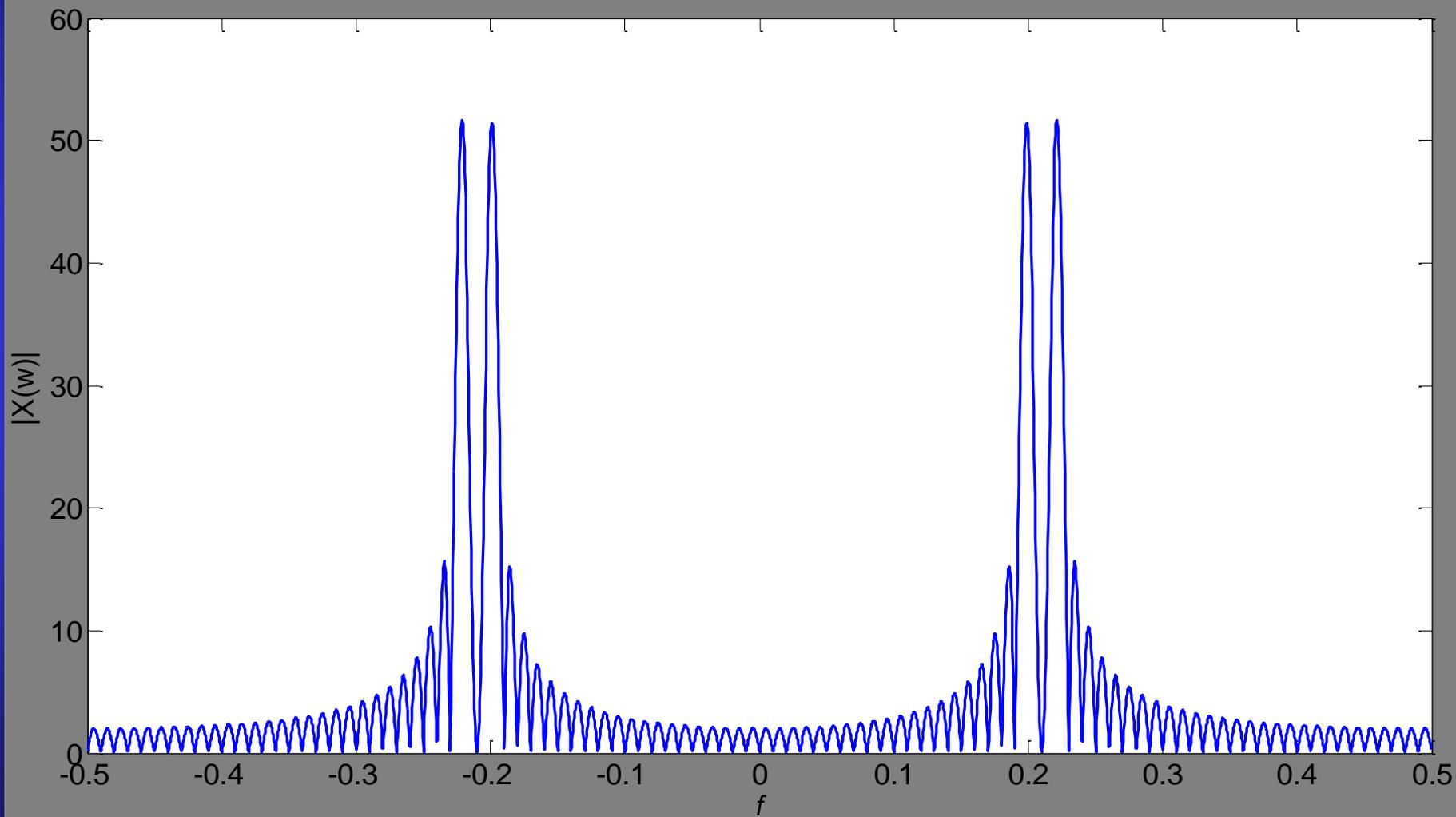
El ancho del lóbulo principal en el espectro de la ventana determina la resolución en frecuencia. Para ver esto, consideremos una señal con dos componentes de frecuencia

