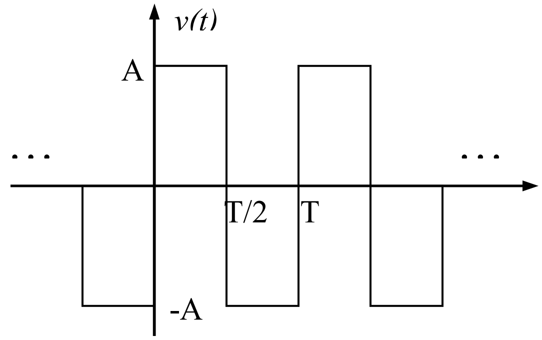
Problemas Resueltos – Capitulo 12

1) Hallar el desarrollo en ~~la~~ serie de Fourier, en su forma amplitud-fase, de la señal de tensión *v(t)* que se muestra a continuación:



Resolución:

A partir de estudiar la onda, vemos que tiene simetría impar, por lo que $a_n = 0 \ \forall$ n, y valor medio nulo, por lo que $a_0 = 0$.

Con lo cuál solo resta calcular los coeficientes $b_n \ \forall$ n, a partir de su definición. Así,

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T v(t).sen(2\pi n f_1 t)\,dt \\
&= \frac{2}{T}\left[\int_0^{T/2} A.sen(2\pi n f_1 t)\,dt + \int_{T/2}^{T} \text{-}A.sen(2\pi n f_1 t)\,dt\right] \\
&= \frac{2A}{T}\left[\int_0^{T/2} sen(2\pi n f_1 t)\,dt + \int_{T/2}^{T} \text{-}sen(2\pi n f_1 t)\,dt\right] \\
&= \frac{2A}{T}\left[\frac{-cos(2\pi n f_1 t)}{2\pi n f_1}\Bigg|_0^{T/2} + \frac{cos(2\pi n f_1 t)}{2\pi n f_1}\Bigg|_{T/2}^{T}\right] \\
&= \frac{2A}{2\pi n f_1 T}\left[-cos(2\pi n f_1 t)\Big|_0^{T/2} + cos(2\pi n f_1 t)\Big|_{T/2}^{T}\right] \\
&= \frac{A}{\pi n}\left[-cos(\pi n) + 1 + cos(2\pi n) - cos(\pi n)\right] \\
&= \frac{A}{\pi n}\left[2 - 2cos(\pi n)\right] = \begin{cases} 0 & \text{si n es par} \\ \dfrac{4A}{\pi n} & \text{si n es impar} \end{cases}
\end{aligned}
$$

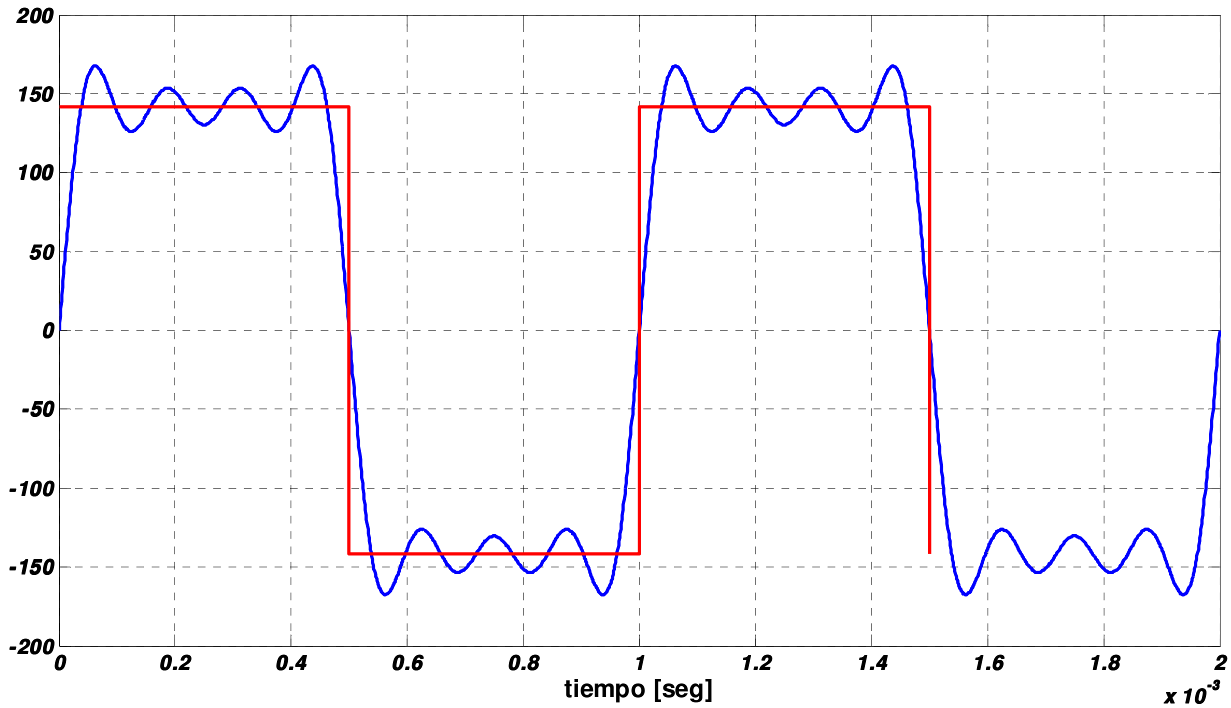
Recordando la relación entre los coeficientes de la forma seno-coseno (a_n y b_n) y los coeficientes de la forma amplitud-fase (A_n y Φ_n), con las condiciones de nuestra onda ($a_n = 0 \ \forall$ n y $a_0 = 0$):

$$
\begin{aligned}
A_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\
\Phi_n &= arctg\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned}
A_n &= b_n \qquad \text{con n impar} \\
\Phi_n &= arctg(-\infty) = -\pi/2
\end{aligned}
$$

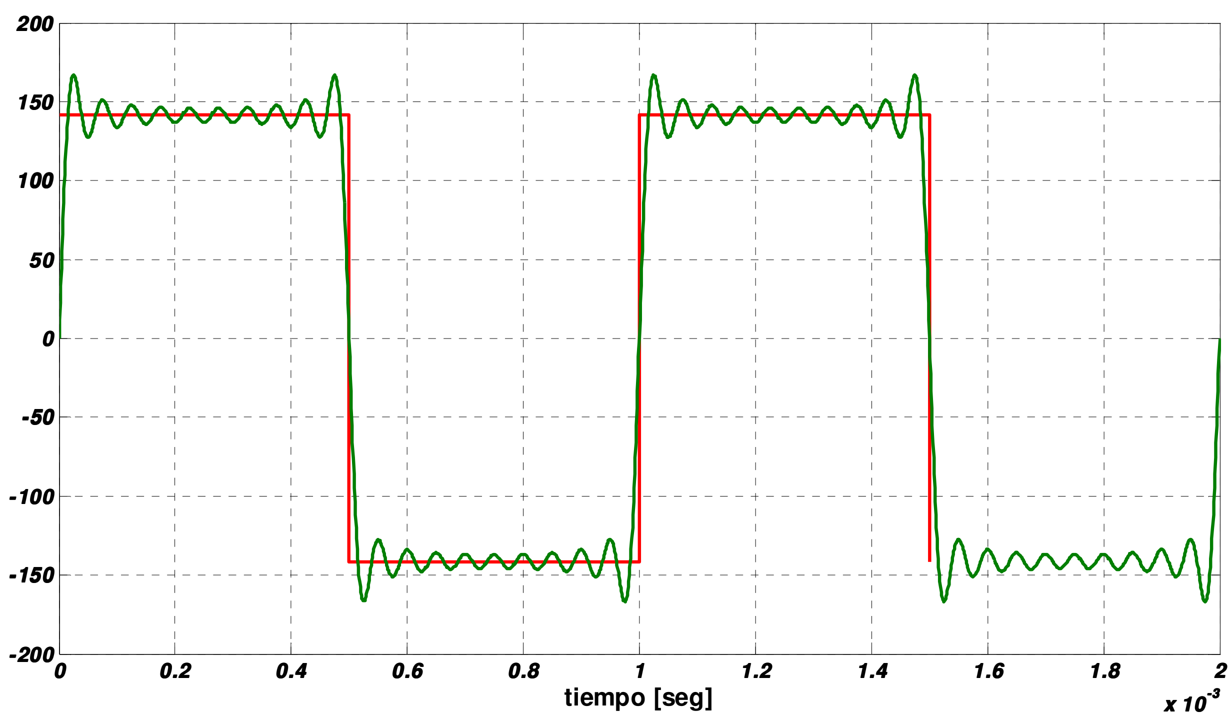
Es decir que la descomposición en serie de Fourier de la onda propuesta está compuesta por la suma infinita de los armónicos impares desfasados $-\pi/2$.

$$
v(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4A}{\pi(2n+1)} cos\left(2\pi\,(2n+1)f_1\,t - \frac{\pi}{2}\right)
$$

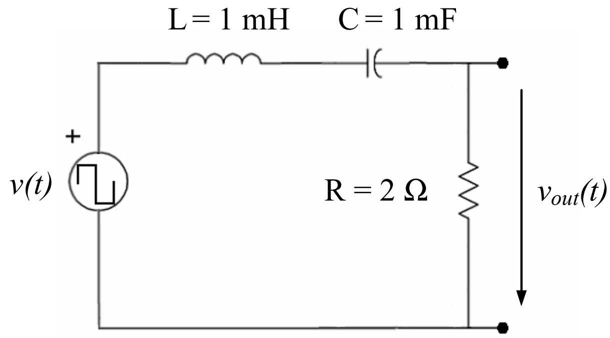
Aproximación considerando los 4 primeros armónicos impares (con A = 141,4 V y T = 1 mseg)



Aproximación considerando los 10 primeros armónicos impares (con A = 141,4 V y T = 1 mseg)



2) La señal de tensión del Problema 1 (con A = 141,4 V y T = 6,28 mseg) se aplica a la entrada del siguiente circuito:



a) Considerar que la señal de entrada se aproxima mediante los 4 primeros armónicos y calcular la evolución temporal de la tensión $v_{out}(t)$

b) Calcular la potencia de distorsión en la fuente.

Resolución:

Como ya calculamos y de acuerdo al enunciado, la descomposición en serie de Fourier de la onda propuesta estará compuesta por la suma de los 4 primeros armónicos impares tal que:

$$v(t) = \sum_{n=0}^{3} \frac{4A}{\pi(2n+1)} cos\left(2\pi\,(2n+1)\,f_1\,t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Una posibilidad es reemplazar la fuente original por cuatro fuentes de frecuencias ω_1 = 1000 rad/s, ω_3 = 3000 rad/s, ω_5 = 5000 rad/s y ω_7 = 7000 rad/s conectadas en serie y aplicar superposición. Así, haremos actuar de a una las fuentes para calcular la salida que genera cada una de estas para luego sumarlas en el dominio temporal.

Si en cambio utilizamos el concepto de función transferencia en el dominio frecuencial y la fórmula del divisor resistivo para el cálculo de la tensión a la salida en función de la entrada:

$$H(j\omega) = \frac{V_{out}(j\omega)}{V_{in}(j\omega)} = \frac{1}{V_{in}(j\omega)}\,.\,V_{in}(j\omega)\left(\frac{R}{R + j\omega L - j\dfrac{1}{\omega C}}\right) = \frac{R}{R + j\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)}$$

de lo que se desprende que:

$$\left|H(j\omega)\right| = \left|\frac{V_{out}(j\omega)}{V_{in}(j\omega)}\right| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}} \qquad \Phi_{H(j\omega)} = -arctg\left(\frac{\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)}{R}\right) = \Phi_{V_{out}(j\omega)} - \Phi_{V_{in}(j\omega)}$$

Por lo tanto, calculando los valores de módulo y fase de la función transferencia para las cuatro frecuencias y conocidos los valores de amplitud y fase de la tensión de entrada se pueden calcular los valores de amplitud y fase de la tensión de salida.

Así, los valores de la función transferencia para las frecuencias a las que trabaja el circuito son:

	$\lvert H(j\omega)\rvert$	$\Phi_{H(j\omega)}$
ω_1 = 1000 rad/s	1	0
ω_3 = 3000 rad/s	0,6	-0,927 rad
ω_5 = 5000 rad/s	0,38	-1,173 rad
ω_7 = 7000 rad/s	0,28	-1,287 rad

Y como los valores eficaces de la entrada son:

	$\lvert V_{in}(j\omega)\rvert = \frac{4A}{\pi(2n+1)\sqrt{2}}$	$\Phi_{V_{in}}$
ω_1 = 1000 rad/s	127,3	$-\pi/2$
ω_3 = 3000 rad/s	42,43	$-\pi/2$
ω_5 = 5000 rad/s	25,46	$-\pi/2$
ω_7 = 7000 rad/s	18,18	$-\pi/2$

La tensión eficaz de salida será entonces:

	$\lvert V_{out}(j\omega)\rvert = \lvert V_{in}(j\omega)\rvert . \lvert H(j\omega)\rvert$	$\Phi_{V_{out}(j\omega)} = \Phi_{H(j\omega)} + \Phi_{V_{in}(j\omega)}$
ω_1 = 1000 rad/s	127,3	$-\pi/2$
ω_3 = 3000 rad/s	25,45	-2,4978
ω_5 = 5000 rad/s	9,67	- 2,7438
ω_7 = 7000 rad/s	5,09	- 2,8578

Luego, la señal de salida será:

$$v_{out}(t) = \sqrt{2}\,.\,127{,}3\,cos\left(\omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{2}\,.\,25{,}45\,cos(\omega_3 t - 2{,}49) + \sqrt{2}\,.\,9{,}67\,cos(\omega_5 t - 2{,}74) + \sqrt{2}\,.\,5{,}09\,cos(\omega_7 t - 2{,}85)$$

Para el cálculo de la potencia de distorsión en la fuente será necesario calcular la potencia aparente, la potencia activa y la potencia reactiva para poder utilizar la identidad:

$$S^2 = P^2 + Q^2 + T^2 \quad \Rightarrow \quad T = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2}$$

y para poder calcular las potencias necesitaremos conocer la corriente. Al estar los elementos en serie, la corriente es la misma en todos. Luego, como conocemos la tensión que cae sobre la resistencia R, $v_{out}(t)$, el calculo de *i(t)* es directamente:

$$i(t) = \frac{v_{out}(t)}{R}$$

$$= \sqrt{2}\,.\,63{,}6\,cos\left(\omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{2}\,.\,12{,}7\,cos(\omega_3 t - 2{,}49) + \sqrt{2}\,.\,4{,}8\,cos(\omega_5 t - 2{,}74) + \sqrt{2}\,.\,2{,}5\,cos(\omega_7 t - 2{,}85)$$

Para el cálculo de la potencia aparente en la fuente S_{fuente} necesitaremos los valores de la tensión eficaz total y la corriente eficaz total. Esto es:

$$V_{ef} = \sqrt{\sum_{n=0}^{3} \left(V_{(2n+1)}\right)^2} = 137{,}78 \ \text{V}$$

$$I_{ef} = \sqrt{\sum_{n=0}^{3} \left(I_{(2n+1)}\right)^2} = 65{,}13 \ \text{A}$$

Luego, la potencia aparente será:

$$S = V_{ef} \, . I_{ef} = \left(137{,}78 \ \text{V}\right)\left(65{,}13 \ \text{A}\right) = 8973 \, \text{VA}$$

Y para el cálculo de las potencias activa y reactiva utilizamos las definiciones:

$$P = \sum_{n=0}^{4} P_n = \sum_{n=1}^{4} P_n = (127{,}3)(63{,}6)\cos(0) + (42{,}43)(12{,}7)\cos(0{,}92) +$$

$$+ (25{,}46)(4{,}8)\cos(1{,}17) + (18{,}18)(2{,}5)\cos(1{,}28) = 8483{,}42 \ \text{W}$$

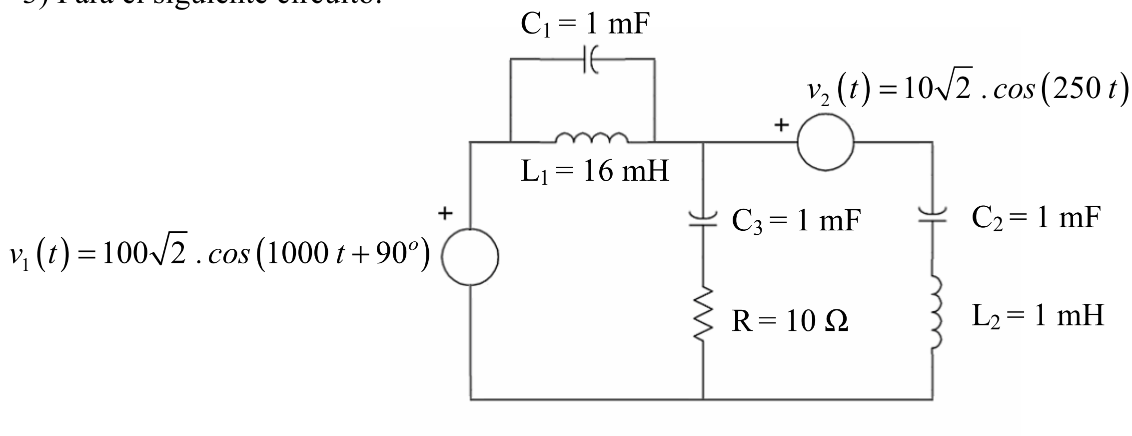
$$Q = \sum_{n=1}^{4} Q_n = (127{,}3)(63{,}6)\,\text{sen}(0) + (42{,}43)(12{,}7)\,\text{sen}(0{,}92) +$$

$$+ (25{,}46)(4{,}8)\,\text{sen}(1{,}17) + (18{,}18)(2{,}5)\,\text{sen}(1{,}28) = 584{,}74 \ \text{VAr}$$

Finalmente, utilizando la identidad mostrada anteriormente, resulta:

$$T = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} = 2864{,}33 \ VAd$$

3) Para el siguiente circuito:



a) Calcular la evolución de la tensión y la corriente por la rama C_3R y calcular las potencias en esta.

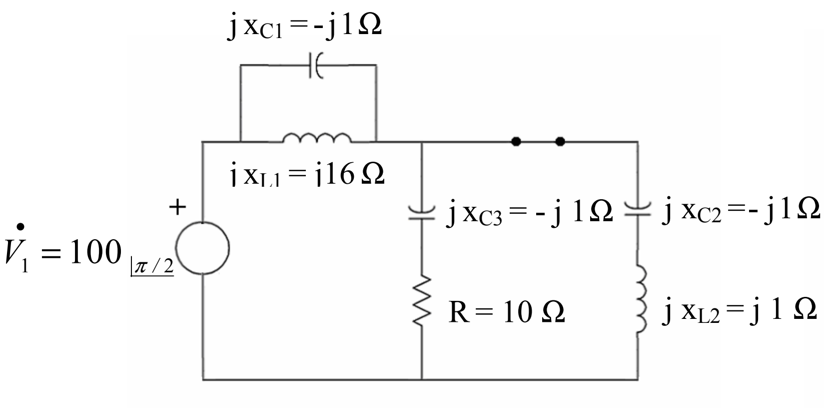
b) Calcular las potencias en bornes de la fuente $v_1(t)$.

<u>Resolución:</u>

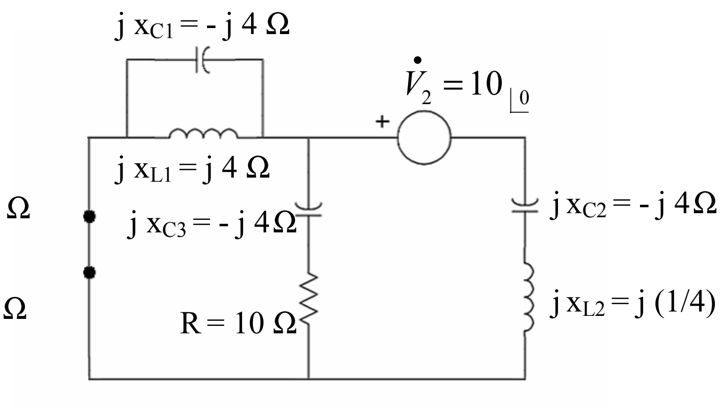
Lo primero que observamos en este problema es que no existe una señal periódica no senoidal, sino que tenemos dos fuentes con frecuencias diferentes. Esto imposibilita resolver el problema aplicando el método fasorial.

Sin embargo, como el circuito es lineal podemos aplicar superposición y haciendo actuar las dos fuentes por separado utilizar el método fasorial en cada caso (pasivando la fuente cuyo efecto no es de interés). Así, se obtienen los siguientes circuitos:

<u>Actuando fte. tensión</u> (ω = 1000 rad/s)



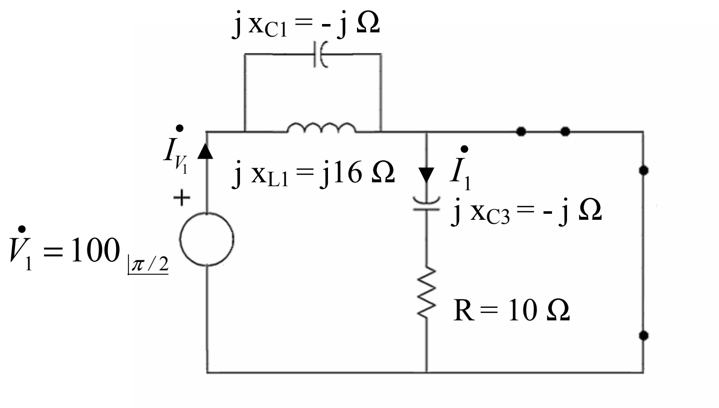
<u>Actuando fte. tensión</u> (ω = 250 rad/s)



En el circuito de la izquierda vemos que C_2 y L_2 están en resonancia por lo que dicha serie externamente se ve como un cortocircuito. En el circuito de la derecha, en cambio, el paralelo C_1 y L_1 están en resonancia por lo que externamente pueden verse como un circuito abierto.

Entonces podemos redibujar los circuitos

Actuando fte. tensión (ω = 1000 rad/s)



Como la rama que contiene la serie de C_3 y R está cortocircuitada su d.d.p. será nula y su corriente también.

La corriente por la fuente de tensión V_1 será:

$$\dot{I}_{V_1} = \frac{\dot{V}_1}{(-j\Omega)//(j16\Omega)}$$

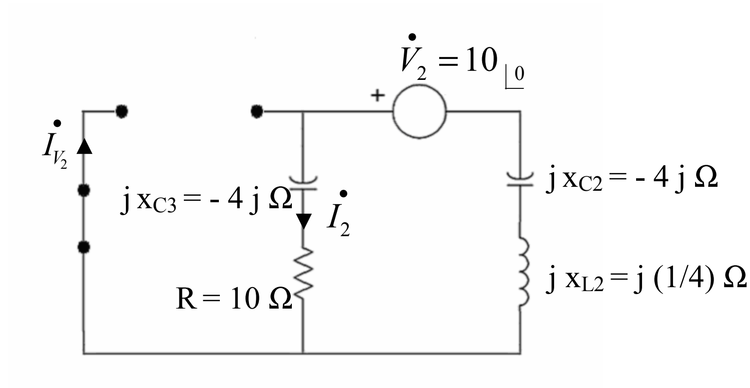
$$= \frac{100_{|\pi/2}\ \text{V}}{-j16/15\ \Omega} = 93{,}75_{|-\pi}\ \text{A}$$

Entonces:

$$i_{v1}(t) = \sqrt{2}\ 93{,}75\,cos(1000\,t - \pi)$$

$$i_1(t) = 0$$

Actuando fte. tensión (ω = 250 rad/s)



Como la rama que contiene al paralelo de C_1 y L_1 se comporta como un circuito abierto la corriente por la fuente de tensión V_1 será nula.

La corriente por la serie de C_3 y R será:

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{V}_2}{-j4\Omega + j(1/4)\Omega + 10\Omega - j4\Omega}$$

$$= \frac{10_{|0^\circ}\ \text{V}}{10 - j(31/4)\ \Omega} = 0{,}62 + 0{,}48\,j\ \text{A} = 0{,}79_{|0{,}66\ \text{rad}}\ \text{A}$$

Entonces:

$$i_{v2}(t) = 0$$

$$i_1(t) = \sqrt{2}\ 0{,}79\,cos(250\,t + 0{,}66)$$

La tensión en la rama RC_3:

$$V_{RC_3} = I_2(10 - j4\ \Omega) = 8{,}5_{|0{,}27\,rad}\ \text{V}$$

La corriente resultante por la fuente de tensión será: $i_v(t) = i_{v1}(t) + i_{v2}(t) = \sqrt{2}\ 93{,}75\,cos(1000\,t - \pi)$

Análogamente, la corriente y la tensión por la rama RC_3 serán: $i(t) = i_1(t) + i_2(t) = \sqrt{2}\ 0{,}79\,cos(250\,t + 0{,}66)$

$$v_{RC3total}(t) = v_{RC3}(t) + 0 = \sqrt{2}\ 8{,}5\,cos(250\,t + 0{,}28)$$

El cálculo de las potencias en la rama RC_3 resulta sencillo ya que la corriente y la tensión solo tienen una componente de 250 rad/seg con lo cual sabemos que la potencia de distorsión es nula (por las condiciones particulares del circuito) y por lo tanto debe cumplirse:

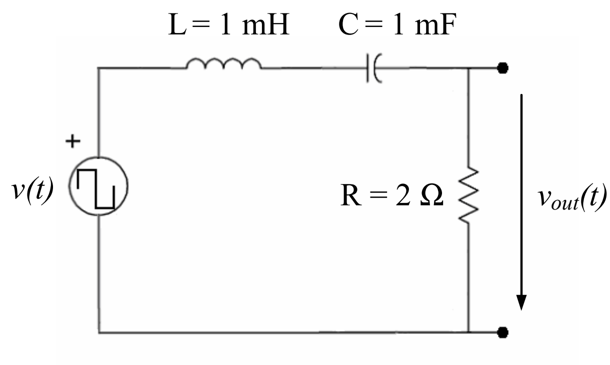
$$\tilde{S} = P + j\,Q = V\,.\,I^* = \left(8{,}5_{|0{,}28\,rad}\right)\left(0{,}79_{|-0{,}66\,rad}\right)$$

$$= 6{,}71_{|-0{,}38\,rad} = (6{,}23\ \text{-}\ \text{j}2{,}48)\ \text{VA}$$

Para el cálculo de potencias en la fuente de tensión $v_1(t)$ (ω = 1000 rad/s) el razonamiento es análogo:

$$\tilde{S} = P + \text{j}\,Q = V\,.\,I^* = \left(100_{|\pi/2}\right)\left(93{,}75_{|\pi}\right) = 9375_{|3\pi/2} = (0 - \text{j}\,9375)\ \text{VA}$$

4) Sea la señal de entrada la tensión del Problema 1 (con A = 141,4 V y T = 6,28 mseg) tomando los primeros cuatro armónicos y si se aplica al circuito del Problema 2:



a) Calcular los espectros de amplitud y fase de la tensión $v_{out}(t)$

Resolución:

Al igual que en el problema 2, la descomposición en serie de Fourier de la onda propuesta estará compuesta por la suma de los 4 primeros armónicos impares tal que:

$$v(t)=\sum_{n=0}^{3}\frac{4A}{\pi(2n+1)}cos\left(2\pi\,(2n+1)f_1\,t-\frac{\pi}{2}\right)$$

Utilizando la función transferencia calculada anteriormente, vemos que:

$$H(j\omega)=\frac{V_{out}(j\omega)}{V_{in}(j\omega)}=\frac{1}{V_{in}(j\omega)}\,.\,V_{in}(j\omega)\left(\frac{R}{R+j\omega L-j\dfrac{1}{\omega C}}\right)=\frac{R}{R+j\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)}$$

de lo que se desprende que:

$$|H(j\omega)|=\left|\frac{V_{out}(j\omega)}{V_{in}(j\omega)}\right|=\frac{R}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}} \qquad \Phi_{H(j\omega)}=-arctg\left(\frac{\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)}{R}\right)=\Phi_{V_{out}(j\omega)}-\Phi_{V_{in}(j\omega)}$$

Por lo tanto, calculando los valores de módulo y fase de la función transferencia para las 4 frecuencias y conocidos los valores de amplitud y fase de la tensión de entrada se pueden calcular los valores de amplitud y fase de la tensión de salida.

Así, los valores de la función transferencia para las frecuencias a las que trabaja el circuito son:

	$\lvert H(j\omega)\rvert$	$\Phi_{H(j\omega)}$
ω_1 = 1000 rad/s	1	0
ω_3 = 3000 rad/s	0,6	-0,927 rad
ω_5 = 5000 rad/s	0,38	-1,173 rad
ω_7 = 7000 rad/s	0,28	-1,287 rad

Y como los valores eficaces de la entrada son:

	$\left\| V_{in}(j\omega) \right\| = \dfrac{4A}{\pi(2n+1)\sqrt{2}}$	$\Phi_{V_{in}}$
ω_1 = 1000 rad/s	127,3	- π/2
ω_3 = 3000 rad/s	42,43	- π/2
ω_5 = 5000 rad/s	25,46	- π/2
ω_7 = 7000 rad/s	18,18	- π/2

La tensión eficaz de salida será entonces:

	$\left\| V_{out}(j\omega) \right\| = \left\| V_{in}(j\omega) \right\| . \left\| H(j\omega) \right\|$	$\Phi_{V_{out}(j\omega)} = \Phi_{H(j\omega)} + \Phi_{V_{in}(j\omega)}$
ω_1 = 1000 rad/s	127,3	- π/2
ω_3 = 3000 rad/s	25,45	-2,4978
ω_5 = 5000 rad/s	9,67	- 2,7438
ω_7 = 7000 rad/s	5,09	- 2,8578

Como podemos ver que el único valor que permanece inalterado es el primer armónico, mientras que los restantes armónicos se ven <u>atenuados</u> y con una variación en su fase. Luego, los espectros serán: