Análisis de Sistemas Lineales Estacionarios en el dominio Transformado de Laplace

Juan Carlos Gómez

1.Introducción

Como vimos en los capítulos anteriores, el análisis de la respuesta a entradas arbitrarias de Sistemas Lineales Estacionarios (SLE) en Tiempo Continuo (TC) involucra la solución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO´s) o, si se conoce la respuesta al impulso del sistema, la evaluación de la integral de convolución entre la entrada y la respuesta al impulso.
Estas técnicas de análisis suelen implicar la realización de tediosas operaciones matemáticas aún para el caso de señales de entrada relativamente simples. El uso de la Transformada de Laplace simplifica considerablemente la solución del problema ya que, como veremos más adelante, convierte las ecuaciones diferenciales ordinarias en ecuaciones algebraicas en las transformadas, y la integral de convolución en un producto de transformadas.
Otras ventajas del uso de la transformada de Laplace para el análisis de SLE son que posibilita la obtención de la respuesta total (i.e., la respuesta libre más la respuesta forzada), y que permite incluir automáticamente las condiciones iniciales en la solución del problema.

En la Sección 2 introducimos las definiciones de las transformadas de Laplace bilateral y unilateral, así como de la transformada inversa, y detallamos las principales propiedades. En la Sección 3 introducimos el concepto de Función Transferencia de un Sistema Lineal Estacionario.

2. La Transformada de Laplace

2.1 Transformada Bilateral de Laplace

La Transformada Bilateral de Laplace de una señal *f(t)* se define como

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \,. \qquad (1)$$

Una señal *f(t)* tiene Transformada de Laplace (es decir, la integral impropia converge) si la función es de **orden exponencial**, es decir si existe un número real σ para el cual

$$\lim_{t \to \infty} \left| f(t) e^{-\sigma t} \right| = 0 \,.$$

Esto significa que la función no puede crecer más rápido que la exponencial. En general *F(s)* existe en una franja de valores definida por

$$\alpha < \Re e(s) < \beta \,,$$

que se denomina **región de convergencia**.

2.2. Transformada Unilateral de Laplace

En muchas aplicaciones prácticas de la Transformada de Laplace, como ser en la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias, se conocen la señales a partir de un cierto instante ($t = 0$) y no a partir de $t = -\infty$. En estos casos es más práctico usar la **Transformada Unilateral de Laplace** L_-, que tiene como extremo inferior de integración 0^- (es decir, el valor un instante antes de $t = 0$) en lugar de

$-\infty$, como en la definición de la Transformada bilateral en (1). La transformada unilateral de Laplace L_{-} se define entonces como

$$F_{-}(s) = L_{-}\{f(t)\} = \int_{0^{-}}^{\infty} f(t)e^{-st}dt \,. \qquad (2)$$

Como en el caso de la transformada bilateral de Laplace, la transformada unilateral de Laplace existe si la función *f(t)* es de orden exponencial, es decir si existe un número real σ para el cual

$$\lim_{t\to\infty} \left| f(t)e^{-\sigma t} \right| = 0 \,.$$

El mínimo valor de σ para el cual se verifica esta condición se denomina **abscisa de convergencia** σ_c, y la integral converge en la región

$$\Re e(s) > \sigma_c \,,$$

que se denomina **región de convergencia**.

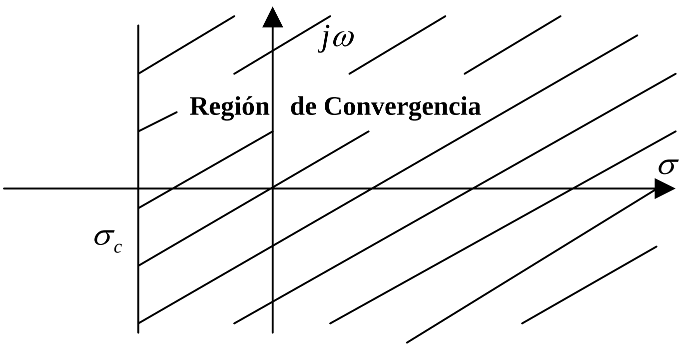

Figura 1: Región de Convergencia de la Transformada Unilateral de Laplace.

Nota: En el curso usaremos principalmente la transformada unilateral de Laplace L_{-}, y nos referiremos a ella simplemente como transformada de Laplace, y la denotaremos con L.

2.3 Transformada Inversa de Laplace

Si se conoce la Transformada de Laplace $L_{-}\{f(t)\}$ de una función *f(t)*, la función puede recuperarse mediante el uso de la **Transformada Inversa de Laplace**, que simbolizaremos $L_{-}^{-1}\{\bullet\}$, y que se define como

$$L_{-}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds \,. \qquad (3)$$

Para el caso de la Transformada Bilateral de Laplace, la Transformada Inversa no está unívocamente determinada a partir de la transformada, sino que debe especificarse también la región de convergencia.

