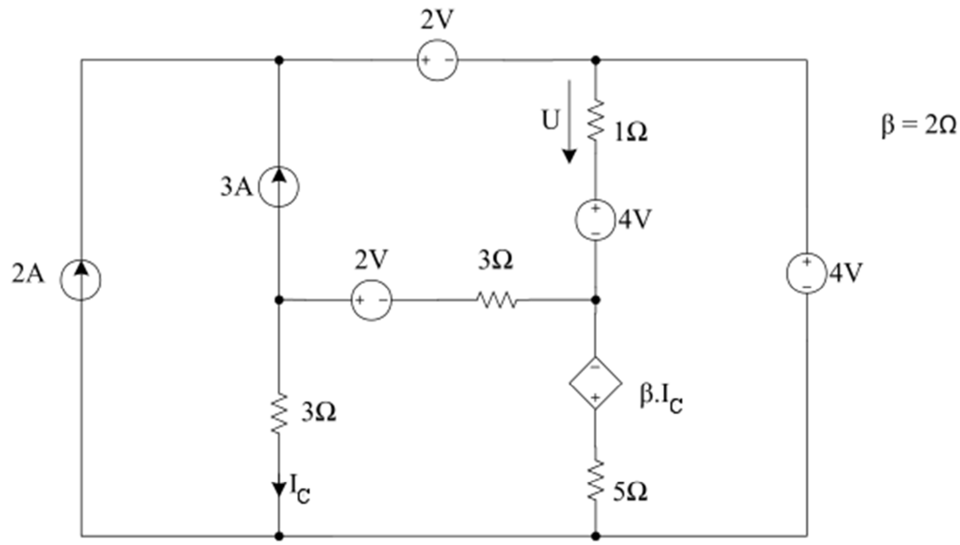
<u>Problema resuelto – Métodos sistemáticos de resolución de circuitos.</u>

Utilizando el método más conveniente obtener el valor de U.

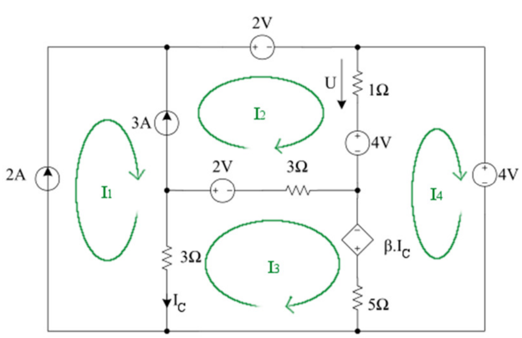


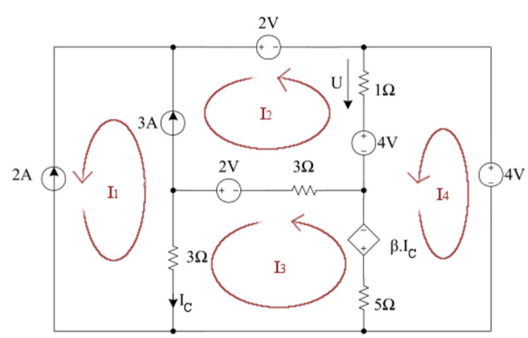
<u>Solución:</u>

1) <u>Elección del mejor método:</u>

El primer paso en este tipo de problemas es conocer cuál es el método sistemático más conveniente para resolver el circuito. Para ello, analizaremos la cantidad de ecuaciones que tendrán los sistemas que se obtengamos a parir de cada método para quedarnos luego con el que **menor número de ecuaciones** nos lleve a plantear.

Comenzaremos analizando el número de ecuaciones que produce el **método de mallas**. Para este método lo único que podemos elegir es el sentido con el que planteamos la circulación de las corrientes ficticias. Es bueno recordar que, una vez elegido el sentido de circulación, **todas las corrientes ficticias se plantean con el mismo sentido.**

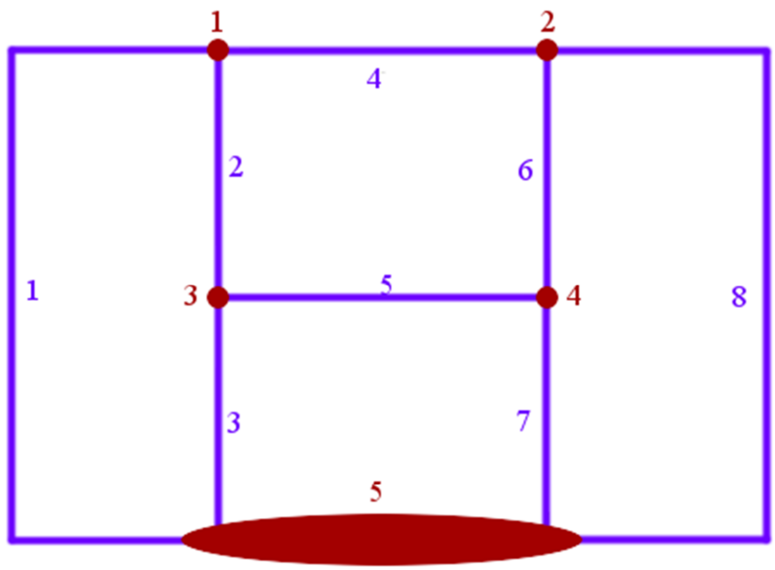




De todos modos, sea cual sea el sentido elegido, el número de ecuaciones que generan, tanto el método de mallas como el de bucles (que se analizara a continuación), al ser ambos métodos que se basan en la LKT, se puede obtener de la siguiente forma:

- Llamamos n al número de nudos que tiene el circuito.
- Llamamos b al número de ramas del mismo.

Para este ejercicio n= 5 y b = 8.



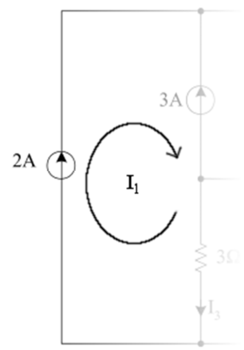
Entonces el número de corrientes independientes l, que coincide con el número de ecuaciones del método, se puede calcular como:

$$l = b - (n - 1) = b - n + 1$$

Así, para este problema, tenemos l = 4 ecuaciones del método.

Analicemos ahora si el tipo y la ubicación de los elementos del circuito nos agregan o quitan ecuaciones a resolver:

En primer lugar, vemos que **hay una fuente ideal de corriente en una rama no compartida**:

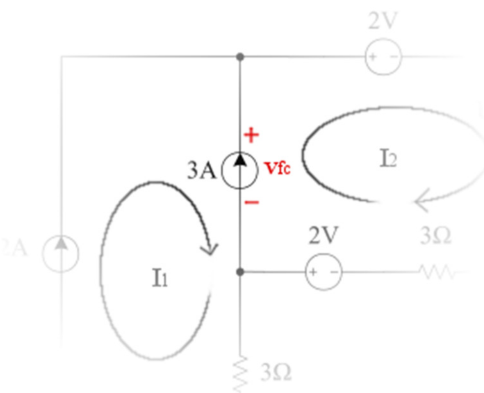


Esta fuente de corriente fija el valor de la corriente en la rama, que es a su vez, una de las corrientes independientes del circuito (o sea, una de las incógnitas en el sistema de ecuaciones que corresponderá al método). Entonces, si una de las incógnitas del sistema de ecuaciones ahora está determinada por la fuente, significa que debemos resolver una ecuación menos del sistema.

$$I_1 = 2A$$

En general decimos que cada fuente ideal de corriente (ya sea independiente o controlada) presente en una rama no compartida, elimina del sistema de ecuaciones del método de mallas una ecuación.

También vemos que **hay una fuente de ideal corriente en una rama compartida por dos mallas**:

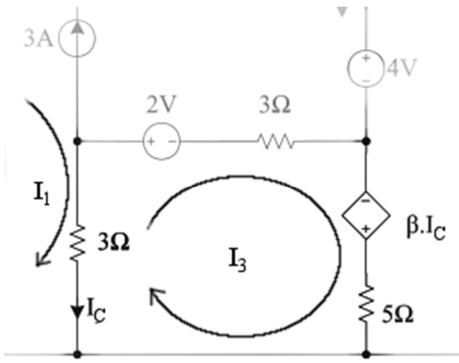


En este caso, cuando intentemos plantear la LKT en la malla por la en la que circula I_2, tendremos un problema: No sabemos la diferencia de potencial en bornes de la fuente, por lo cual tendremos una nueva incógnita V_{fc} y, por ende, la necesidad de plantear una ecuación extra. En este caso lo que fija la fuente de corriente es la diferencia entre dos corrientes de malla, o sea:

$$I_2 - I_1 = 3A\ (ec. extra)$$

En general decimos que cada fuente ideal de corriente (independiente o controlada) presente en una rama compartida, agrega una ecuación al sistema de ecuaciones del método de mallas.

Finalmente podemos ver que **hay una fuente controlada** (en este caso una fuente de tensión controlada por corriente):



Al ser una fuente de tensión, no tenemos el problema de desconocer la diferencia de potencial entre sus bornes, pero la misma depende de una variable de control, que no es más que una magnitud eléctrica presente en otro lugar del circuito (en este caso una corriente), con lo cual debemos plantear una ecuación que vincule esta magnitud con las variables independientes del método. Así:

$$I_c = I_1 - I_3$$

*En general decimos que la presencia de una fuente controlada, **cualquiera sea su tipo y cualquiera sea el método que apliquemos**, agrega una ecuación al sistema de ecuaciones a resolver debido a su magnitud de control (solo por el hecho de ser una fuente controlada).*

Podemos resumir todo lo dicho de la siguiente forma:

$$Para\ el\ método\ de\ mallas:$$

$$4\ Ecaciones\ propias\ del\ método.$$
$$-1\ Ecuación\ por\ fuente\ ideal\ de\ corriente\ en\ rama\ no\ compartida.$$
$$+1\ Ecuación\ por\ fuente\ ideal\ de\ corriente\ en\ rama\ compartida.$$
$$+1\ Ecuación\ por\ la\ variable\ de\ control\ de\ la\ fuente\ controlada.$$
$$-------------------------------------$$
$$5\ Ecuaciones\ a\ resolver.$$

(Este tipo de análisis debe realizarse <u>siempre</u>, para todos los métodos de resolución no solo con la finalidad de conocer cuál es el más conveniente para cada caso sino que también a modo de justificación de la elección del método con el que se resolverá el problema).

Analicemos ahora cuantas ecuaciones nos genera el **método de bucles**:

El método de bucles es un método también basado en la aplicación de la LKT pero bastante más flexible (y por ende, en general, más potente) que el de mallas. El mismo nos permite elegir libremente, no solo el sentido de circulación para cada una de las corrientes de bucle que planteemos, sino que también las ramas por las que estas corrientes circularan. La potencia del método radica en esta libertad de elección por la que podremos aprovechar las observaciones que hicimos a la hora de analizar el método de mallas para explotar las ventajas de ciertos elementos de circuito así como evitar o minimizar el impacto de las desventajas de otros.

Lo que nos exige este método es la elección de un **árbol**. Recordemos que un árbol es cualquier conjunto de ramas del circuito que unan todos los nudos del mismo sin formar ningún camino cerrado. Dado que ramas de árbol unen todos los nudos del circuito sin formar caminos cerrados vemos la necesidad de que, para que haya circulación de corriente en el circuito, deban conectarse las ramas de enlace. Esto nos permite asegurar que las corrientes que circulan por las ramas de enlace son corrientes independientes y, en consecuencia, las incógnitas del sistema de ecuaciones obtengamos.

Es conveniente remarcar lo siguiente: *Esta elección es **crucial** a la hora de analizar la conveniencia del método. A partir de una buena elección del árbol, podemos encontrar en el método de bucles una forma muy sencilla de resolver ciertos circuitos.*

Conociendo el número de nudos y de ramas del circuito, podremos obtener el número de ramas que tendrá el árbol y el número de ramas de enlace.

Dijimos anteriormente que **el número de ecuaciones de bucles** se calcula igual que el de mallas, esto es:

$$l = b - (n - 1) = b - n + 1 = 4$$

Y coincide con el número de ramas de enlace.

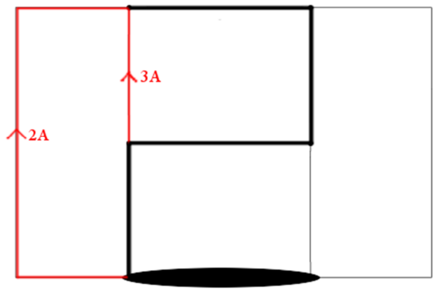
El número de ramas de árbol será:

$$n_a = n - 1 = 4$$

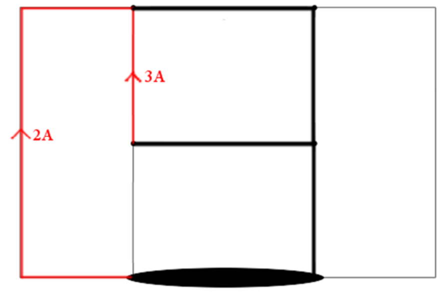
Ahora ya sabemos que habrá 4 ramas de enlace y 4 de árbol. Veamos qué elementos conviene que haya en cada tipo de rama:

- Sabemos que las fuentes ideales de corriente (sean tanto independientes como controladas) fijan la corriente que circula por la rama en la que se encuentran. También sabemos que las corrientes que circulan por las ramas de enlace serán las corrientes independientes, o sea las incógnitas del sistema de ecuaciones del método y, en definitiva, las que fijan el número de ecuaciones a resolver. Uniendo estos dos conceptos podemos decir que **es conveniente que las ramas de enlace sean aquellas en las que hay fuentes ideales de corriente**. Más aún, si una fuente de corriente aparece en una rama de árbol, al plantear la LKT, aparecerá una incógnita más que es la diferencia de potencial entre sus bornes. Por todo esto, **buscaremos usar aquel árbol que tenga la menor cantidad de fuentes de corrientes (independientes o controladas) en sus ramas** (lo ideal es que no haya ninguna fuente de corriente en las ramas de árbol).

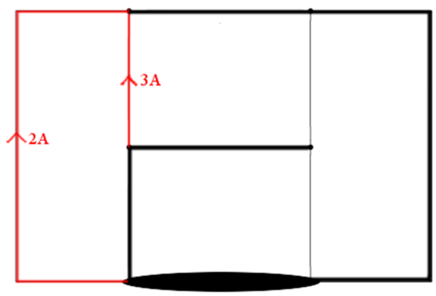
Como en el circuito hay dos ramas que contienen fuentes de corriente, buscaremos que esas ramas sean ramas de enlace, esto nos permite elegir entre 4 árboles que cumplen con esta condición:



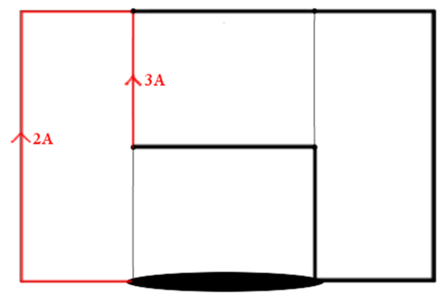
Árbol 1



Árbol 2



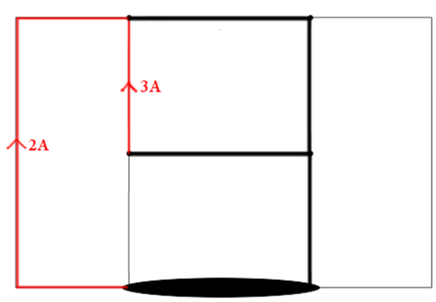
Árbol 3



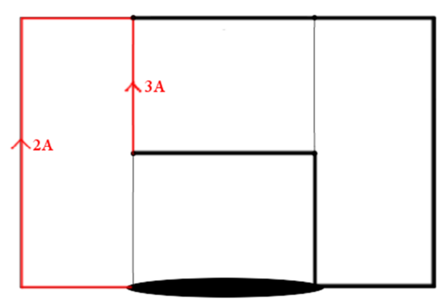
Árbol 4

- Observando estos cuatro arboles vemos que en el 2 y el 4 la rama por la que circula la corriente que controla a la fuente de tensión dependiente es una rama de enlace, o sea, la tensión en bornes de la fuente controlada queda expresada en estos casos en función de una sola incógnita, a diferencia de los arboles 1 y 3 donde depende de, al menos, dos corrientes independientes, complicando el trabajo algebraico al resolver el sistema. Entonces **nos quedaremos con aquel árbol en el cual se encuentre la menor cantidad posible de magnitudes de control de fuentes dependientes (ya sean tensiones o corrientes de control) aplicadas a los elementos de sus ramas**. (Lo ideal es que no haya magnitudes de control aplicadas a los componentes de las ramas de árbol).

Ahora ya solo tenemos dos árboles para elegir, el 2 y el 4.



Árbol 2

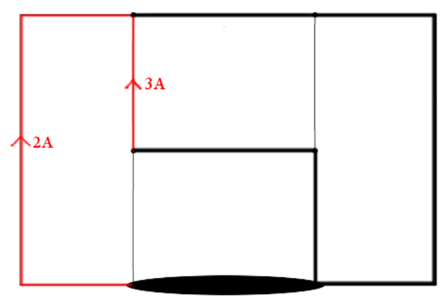


Árbol 4

Si los analizamos vemos que en el árbol 2, en tres de sus ramas de enlace, se encuentran fuentes de tensión (ya sean independientes o controladas) **reales**, es decir, fuente de tensión en serie con una resistencia. Por cada una de esas resistencias circularan varias de las corrientes de enlace. Esto, traducido al sistema de ecuaciones, hace que cada incógnita dependa de un número mayor de otras incógnitas, por lo que podríamos decir que las incógnitas se encuentran más vinculadas entre sí.

En cambio, para el árbol 4, esto sucede en una sola rama. Decimos que, en este caso, las corrientes se encuentran más desvinculadas, lo cual nos genera un sistema de ecuaciones algebraicamente más sencillo de resolver.

Así, trataremos de elegir un árbol que, una vez que tenga el menor número de fuentes de corriente y de magnitudes de control en sus ramas, <u>además</u>, **tenga la mayor cantidad de sus ramas compuestas por únicamente fuentes ideales de tensión**, con el fin de simplificar el sistema de ecuaciones.



Árbol elegido.

Ahora sí, con el árbol ya elegido, podemos analizar el número de ecuaciones que tendrá el sistema.

$$\begin{array}{l} 4\ Ecuaciones\ propias\ del\ método. \\ -2\ Ecuaciones\ por\ fuente\ ideal\ de\ corriente\ en\ rama\ de\ enlace. \\ +1\ Ecuación\ por\ la\ variable\ de\ control\ de\ la\ fuente\ controlada. \\ \hline 3\ Ecuaciones\ a\ resolver. \end{array}$$

Veamos finalmente el número de ecuaciones que entrega el **método de nudos**:

Este método a diferencia de los anteriores se basa en la aplicación sistemática de la LKC. En él, las incógnitas del sistema de ecuaciones serán los *potenciales absolutos* de los nudos del circuito.

Como hablamos de *potenciales absolutos*, surge inmediatamente la necesidad de fijar un nudo de referencia (con potencial cero) a partir del cual referir los valores de los potenciales del resto de los nudos. Así, la elección que determinara la conveniencia (o no) del método será la de ese nudo de referencia.

De nuevo, *esta elección es* **crucial** *a la hora de evaluar si nos conviene aplicar este método. Con el nudo de referencia correctamente elegido, el método de nudos será la mejor opción para cierto tipo de circuitos.*

El número de ecuaciones que involucrara el método, se deduce fácilmente, será la cantidad de nudos cuyos potenciales son independientes, es decir, el número total de nudos menos uno (la referencia) cuyo potencial ya está fijado en 0v.

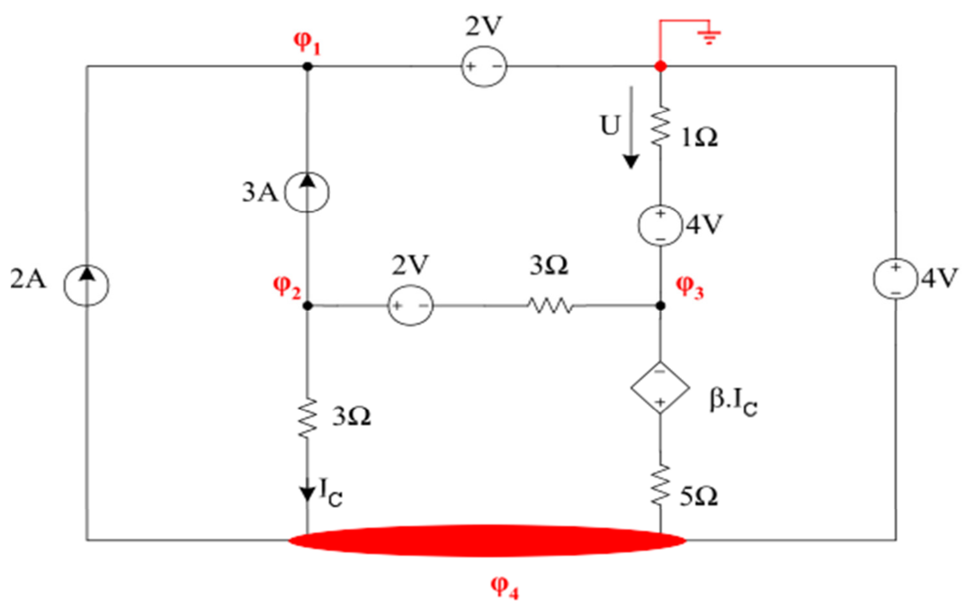
$$n^{o}\ de\ ec. del\ metodo\ de\ nudos\ = n - 1$$

En nuestro caso serán 4 ecuaciones.

Pensemos ahora un poco en la función que cumplen las fuentes de tensión ideales: **fijan la diferencia de potencial entre dos nudos del circuito**. Entonces, si una fuente de tensión tiene uno de sus bornes aplicados al nudo de referencia, el valor del otro nudo al que esta aplicada queda fijado.

Pensando en que los potenciales de nudos son nuestras incógnitas, es fácil ver que, **nos conviene que el nudo de referencia sea uno al cual estén aplicados los bornes de la mayoría de las <u>fuentes ideales de tensión</u> del circuito**, a fin de reducir la cantidad de ecuaciones a plantear. (Idealmente todas)

Vemos entonces que el circuito tiene un nudo al cual concurren dos fuentes de tensión, haciendo que sea este nudo el mejor para ser elegido como referencia.



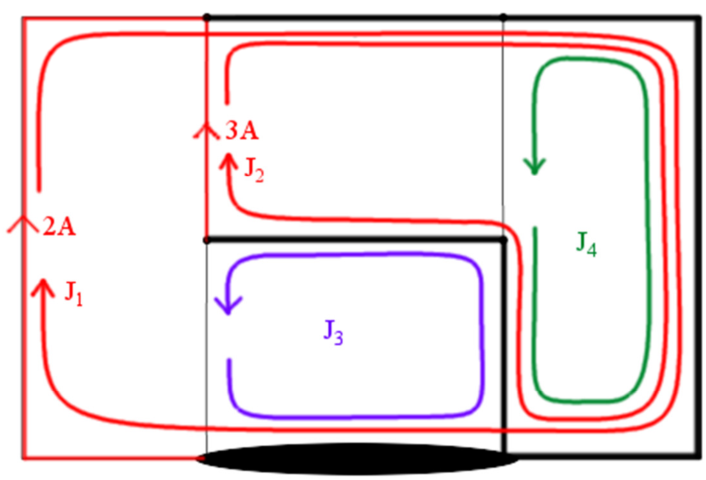
Ahora podemos saber cuántas ecuaciones entregara el método:

$$\begin{array}{l} 4\ Ecuaciones\ propias\ del\ método. \\ -2\ Ecuaciones\ por\ fuentes\ ideales\ de\ tensión\ concurrentes\ a\ la\ referencia. \\ +1\ Ecuación\ por\ la\ variable\ de\ control\ de\ la\ fuente\ controlada. \\ \hline 3\ Ecuaciones\ a\ resolver. \end{array}$$

<u>Elegiremos el método de bucles</u> ya que, a pesar de tener igual número de ecuaciones que el método de nudos, la incógnita del problema U se puede obtener rápidamente por ley de Ohm como el producto de una corriente de enlace (que será resultado inmediato de la resolución del sistema de ecuaciones) multiplicada por R=1Ω.

2) <u>Resolución:</u>

En primer lugar debemos plantear los sentidos de circulación de las corrientes:



Ahora si planteamos las ecuaciones:

$$\begin{cases} J_1 = 2A \\ J_2 = 3A \\ J_1 \,.\, (0) + J_2 \,.\, (3+5) + J_3 \,.\, (3+3+5) + J_4 \,.\, (-5) = I_c \,.\, (-\beta) + 2 \\ J_1 \,.\, (0) + J_2 \,.\, (-5) + J_3 \,.\, (-5) + J_4 \,.\, (1+5) = I_c \,.\, (\beta) + 4 - 4 \\ I_c = J_3 \end{cases}$$

Obsérvese que J_1 quedo completamente desvinculada del sistema de ecuaciones y también que la superposición de corrientes es mínima gracias a la elección del árbol, simplificando el sistema.

Trabajando un poco las ecuaciones

$$\begin{cases} J_3\,.\,(13)\; + J_4\,.\,(-5) = -22 \qquad (1) \\ J_3\,.\,(-7) + J_4\,.\,(6) \quad = \quad 15 \qquad (2) \end{cases}$$

Vemos que la matriz del sistema de ecuaciones tiene algunas particularidades:

- Los elementos de la diagonal principal son todos positivos.
- Los elementos fuera de la diagonal principal, en este caso son todos negativos. Recordemos que en los métodos de mallas y nudos esto se cumple siempre, mientras que en bucles podría no cumplirse.
- No es diagonalmente dominante, otra condición que puede darse en el método de bucles, pero no en el de mallas ni de nudos.
- No es simétrica respecto a la diagonal principal. Esto se debe a la presencia de un elemento no bilateral en el circuito (la fuente controlada).
- El determinante es distinto de cero.

Como el problema lo único que pide es la tensión U y esta se puede calcular como J_4 por 1, comenzamos despejando J_3 de (1) de manera de llegar directamente al resultado:

$$J_3 = -\frac{22}{13} - J_4\,.\,\frac{5}{13}$$

Y reemplazando en (2):

$$\left(-\frac{22}{13} - J_4\,.\,\frac{5}{13}\right).\,(-7) + J_4\,.\,(6) = 15$$

$$\frac{154}{13} + J_4\,.\left(6 - \frac{35}{13}\right) = 15$$

$$J_4\,.\left(\frac{43}{13}\right) = \frac{41}{13}$$

$$J_4 = \frac{41}{43}$$

$$\boxed{J_4 = \frac{41}{43} A}$$

Entonces

$$\boxed{U = J_4\,.\,1\,\Omega = \frac{41}{43} V = 0{,}95\ V}$$