$$x(n) = \cos(2\pi 0.2n) + \cos(2\pi 0.22n)$$

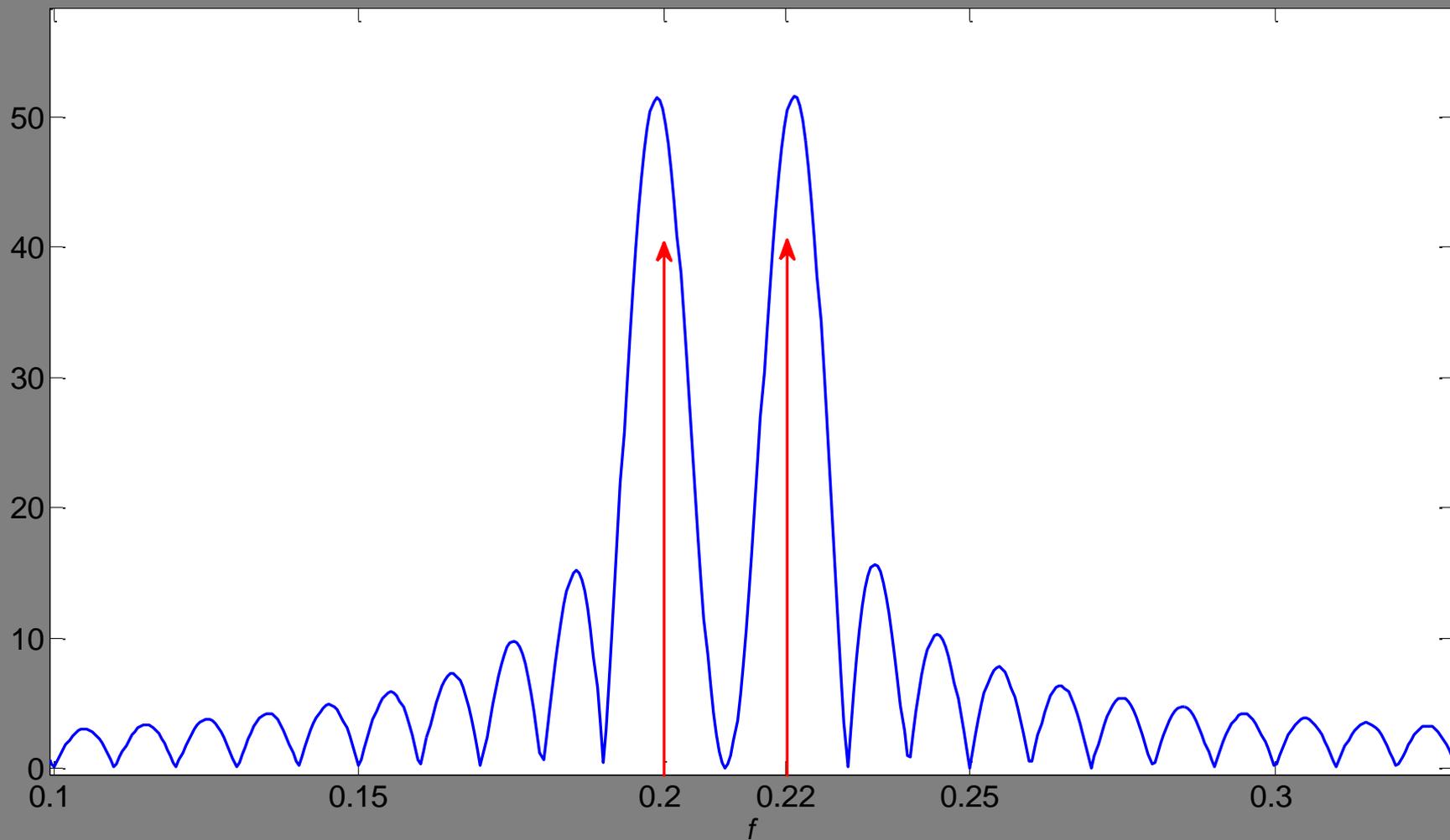
El espectro de la señal truncada a L muestras en el rango $0 \leq n \leq L-1$ es:

$$\tilde{X}(\omega) = \frac{1}{2} [W(\omega - \omega_1) + W(\omega + \omega_1) + W(\omega - \omega_2) + W(\omega + \omega_2)]$$

Ventana rectangular, $L = 100$, $N = 2048$



Ventana rectangular, $L = 100$, $N = 2048$ (zoom)



Para que se distingan 2 picos en el espectro, las frecuencias deben estar separadas al menos el ancho del lóbulo principal del espectro de la ventana, que es lo que determina la **resolución en frecuencia**.

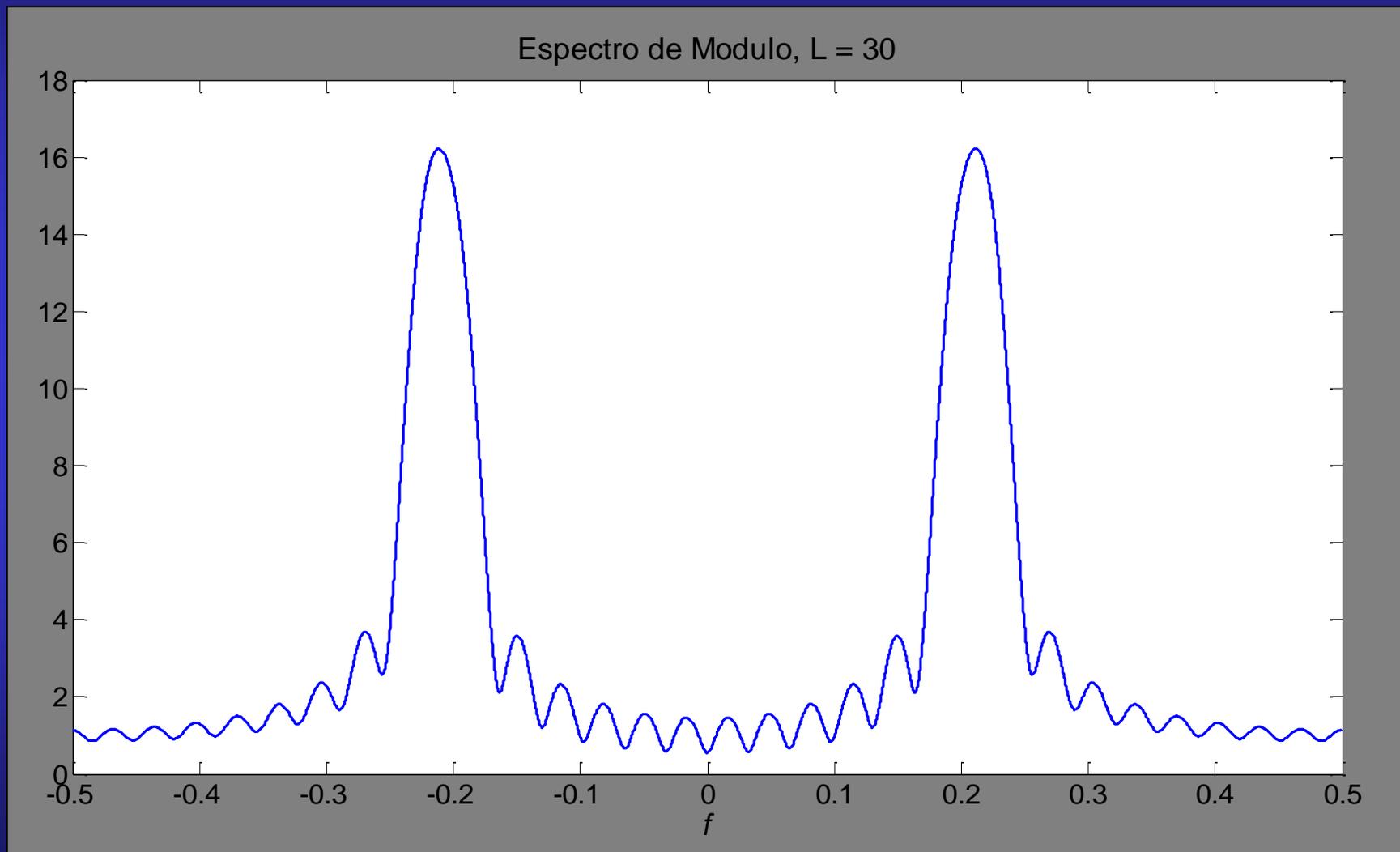
Para la **ventana rectangular** el ancho del lóbulo principal, o sea la **resolución en frecuencia**, es:

$$resol_{\omega} = \frac{4\pi}{L}$$

$$resol_f = \frac{2}{L}$$

$$resol_F = \frac{2F_s}{L}$$

Ventana rectangular, $L = 30$. No se pueden resolver las dos componentes senoidales.



Resolución en Frecuencia

Resolución Temporal

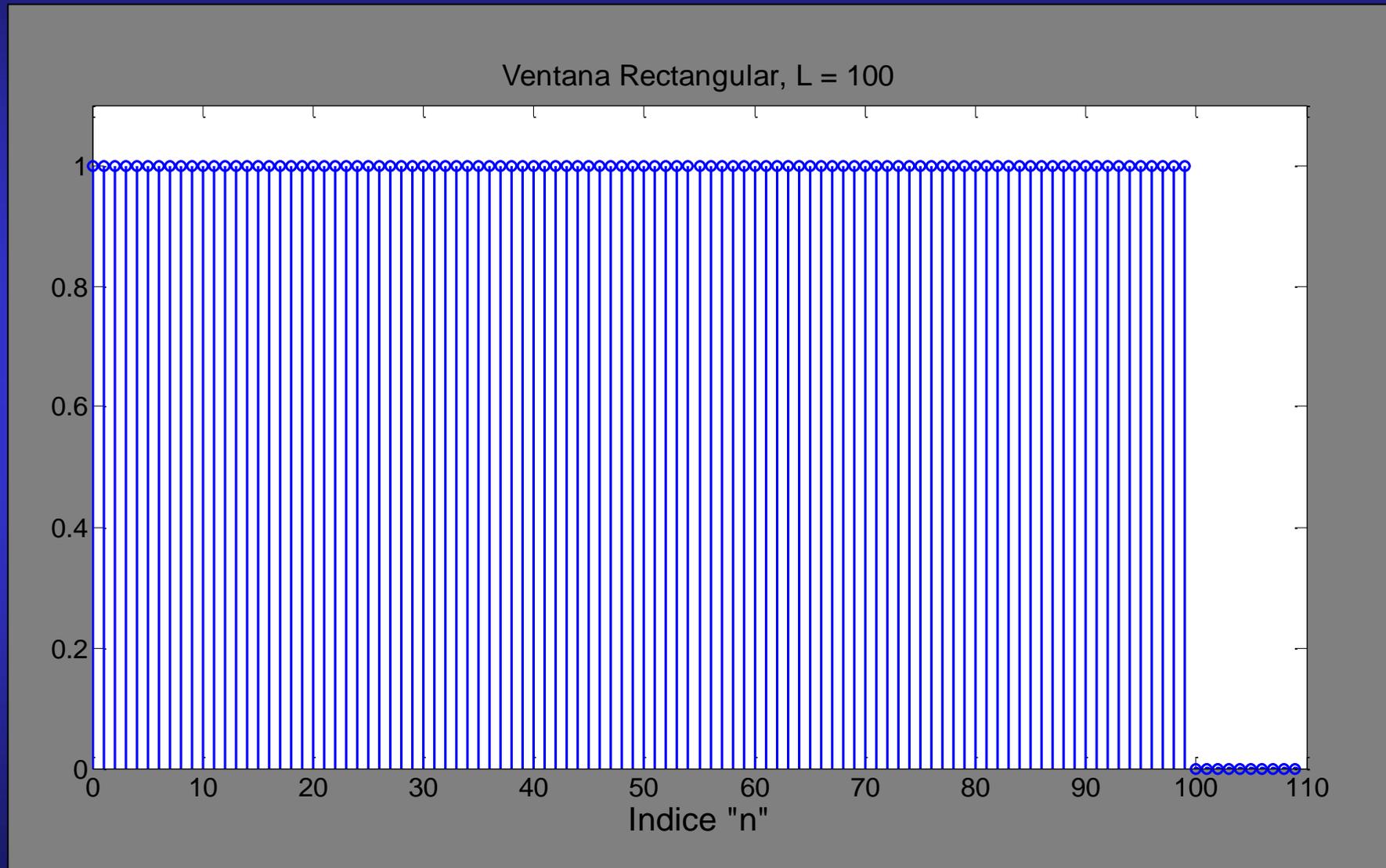
Compromiso

L crece

Resol. frecuencia **mejora**

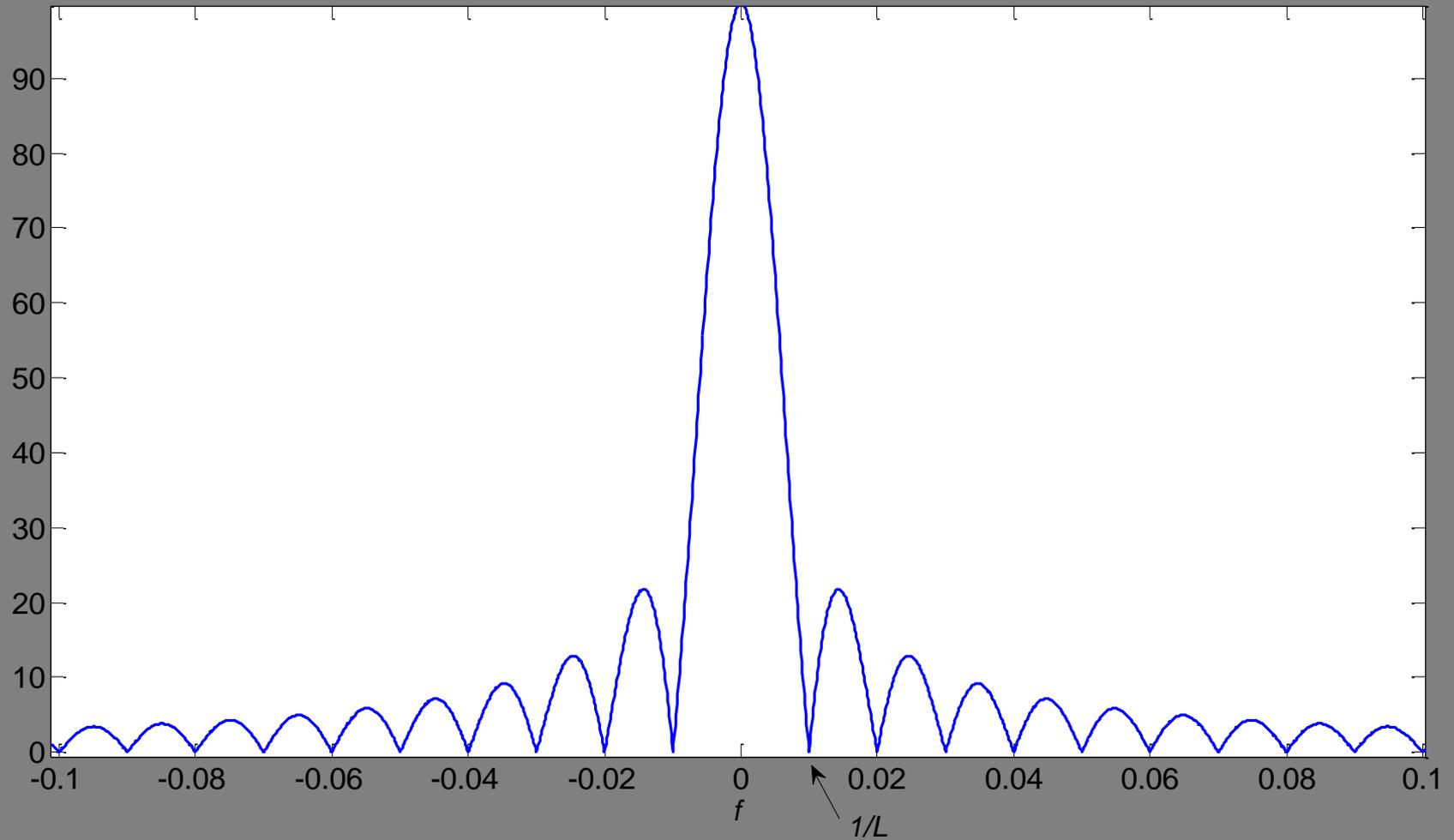
Resol. temporal **empeora**

Ventana Rectangular

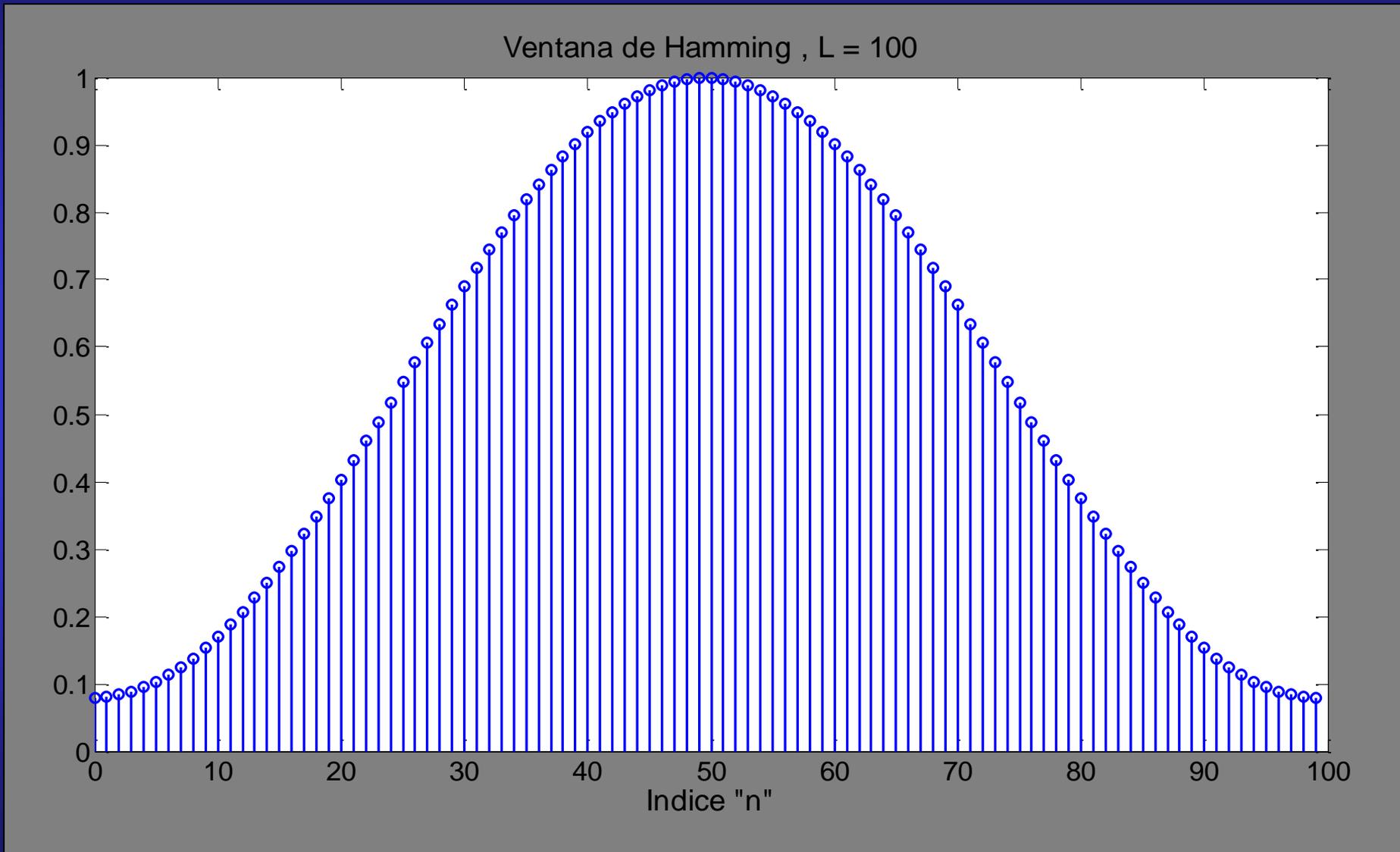


Espectro de la Ventana Rectangular

Espectro de modulo de la ventana rectangular, $L= 100$

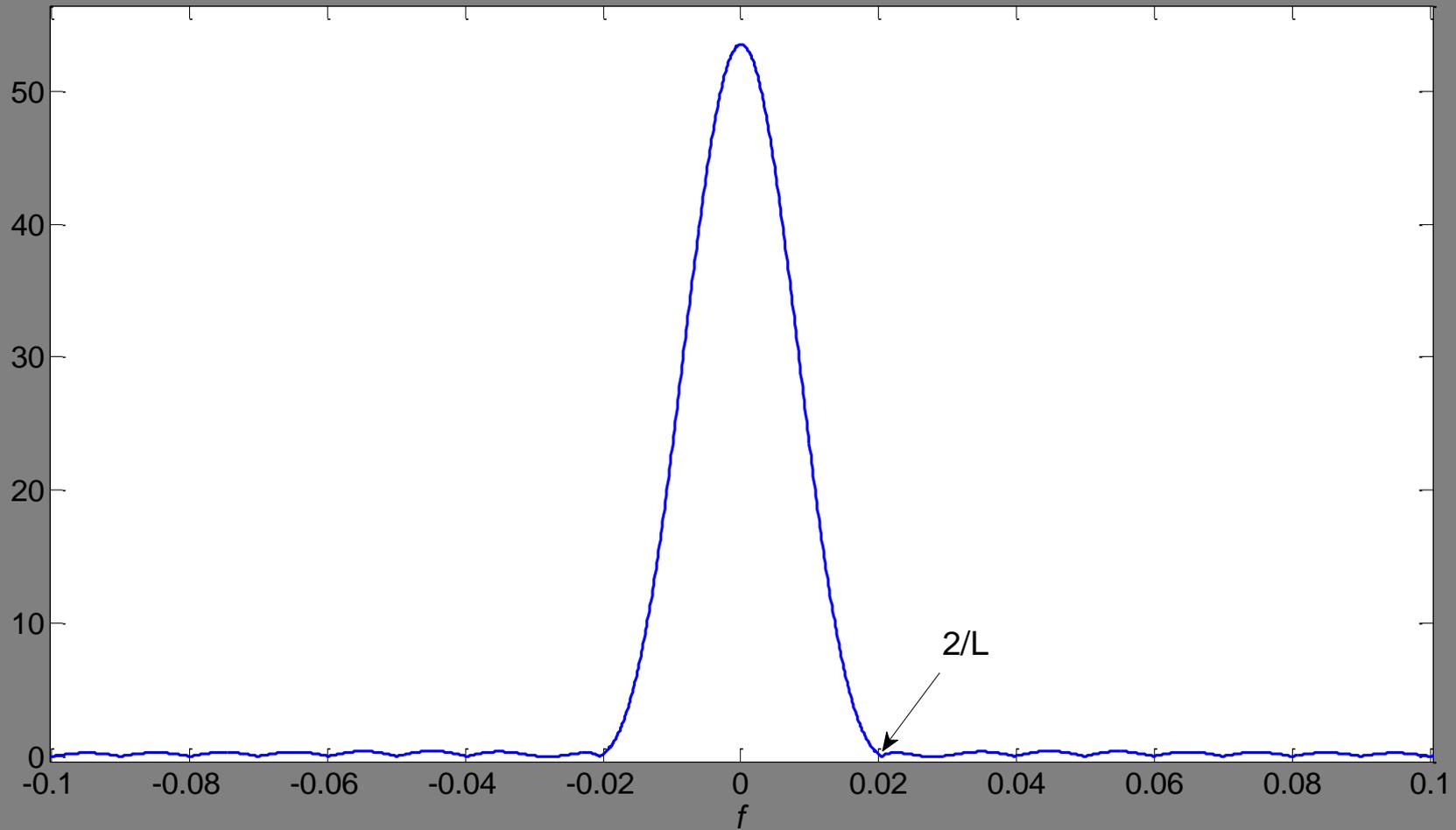


Ventana de Hamming

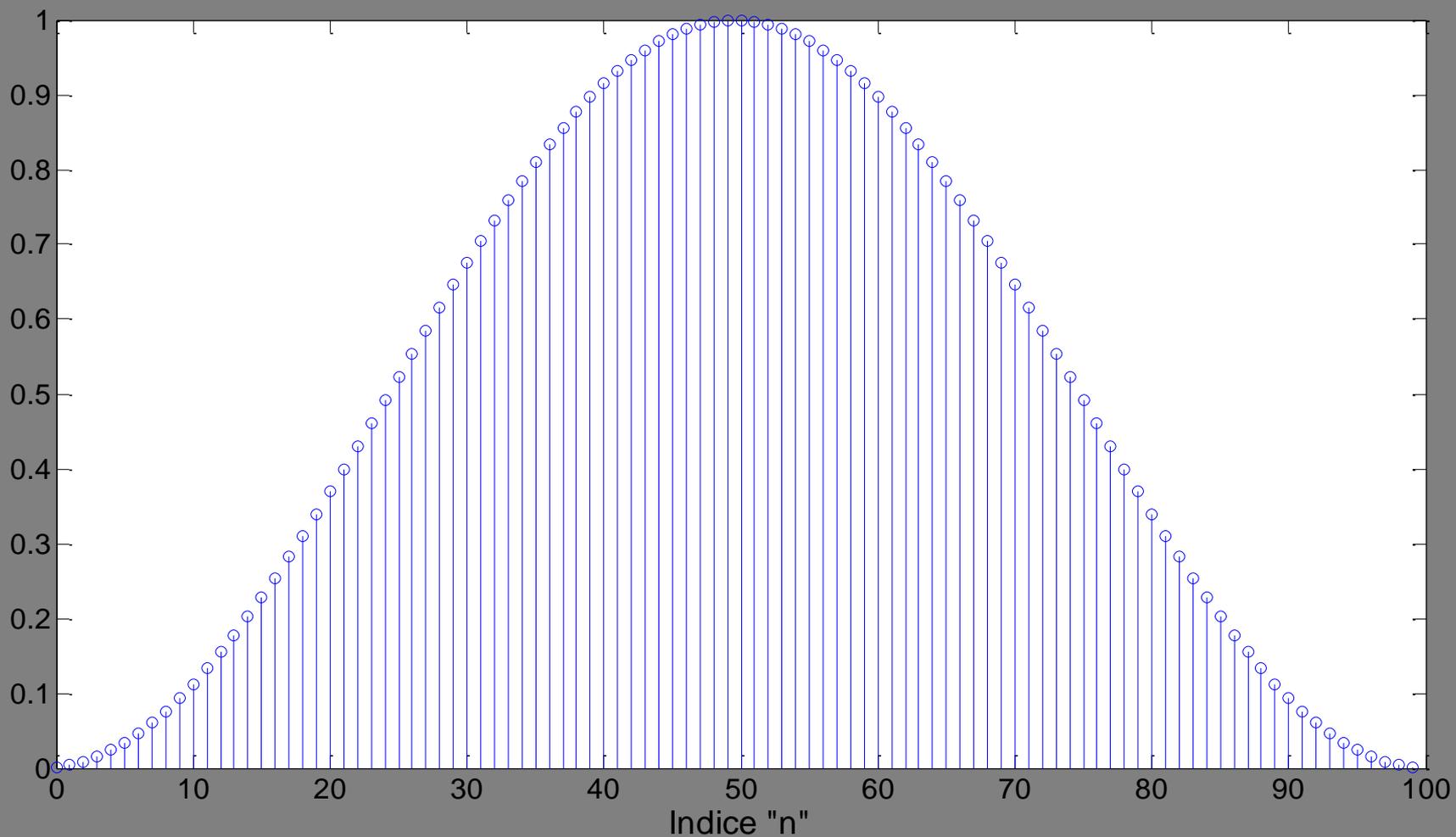


Espectro de la Ventana de Hamming

Espectro de Modulo de la Ventana de Hamming, $L = 100$



Ventana de Hann



Espectro de la Ventana de Hann