Para el cálculo de la integral en la expresión de la transformada inversa (3), se puede recurrir al Teorema de los Residuos del Análisis Complejo, que resumimos a continuación (ver [1]).

Teorema de los Residuos: Sea C una curva cerrada en el plano complejo tal que la función *F(s)* es analítica en el interior de, y sobre C, excepto en puntos singulares aislados $s_1, s_2, \cdots, s_n$, para los cuales los residuos son $K_1, K_2, \cdots, K_n$, respectivamente. Entonces

$$\oint_C F(s)ds = 2\pi j\left(K_1 + K_2 + \cdots + K_n\right)$$

donde $\int_C (\bullet)ds$ es la integral de línea a lo largo de la curva C en sentido anti-horario. ○

La Transformada Inversa de una función *F(s)* se puede obtener aplicando el Teorema de los Residuos a la función $F(s)e^{st}$ a lo largo de una trayectoria semicircular en el plano complejo como la indicada en la figura

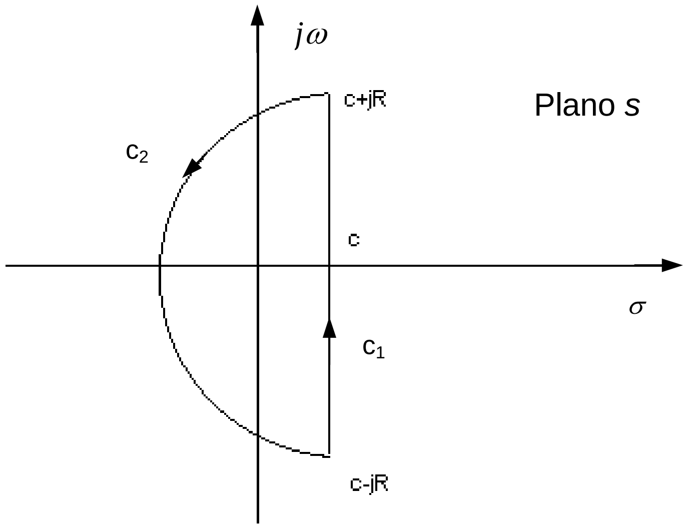

Figura 2: Contorno de Integración para el cálculo de la transformada inversa.

Procediendo de esta manera se obtiene

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_{C_1+C_2} F(s)e^{st}ds \;=\; K_1 + K_2 + \cdots + K_n\,,$$

donde $K_1, K_2, \cdots, K_n$ son los residuos de $F(s)e^{st}$, y $C_1 + C_2$ es el camino cerrado formado por los tramos C_1 y C_2. Esta última ecuación puede escribirse como

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_{C_1+C_2} F(s)e^{st}ds \;=\; \frac{1}{2\pi j}\int_{c-jR}^{c+jR} F(s)e^{st}ds + \frac{1}{2\pi j}\int_{C_2} F(s)e^{st}ds = \sum_{m=1}^{n} K_m\,.$$

Puede probarse que, para $t > 0$, la integral a lo largo de C_2 tiende a cero para $R \to \infty$ (siempre que $F(s) \to 0$ uniformemente con R). Tomando el límite con $R \to \infty$ y considerando la definición de la transformada inversa en (3) podemos entonces concluir que, para $t > 0$

$$f(t) = \sum_{m=1}^{n} K_m \,,$$

Es decir que **la Transformada Inversa de Laplace de la función $F(s)$ se puede calcular como la suma de los residuos de la función $F(s)e^{st}$ en las singularidades de $F(s)$.**

Nota: En la práctica, en general es más fácil expandir la función $F(s)$ en una suma de fracciones simples y usar una Tabla de Pares Transformados para anti-transformar cada término elemental en esa suma.

2.4. Propiedades de la Transformada de Laplace

A continuación detallamos las principales propiedades de la Transformada de Laplace. No incluímos sin embargo las correspondientes pruebas, que el lector interesado puede encontrar en [1].

- **Linealidad**

$$L\{af(t) + bg(t)\} = aF(s) + bG(s)$$

donde $F(s) = L\{f(t)\}$, y $G(s) = L\{g(t)\}$.

- **Transformada de la derivada**

$$L\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0^-)$$

Generalizando, la transformada de la derivada *n*-ésima es

$$L\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0^-) - \cdots - f^{(n-1)}(0^-)$$

donde $f^{(n)}(0^-)$ denota la derivada ***n***-ésima de $f(t)$ calculada en $t = 0^-$.

- **Transformada de la integral**

$$L\left\{\int_{-\infty}^{t} f(\lambda)d\lambda\right\} = \frac{F(s)}{s} + \frac{y(0^-)}{s} \,,$$

donde $y(0^-)$ denota

$$y(0^-) = \int_{-\infty}^{t} f(\lambda)d\lambda \bigg|_{t=0^-} .$$

- **Corrimiento en frecuencia**

$$L\{f(t)e^{-at}\} = F(s+a)$$

- **Retardo temporal**

$$L\{f(t-\lambda)\mu(t-\lambda)\} = e^{-s\lambda} L\{f(t)\mu(t)\}$$

- **Escalado temporal**

$$L\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

- **Transformada de la convolución**
  Sean $f(t)$ y $g(t)$ dos funciones que son cero para $t < 0$, entonces

$$L\{f(t) * g(t)\} = F(s)G(s).$$

- **Transformada de un producto**

$$L\{f(t)g(t)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s-\lambda)G(\lambda)d\lambda$$

- **Multiplicación por tiempo**

$$L\{tf(t)\} = \frac{d}{ds} F(s)$$

- **Teorema del Valor Final**
  Asumiendo que los límites existen, entonces

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

- **Teorema del Valor Inicial**
  Asumiendo que los límites existen, entonces

$$\lim_{s\to\infty} sF(s) = f(0^+)$$

3. Función Transferencia

En esta sección usaremos la Transformada de Laplace para introducir el concepto de Función Transferencia (FT) de un Sistema Lineal Estacionario (SLE).
Consideremos un SLE con entrada $u(t)$ y salida $y(t)$, como el representado esquemáticamente en la figura

Figura 3: Sistema Lineal Estacionario

En el capítulo anterior vimos que la respuesta $y(t)$ de un SLE (relajado) a una entrada arbitraria $u(t)$ se podía calcular mediante la integral de convolución entre la entrada y la respuesta al impulso $h(t)$ del sistema como

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau\,.$$

Si aplicamos la Transformada Bilateral de Laplace en ambos miembros de la ecuación anterior, obtenemos:

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau\right]e^{-st}dt\,,\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau\right]e^{-s(t-\tau)}e^{-s\tau}dt\,,\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau\int_{-\infty}^{\infty} u(t-\tau)e^{-s(t-\tau)}dt\,,\\
&= H(s)U(s)\,,
\end{aligned}$$

donde en el paso a la penúltima línea hemos intercambiado el orden de integración, y en el paso a la última línea hemos definido

$$H(s)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau \;=\left.\frac{Y(s)}{U(s)}\right|_{\textbf{condiciones iniciales nulas}}.$$

La función *H(s)* se denomina **Función Transferencia (FT)** del sistema. Es decir, la FT es el cociente entre la Transformada de Laplace de la salida y la Transformada de Laplace de la entrada, para el sistema con condiciones iniciales nulas, y coincide con la Transformada de Laplace de la respuesta al impulso del sistema.
La FT de un SLE es una característica propia del sistema, que no depende de una particular entrada.

3.1. Funciones Transferencias Racionales

Los Sistemas Lineales Estacionarios a parámetros concentrados (de dimensión finita) pueden ser representados por ecuaciones diferenciales ordinarias a coeficientes constantes, de la forma

$$a_n y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_0 y(t)=b_m u^{(m)}(t)+b_{m-1}u^{(m-1)}(t)+\cdots+b_0 u(t)\,,$$

donde los a_n´s y b_m´s son constantes reales. Aplicando la Transformada de Laplace en ambos miembros de esta ecuación, y asumiendo condiciones iniciales nulas, obtenemos

$$\left(a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_0\right)Y(s)=\left(b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_0\right)U(s)\,,$$

por lo que la FT resulta

$$H(s)=\left.\frac{Y(s)}{U(s)}\right|_{c.i.nulas}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_0}=\frac{N(s)}{D(s)}$$

que es una Función Transferencia de tipo Racional (FTR) (ya que es el cociente de polinomios en la variable compleja *s*).
Denominamos **polos** del sistema a las raíces del polinomio denominador *D(s)*, y **ceros** a las raíces del polinomio numerador *N(s)*. Es claro que para una FTR se verifica

Grado de N(s) = nro. de ceros = m
Grado de D(s) = nro. de polos = n

Una FTR se denomina:

Propia	si	$n \geq m$
Estrictamente propia	si	$n > m$
Impropia	si	$n < m$

4. Referencias

[1] Franklin, G. F. & Powell, J. D. & Emami-Naeini, A. (1994) - ***Feedback Control of Dynamic Systems,*** 3rd edition, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA.