

TEORÍA DE CIRCUITOS

CAPÍTULO 12

ANÁLISIS DE CIRCUITOS EN RÉGIMEN POLIARMÓNICO

Cátedra de Teoría de Circuitos

Edición 2016

ANÁLISIS DE CIRCUITOS EN RÉGIMEN POLIARMÓNICO

12.1 Introducción

El desarrollo de las técnicas de análisis de Fourier posee una larga historia que involucra a un considerable número de investigadores, y la investigación de numerosos y diferentes fenómenos físicos. En este capítulo describiremos el uso de la serie de Fourier como una herramienta para el análisis de circuitos que operan en régimen periódico no senoidal.

El concepto del uso de "sumas trigonométricas", es decir, sumas de senos y cosenos armónicamente relacionados, o de exponenciales periódicas complejas para describir fenómenos periódicos se remonta hasta los babilonios, los cuales utilizaron ideas de este tipo para predecir eventos astronómicos. La historia moderna del tema comienza en 1748 con L. Euler, quien estudió el movimiento de una cuerda vibrante. Euler observó que si la configuración de una cuerda vibrante en un instante de tiempo dado es una combinación lineal de sus modos normales (los cuales son funciones armónicamente relacionadas de la longitud x), lo mismo ocurrirá en cualquier instante de tiempo posterior. En 1753, D. Bernoulli propuso que todos los desplazamientos físicos de una cuerda podrían representarse por combinaciones lineales de sus modos normales, pero no lo fundamentó matemáticamente, y sus ideas no fueron muy aceptadas. En efecto, el propio Euler descartó las series trigonométricas, y, en 1759, L. Lagrange criticó el uso de las series trigonométricas en el estudio de las cuerdas vibrantes, basándose en su creencia de que era imposible representar señales con pendientes discontinuas.

Fue en este ambiente hostil que, el 21 de diciembre de 1807, el matemático francés Jean Baptiste Fourier (1768-1830) presentó los resultados de su trabajo de investigación del flujo de calor en una varilla metálica al Instituto de Francia, en el cual había determinado la utilidad de las series trigonométricas para representar una función periódica, proponiendo así que "cualquier señal periódica podía representarse por dicha serie". Aunque su tratamiento del tema fue significativo, muchas de las ideas básicas ya habían sido descubiertas por otros. Además, los fundamentos matemáticos de Fourier eran aún imprecisos, y fue P.L. Dirichlet, quien, en 1829, aportó las condiciones precisas bajo las cuales una señal periódica puede representarse por una serie de Fourier.

El tributo más significativo al trabajo de Fourier ha sido el enorme impacto del mismo en numerosas disciplinas dentro del área de las matemáticas, ciencia e ingeniería, dado que hay numerosos problemas en los cuales las señales periódicas, y por lo tanto las series y transformada de Fourier juegan un papel importante. En efecto, las señales periódicas surgen al describir el comportamiento periódico del clima terrestre, las ondas generadas por los alternadores, o, incluso, las olas en el océano, que consisten en combinaciones lineales de ondas senoidales con diferentes períodos espaciales, o longitudes de onda. Asimismo, los rectificadores no filtrados alimentados por una señal senoidal producen ondas senoidales rectificadas que no son senoidales, pero son periódicas. El generador de barrido usado para controlar el haz de electrones en un osciloscopio produce una onda periódica triangular. Los osciladores electrónicos que se utilizan en ensayos de laboratorio están diseñados para generar ondas periódicas no senoidales. Estos generadores de funciones son capaces de producir ondas cuadradas, triangulares o de pulsos rectangulares. Otro problema que incrementa el interés en las ondas periódicas es que los generadores de potencia, aún cuando se diseñen para producir una onda senoidal, no pueden generar ondas senoidales puras pero la resultante es, sin embargo, periódica.

El interés en las funciones periódicas se basa también en que una alinealidad en un circuito que debería ser lineal crea una onda periódica no senoidal. Ejemplo de este fenómeno son los rectificadores antes mencionados, la saturación magnética, que ocurre tanto en máquinas como en transformadores, o “recortes” en circuitos electrónicos, que utilizan transistores en condiciones de corte o saturación.

12.2 Generalidades sobre el método de la serie de Fourier

Una función periódica de período T se puede representar mediante una suma de funciones senoidales cuyas frecuencias son múltiplos de $1/T$ (serie de Fourier). Esta serie nos será útil para hallar la respuesta de un circuito a una señal de entrada periódica no senoidal, sumando las respuestas del circuito a cada uno de los términos senoidales individuales que representan la onda de entrada en la serie de Fourier. La ventaja esencial de la serie es que representa una onda periódica de alimentación mediante una suma de señales, en un método similar al usado en física cuando se descompone un vector fuerza en una suma de vectores perpendiculares. En la serie de Fourier la onda de entrada se descompone en una suma de componentes senoidales, mutuamente ortogonales, y nos **permite entonces aplicar el teorema de superposición para obtener la respuesta a la entrada dada.**

A continuación veremos los lineamientos básicos para la determinación de la respuesta de un circuito a una onda periódica triangular. En la Figura 1(a) se muestra dicha onda, la cual se aplica al circuito de la Figura 1(b), en el que se pretende determinar la tensión de salida $v_o(t)$. La solución es simple mediante la aplicación de Fourier. En efecto, el primer paso consiste en la representación de la onda triangular mediante una serie de Fourier, es decir, mediante una suma de términos senoidales, la cual también se muestra en la Fig. 1. El segundo paso consiste en la determinación de la respuesta del circuito a cada uno de los términos senoidales, lo cual es simple mediante la aplicación de técnicas de análisis de circuitos en régimen senoidal. El tercer y último paso es aplicar superposición, dado que al ser un circuito lineal, la respuesta a la onda triangular descompuesta por Fourier en una suma de senoide es la suma de las respuestas a cada senoide actuando sola. Es decir, este paso es una síntesis, en la cual se construye la onda de salida sumando todas sus componentes senoidales.

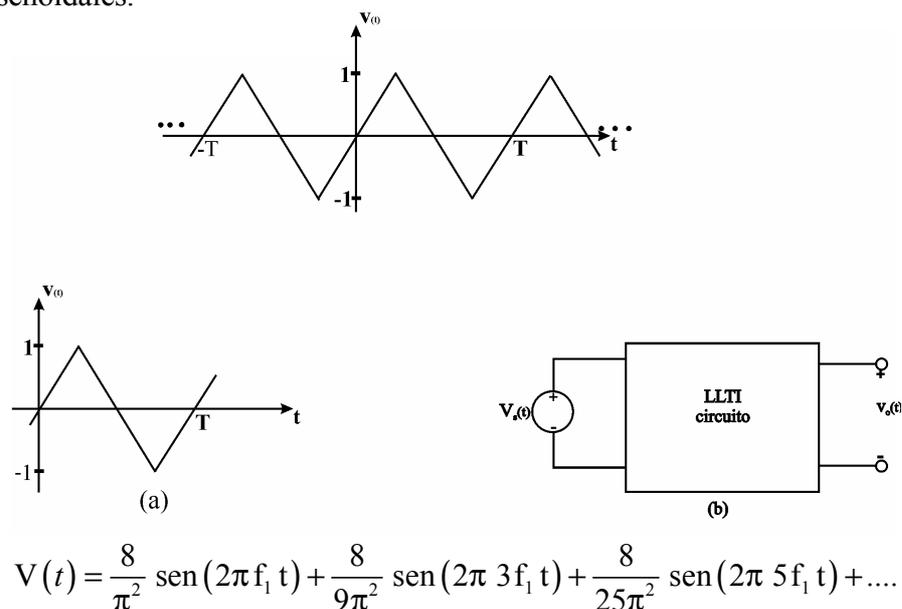


Fig. 1

Vemos así que la respuesta de un circuito a una entrada periódica estará representado analíticamente mediante una suma infinita de senoides, en la misma forma que fue representada la entrada. De acuerdo a la mayor o menor exactitud que se pretenda, se podrá limitar el número de términos de la suma para obtener una aproximación más o menos exacta de $v_o(t)$.

12.3 Gráficos de interferencia.

Para comprender mejor la serie de Fourier, es útil entender primero el fenómeno de interferencia. Se denomina interferencia al fenómeno que se produce toda vez que se suman ondas senoidales de distintas frecuencias, y el resultado es siempre una onda no senoidal. Como ejemplo, consideremos la suma

$$v(t) = 1 + 2 \cos 2\pi f_1 t + 2 \cos 2\pi 2f_1 t + \dots + 2 \cos 2\pi 5f_1 t$$

A cada uno de los términos senoidales de esta suma se las llama *componentes*. Vemos que las componentes tiene frecuencias $f_0 = 0/T$ (Componente de Continua), $f_1 = 1/T$, $f_2 = 2/T, \dots, f_5 = 5/T$ que son múltiplos de $1/T$, las cuales se grafican individualmente en la Fig. 2(a), mientras que en la Fig. 2(b) se muestra la suma de las componentes $v(t)$. Cabe destacar que todas la ondas con frecuencia múltiplos enteros de $1/T$ poseen igual desfase.

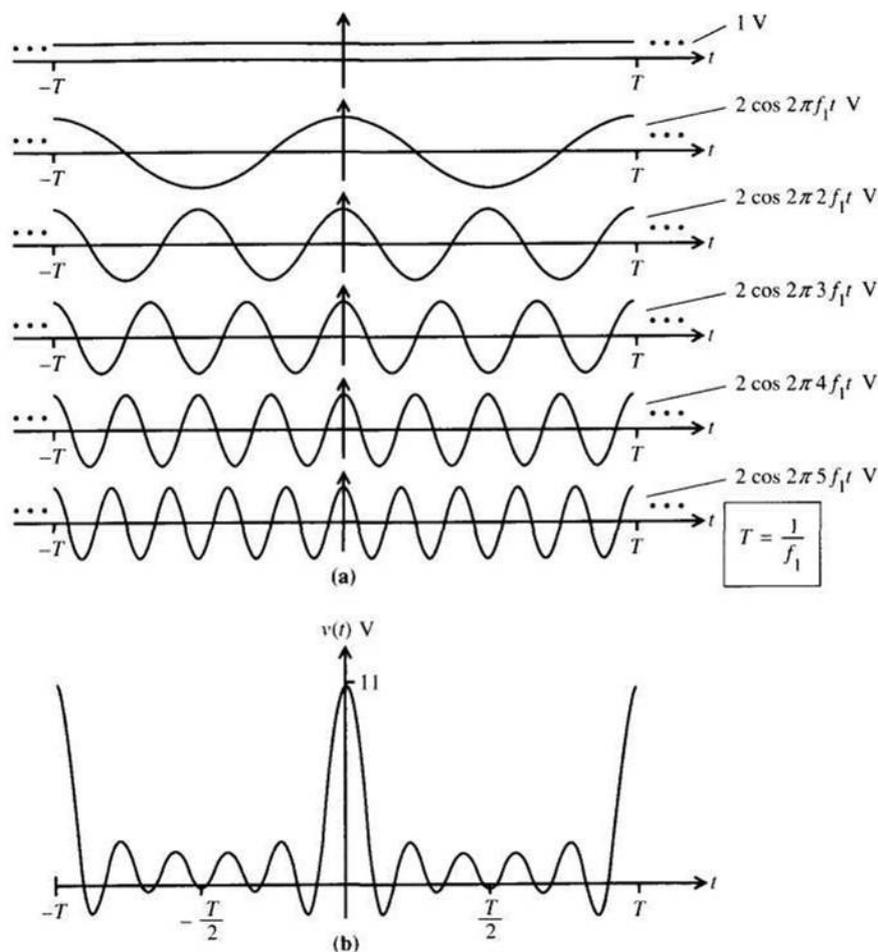


Fig. 2

En la Fig. 2(b) se puede observar que la función $v(t)$ es periódica de período T , condición que también puede obtenerse por trigonometría, y que además es no senoidal. Vemos que para valores de t próximos a kT , con $k = 0, 1, 2, \dots$, las componentes tienen el mismo signo por lo que sus efectos se refuerzan. Esto se denomina *interferencia constructiva*. Para valores de t lejos de kT (por ejemplo $T/2$), los valores numéricos de las componentes no tienen el mismo signo, cancelándose entre sí en la suma y obteniéndose valores de $v(t)$ pequeños, fenómeno que se denomina *interferencia destructiva*.

Vemos así que el fenómeno de interferencia es el que origina que la forma de onda $v(t)$ sea periódica pero no senoidal. Fue Fourier quien por primera vez propuso que todas las señales periódicas pueden obtenerse como el resultado de interferencias destructivas y constructivas de componentes senoidales, designando a las ondas como la de la Fig. 2(b) como gráficos de interferencia.

12.4 Forma Seno-Coseno de la serie de Fourier

Consideraremos el problema de representar una onda periódica real arbitraria $v(t)$ como una suma de términos o componentes senoidales, tal como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} v(t) &= a_0 + a_1 \cos 2\pi f_1 t + \dots a_n \cos 2\pi n f_1 t + \dots b_1 \sin 2\pi f_1 t + \dots b_n \sin 2\pi n f_1 t + \dots = \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2\pi n f_1 t + b_n \sin 2\pi n f_1 t) \end{aligned} \quad (1)$$

donde $f_1 = 1/T$, y t es el período de $v(t)$. La pregunta es ahora, como están relacionados los coeficientes a_0 , a_n y b_n con la función $v(t)$. En primer lugar, observamos que a_0 debe ser el valor medio de $v(t)$, dado que los valores medios de los restantes términos del segundo miembro son cero, por lo que:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v(t) dt \quad (2)$$

con t_0 arbitrario.

Multiplicando ambos miembros de la ecuación (1) por $\cos(2\pi n f_1 t)$ e integrando en un intervalo de duración T , llegamos, luego de operar, a que:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v(t) \cos(2\pi n f_1 t) dt \quad n = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Los coeficientes b_n pueden obtenerse en forma similar si multiplicamos ambos miembros por $\sin(2\pi n f_1 t)$ e integramos en un intervalo de duración T , llegamos a que:

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v(t) \sin(2\pi n f_1 t) dt \quad n = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Los coeficientes a_n y b_n están unívocamente determinados y se denominan coeficientes de Fourier de $v(t)$. Dimensionalmente se expresan en la misma unidad que $v(t)$, y su valor se calcula directamente de $v(t)$, en forma independiente de los restantes coeficientes. Esta independencia es

consecuencia del hecho que los términos del segundo miembro de la ecuación (1) son ortogonales en un intervalo T, es decir, se verifica que:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} x_1(t) x_2(t) dt = 0$$

Como consecuencia de la ortogonalidad, todas las integrales del segundo miembro se igualan a cero, con lo cual el trabajo de cálculo se simplifica notablemente.

12.5 Teorema de Parseval para ondas periódicas reales.

Vimos anteriormente que el valor eficaz al cuadrado de una onda es numéricamente igual a la potencia normalizada de la onda, la cual es la potencia activa que la onda disipa cuando se aplica a una resistencia de 1Ω . El teorema de Parseval muestra que la potencia normalizada en una onda periódica puede expresarse directamente en función de los coeficientes reales de Fourier, y puede obtenerse escribiendo la potencia normalizada en $v(t)$ como:

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2\pi n f_1 t + b_n \sin 2\pi n f_1 t) \right)^2 dt \quad n = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Cuando se desarrolla el cuadrado del paréntesis del segundo miembro se obtiene numerosos productos cruzados, los cuales una vez integrados conducen a ceros, pues las componentes de la serie de Fourier son ortogonales. Las integrales de los productos no cruzados se obtiene fácilmente, y el resultado es:

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v^2(t) dt = a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} b_n^2 \quad (6)$$

Se puede ver fácilmente que la cantidad a_0^2 es la potencia normalizada de la componente de continua, a_n^2 es la potencia normalizada de la componente $a_n \cos 2\pi n f_1 t$ y b_n^2 es la potencia normalizada en $b_n \sin 2\pi n f_1 t$.

Por lo tanto, el teorema de Parseval nos dice que **la potencia normalizada total en $v(t)$ es igual a la suma de las potencias normalizadas de cada una de las componentes de la serie de Fourier de $v(t)$** . Esto significa que si $v(t)$ se aplica a una resistencia, la potencia activa total suministrada igualará a la suma de las potencias activas disipadas por las componentes individuales de la serie de Fourier.

12.6 Propiedades de simetría

Investigaremos ahora la relación entre la simetría de la onda y su serie de Fourier. Las tres propiedades de simetría descritas a continuación son importantes porque nos dicen cuando serán cero ciertos coeficientes de Fourier sin necesidad de evaluar las correspondientes integrales.

*** Propiedad 1:** si $v(t)$ es una función par, es decir, si $v(-t) = v(t)$, la serie de Fourier de $v(t)$ contiene sólo componentes pares.

Estas componentes son los términos de continua a_0 y los términos coseno. Es decir, para una función par, los $b_n = 0$ para $n = 1, 2, 3, \dots$. Un ejemplo de la función par es el tren de pulsos trapecoidal de la Figura 3.

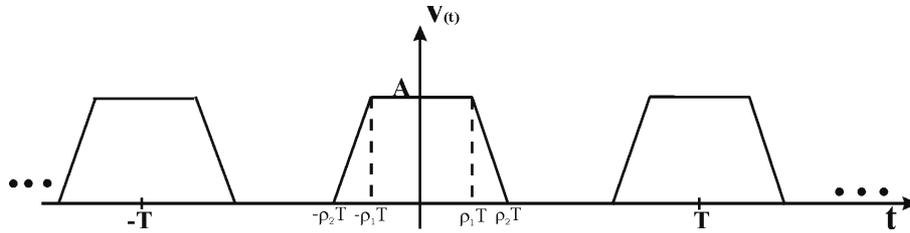


Fig. 3

*** Propiedad 2:** Si $v(t)$ es una función impar, $v(-t) = -v(t)$, y la serie de Fourier contiene solo componentes armónicas impares.

Estas componentes son los términos seno: $b_n \sin 2\pi n f_1 t$, $n=1, 2, \dots$. Luego, los $a_n = 0$ para $n = 0, 1, 2, \dots$. Como ejemplo se muestra en la Figura 4 una onda diente de sierra.

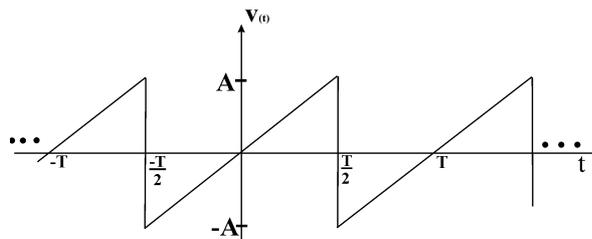


Fig. 4

• **Propiedad de simetría 3:** Una onda periódica que satisface la condición de que $v(t) = -v(t - T/2)$ se dice que posee simetría de media onda. Un ejemplo de una onda con simetría de media onda es la doble diente de sierra de la Fig. 5. En este caso, si $v(t)$ tiene simetría de media onda, su serie de Fourier contiene sólo componentes con simetría de media onda, es decir, componentes de frecuencias que sean múltiplos impares de f_1 . Es decir, $a_0 = a_n = b_n = 0$ para $n = 2, 4, 6, \dots$

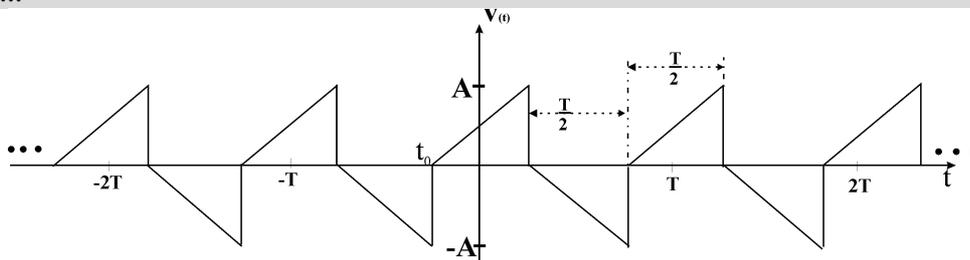


Fig. 5

En síntesis, un onda periódica con simetría par contiene sólo componente de continua y términos coseno. Una onda periódica con simetría impar contiene sólo componentes seno. Una onda con simetría de media onda contiene sólo frecuencias que son múltiplos impares de $1/T$.

Importante: es frecuente que los circuitos electrónicos sumen tensiones de continua a formas de onda que poseen simetría impar o de media onda. Estrictamente hablando, esto destruye la simetría involucrada. Sin embargo, la suma de una tensión de continua a cualquier forma de onda periódica cambia sólo el coeficiente de continua a_0 de la serie. Por lo tanto, si se debe trabajar con una onda que poseería simetría impar o de media onda luego de la sustracción del nivel de continua, todos los coeficientes de Fourier excepto a_0 satisfarán las condiciones dadas en las propiedades de simetría 2 y 3.

12.7 Forma amplitud - fase de la serie de Fourier.

Otra forma útil de la serie de Fourier de una onda periódica real puede obtenerse de la identidad:

$$A_n \cos(2\pi n f_1 t + \Phi_n) = A_n \cos \Phi_n \cos 2\pi n f_1 t - A_n \sin \Phi_n \sin 2\pi n f_1 t \quad (7)$$

Si hacemos:

$$a_n = A_n \cos \Phi_n \quad n = 1, 2, \dots \quad (8)$$

$$b_n = -A_n \sin \Phi_n \quad n = 1, 2, \dots \quad (9)$$

y reemplazamos en la forma seno coseno, resulta:

$$\begin{aligned} v(t) &= A_0 + A_1 \cos(2\pi n f_1 t + \Phi_1) + \dots + A_n \cos(2\pi n f_1 t + \Phi_n) + \dots \\ &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi n f_1 t + \Phi_n) \quad (10) \end{aligned}$$

en la cual:

$$A_0 = a_0$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\Phi_n = \tan^{-1} \left(\frac{-b_n}{a_n} \right) \quad n = 1, 2, \dots$$

A la ecuación (10) se la denomina **forma amplitud-fase de la serie de Fourier**. Las componentes senoidales de la forma amplitud-fase se denominan **tonos o armónicas**. Al armónico $A_1 \cos(2\pi n f_1 t + \Phi_1)$ se lo denomina **fundamental o primera armónica**, al armónico $A_2 \cos(2\pi 2 f_1 t + \Phi_2)$ segunda armónica, y así sucesivamente. Así, el coeficiente A_n representa la amplitud del n-esimo armónico y Φ_n la fase del n-esimo armónico.

La duplicación de la frecuencia eleva la armónica una octava, por lo que la segunda armónica está una octava por arriba de la primera, y la cuarta armónica está dos octavas por arriba de la primera. Los términos octava y armónica son idénticos a los utilizados en música, y esta terminología común es muy útil al analizar o diseñar un amplificador de audio.

12.8 Espectro unilateral de amplitud, fase y potencia.

La representación de los coeficientes de Fourier $|A_n|$ **en función de la frecuencia**, como se muestra en la Fig. 6(a), se denomina **espectro unilateral de amplitud** de $v(t)$. La representación correspondiente de los coeficientes de Fourier Φ_n **en función de la frecuencia**, que se muestra en la Fig. 6(b), se denomina **espectro unilateral de fase** de $v(t)$. Ambas gráficas indican que a cada

frecuencia $f_n = n f_1$ (con $n = 0, 1, 2, \dots$) hay componentes senoidales en $v(t)$. El espectro de amplitud nos dice que la amplitud de la componente de frecuencia $f_n = n f_1$ es A_n , y se designa por la altura de la línea correspondiente. El espectro de fase nos dice que la fase de la componente de frecuencia $n.f_1$ es Φ_n , representado por la altura de la línea correspondiente. Los espectros de fase y se amplitud se denominan espectros de línea pues consisten en líneas.

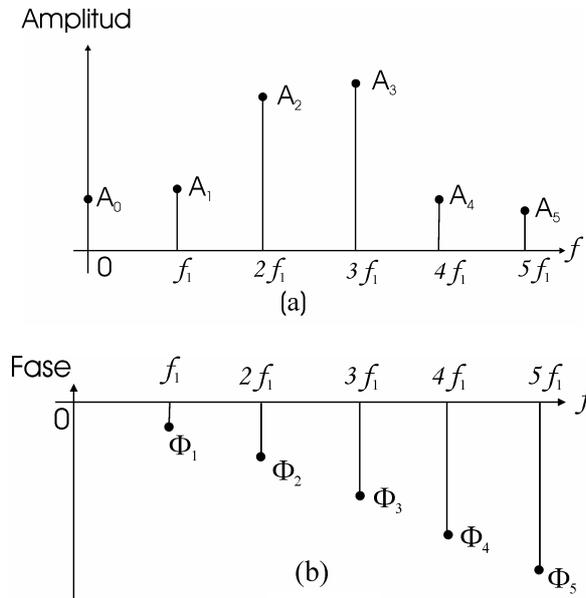


Fig. 6

Los coeficientes A_k se denominan coeficientes espectrales de $v(t)$ y miden la parte de la señal $v(t)$ que está en cada armónica de la componente fundamental. El término a_0 es la componente de continua y es simplemente el valor medio de $v(t)$ en un período. El término "coeficiente espectral" deriva de problemas tales como la descomposición de la luz en líneas espectrales, o sea las componentes elementales a distintas frecuencias. La intensidad de cualquier línea en tal descomposición es una medida directa de la parte de energía total de la luz a la frecuencia correspondiente a la línea.

12.9 Replanteo del teorema de Parseval para ondas periódicas reales.

Los términos de la derecha de la expresión amplitud-fase de la serie de Fourier, tal como ocurría con los términos en la forma seno-coseno, son ortogonales en el intervalo T . En consecuencia, la potencia normalizada en $v(t)$

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \left[A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi n f_1 t + \Phi_n) \right]^2 dt \quad (12)$$

iguala a la suma de las potencias normalizadas en las componentes individuales. De esta forma surge el replanteo del teorema de Parseval para la forma amplitud-fase, tal como se muestra a continuación:

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v^2(t) dt = A_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} A_n^2 \quad (13)$$

Esta expresión nos permite calcular la potencia normalizada total de una onda. La representación de las potencias normalizadas para cada una de las componentes de la ecuación (13) en función de la frecuencia, tal como se muestra en la Figura 7 se denomina *espectro unilateral de potencia de $v(t)$* . La altura de la línea en $f = n \cdot f_1$ en el espectro de potencia es numéricamente igual a la potencia media que se disiparía si la n -ésima armónica de tensión se aplicara en los bornes de una resistencia de 1Ω . De acuerdo al teorema de Parseval, la suma de las alturas de todas las líneas en el espectro de potencia es numéricamente igual a la potencia media (activa) que se disiparía si $v(t)$ se aplicara en los bornes de una resistencia de 1

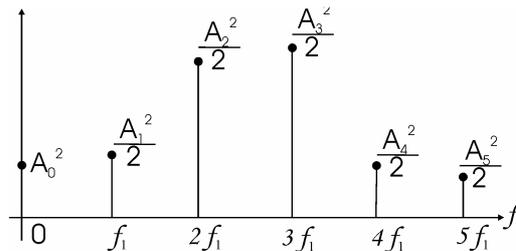


Fig. 7

12.10 Forma compleja de la serie de Fourier.¹

La *forma compleja* de la serie de Fourier es la representación de una onda periódica mediante una suma de exponenciales complejas. Esta forma suele ser más conveniente de usar que las formas reales, además de resultar una forma útil para proceder a las transformaciones de Laplace o de Fourier. La forma compleja de la serie de Fourier de una onda periódica real puede obtenerse directamente a partir de la forma real, sin embargo, es útil proceder a una generalización de forma de incluir ondas periódicas complejas. Consideremos una función periódica $v(t)$ real o compleja arbitraria, y escribámosla como una serie compleja de Fourier:

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n e^{j2\pi n f_1 t} \quad (14)$$

donde $f_1 = 1/T$ y T es el periodo. Las cantidades V_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ son fasores, y se denominan **coeficientes complejos de Fourier**. Observamos que todos los términos en la sumatoria son fasores rotantes. Los que corresponden a $n > 0$ rotan en sentido antihorario, y los que corresponden a $n < 0$ rotan en sentido horario. La suma de los fasores rotantes es $v(t)$. La expresión del k -ésimo fador puede obtenerse si multiplicamos ambos miembros de la ecuación 14 por

$$e^{-j2\pi k f_1 t}$$

e integramos desde t_0 a $t_0 + T$, donde t_0 es arbitrario. Esto nos conduce a:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} v(t) e^{-j2\pi k f_1 t} dt = \int_{t_0}^{t_0+T} V_n e^{j2\pi n f_1 t} e^{-j2\pi k f_1 t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n \int_{t_0}^{t_0+T} e^{j2\pi(n-k)f_1 t} dt \quad (15)$$

Por aplicación de la identidad de Euler, podemos escribir:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} e^{j2\pi(n-k)f_1 t} dt = \int_{t_0}^{t_0+T} \cos 2\pi(n-k)f_1 t dt + j \int_{t_0}^{t_0+T} \sen 2\pi(n-k)f_1 t dt \quad (16)$$

¹ Las secciones 12.10 a 12.12 pueden omitirse para este curso, quedando a título informativo para usos en otras asignaturas.

Vemos que si $n \neq k$, cada una de las dos integrales del segundo miembro de la ecuación (16) es cero, porque el área bajo un número entero de ciclos de cualquier senoide es cero. Si $n = k$, la segunda integral del segundo miembro es cero, porque $\sin 0 = 0$. Sin embargo, como $\cos 0 = 1$, el valor de la primera integral del segundo miembro es T para $n = k$:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} e^{j2\pi(n-k)f_1 t} dt = \begin{cases} T & n = k \\ 0 & n \neq k \end{cases} \quad (17)$$

Reemplazando la ecuación 17 en la ecuación 15 llegamos a que:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} v(t) e^{-j2\pi k f_1 t} dt = \dot{V}_k T \quad (18)$$

donde V_k es el k -ésimo coeficiente complejo de Fourier. Sustituyendo k por n en la ecuación 18 y resolviendo para V_n obtenemos:

$$V_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v(t) e^{-j2\pi n f_1 t} dt \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (19)$$

Esta es la expresión general del n -ésimo coeficiente de la serie compleja de Fourier de una onda periódica arbitraria real o compleja $v(t)$, y en el caso de que $v(t)$ sea real se obtienen resultados especiales, tal como veremos a continuación.

12.11 Relación entre las formas real y compleja de la serie de Fourier de una señal real.

Ahora analizaremos la relación existente entre las formas real y compleja de la serie de Fourier. Mediante la aplicación de la identidad de Euler, la ecuación 14 puede escribirse como:

$$\dot{V}_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v(t) \cos 2\pi n f_1 t dt - j \int_{t_0}^{t_0+T} v(t) \sin 2\pi n f_1 t dt \quad (20)$$

para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Comparando la ecuación (20) con las ecuaciones (2), (3) y (4) vemos que para $v(t)$ real:

$$\dot{V}_n = \frac{1}{2} a_n - j \frac{1}{2} b_n \quad \text{para } n = 1, 2, \dots$$

y

$$V_0 = a_0$$

(21)

Se deduce así que los coeficientes reales de Fourier a_0 , a_n y b_n con $n = 1, 2, \dots$ de una onda periódica real $v(t)$ pueden obtenerse directamente a partir de los coeficientes de la serie compleja de Fourier de dicha onda mediante el uso de las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \Re \left\{ \dot{V}_n \right\} & n = 1, 2, \dots \\ b_n &= -2 \Im \left\{ \dot{V}_n \right\} & n = 1, 2, \dots \\ a_0 &= V_0 \end{aligned} \quad (22)$$

También podemos obtener las amplitudes de Fourier, A_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ y las fases $\Phi_n = 1, 2, 3, \dots$ de una onda periódica real $v(t)$ a partir de los coeficientes de la serie compleja de Fourier V_n de dicha onda. Para ello, reemplazamos las expresiones 8, 9 y 11 (a) en las ecuaciones 21 a y 21 b para obtener:

$$\dot{V}_n = \frac{1}{2} A_n \cos \Phi_n + j \frac{1}{2} A_n \operatorname{sen} \Phi_n = \frac{1}{2} A_n e^{j\Phi_n} \quad \text{para } n = 1, 2, \dots$$

y

$$V_0 = A_0 \quad (23)$$

Esto nos conduce a formulas útiles:

$$\begin{aligned} A_0 &= V_0 \\ A_n &= 2 \left| \dot{V}_n \right| \quad n = 1, 2, 3, \dots \\ \Phi_n &= \angle \dot{V}_n \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (24)$$

Una observación final respecto de los coeficientes complejos de Fourier de una onda periódica real surge a partir del reemplazo de n por $-n$:

$$V_{-n} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v(t) e^{\pm j 2\pi n f_1 t} dt \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (25)$$

Vemos que esta sustitución ha cambiado el signo de j en el exponente de la integral en la ecuación (19). Si $v(t)$ es real, entonces el cambio en el signo de j en el exponente es equivalente a conjugar el segundo miembro, o sea, para una onda real $v(t)$:

$$V_{-n} = \frac{1}{T} \left[\int_{t_0}^{t_0+T} v(t) e^{-j 2\pi n f_1 t} dt \right]^* \quad (26)$$

la cual, comparada con la ecuación (19) muestra que:

$$\dot{V}_{-n} = \dot{V}_n^* \quad (27)$$

Es decir, para una onda real, podemos obtener los coeficientes complejos de Fourier de índice negativo simplemente conjugando los coeficientes complejos de índice positivo.

12.12. Teorema de Parseval para ondas periódica reales o complejas.

La forma más general del teorema de Parseval se aplica tanto a ondas reales como complejas, y la obtenemos conjugando ambos miembros de la ecuación (14), multiplicando el resultado por $v(t)$ e integrando desde t_0 a $t_0 + T$. Esto nos conduce a:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} v(t) v^*(t) dt = \int_{t_0}^{t_0+T} v(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{V}_n^* e^{-j 2\pi n f_1 t} dt \quad (28)$$

Intercambiando el orden de la suma y la integración obtenemos:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} v(t) v^*(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n^* \int_{t_0}^{t_0+T} v(t) e^{-j2\pi n f_1 t} dt \quad (29)$$

lo cual, mediante la ecuación (19) resulta:

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v(t) v^*(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{V}_n \dot{V}_n^* \quad (30)$$

es decir,

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |v(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\dot{V}_n|^2 \quad (31)$$

expresión del teorema de Parseval para ondas periódicas reales o complejas. Por supuesto, si $v(t)$ es real, $v(t)^2 = v^*(t)v(t)$.

12.13 Espectro bilateral de amplitud, fase y potencia.

La representación de las magnitudes y fases de los coeficientes complejos de Fourier en función de la frecuencia tal como se muestran en la Fig. 8 se denominan *espectros bilaterales de amplitud y de fase de $v(t)$* . Dado que $v(t)$ puede sintetizarse a partir de su espectro, este provee una representación completa en el dominio frecuencial de $v(t)$.

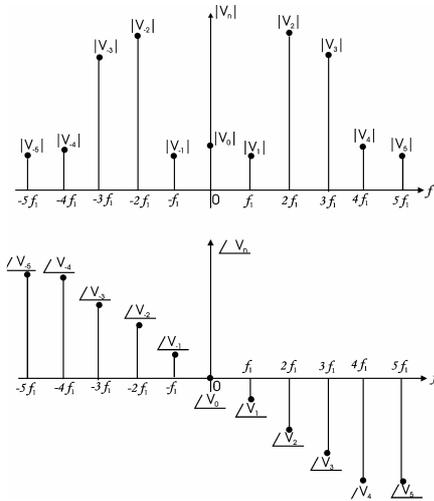


Fig. 8

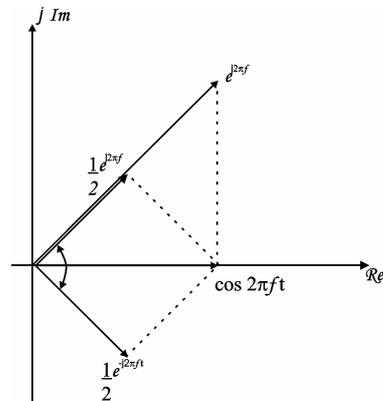


Fig. 9

Vemos que existen líneas espectrales para frecuencias positivas y negativas. Las frecuencias negativas no tienen existencia física, sino que surgen porque representamos senoides como fasores rotantes, tal como se ve en la Fig.9.

En efecto, como

$$\cos 2\pi f t = \Re\{e^{j2\pi f t}\} = \frac{1}{2} e^{j2\pi f t} + \frac{1}{2} e^{-j2\pi f t} \quad (32)$$

el proceso de tomar la parte real de

$$e^{j2\pi f t}$$

es equivalente a sumar el fasor que rota en sentido antihorario $1/2 e^{j2\pi f t}$ al fasor que rota en sentido horario $1/2 e^{-j2\pi f t}$. Por lo tanto, las frecuencias negativas se refieren simplemente a fasores que rotan en sentido horario. Debido a esto, **para una onda periódica real el espectro de amplitud tiene simetría par**

$$\left| \dot{V}_n \right| = \left| \dot{V}_{-n} \right|$$

y el espectro de fase tiene simetría impar

$$\arg \dot{V}_n = -\arg \dot{V}_{-n}$$

La representación de v_n^2 en función de la frecuencia, tal como se ilustra en la Fig. 10 se denomina espectro bilateral de potencia de $v(t)$, y a partir de las ecuaciones (24) y (27) se deduce que, para una onda periódica real $v(t)$:

$$\left| \dot{V}_n \right|^2 + \left| \dot{V}_{-n} \right|^2 = \frac{1}{2} A_n^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (33)$$

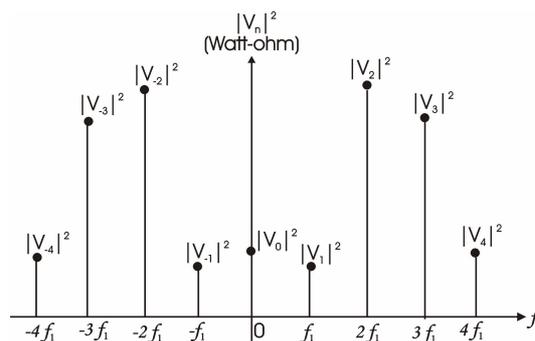


Fig. 10

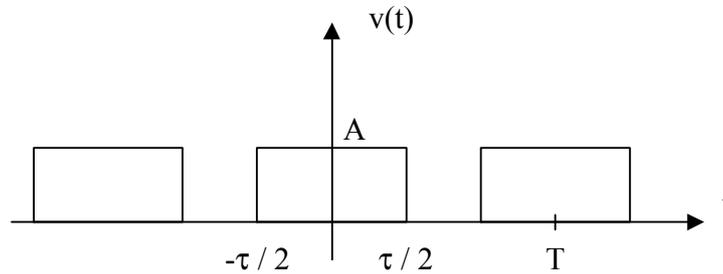
La potencia normalizada de la n -ésima componente de Fourier $A_n \cos(2\pi n f_1 t + \Phi_n)$ es el segundo miembro de la ecuación (33). Por lo tanto, hallamos la potencia normalizada correspondiente a la n -ésima armónica sumando $\left| \dot{V}_n \right|^2$ y $\left| \dot{V}_{-n} \right|^2$. La potencia normalizada correspondiente a la componente de continua es V_0^2 , y la potencia normalizada total de $v(t)$, de acuerdo al teorema de Parseval dada por la ecuación (31), es igual a la suma de todas las líneas del espectro de potencia.

Ejercicios de Aplicación.

1) Una onda periódica está dada por $v(t) = 10 + 7 \cos(6\pi 10^3 t) + 5 \cos(8\pi 10^3 t + 45^\circ)$. Hallar el período T y los coeficientes de la serie real de Fourier.

Rta.: $T = 1 \text{ mseg}$ $a_0 = 10$ $a_3 = 7$ $a_4 = 5 \cos 45^\circ$ $b_4 = -5 \sin 45^\circ$

2) El factor de servicio de un tren de pulsos periódico $v(t)$ como el de la figura siguiente, se define: $F.S = (\tau/T) \times 100 \%$.



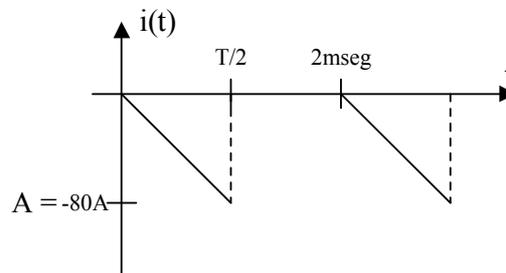
- Graficar $v(t)$ para $A = 5$ y un factor de servicio del 50%.
- Graficar los espectros unilaterales de la amplitud, fase y potencia de $v(t)$ para el caso a).
- Comentar alguna propiedad interesante que muestren las gráficas.

3) Graficar los espectros unilaterales de amplitud, fase y potencia de la onda periódica:

$$v(t) = 5 \cdot \cos(100\pi t) + 17 - 3 \cdot \sin(300\pi t) + 4 \cdot \sin(100\pi t) \text{ V}$$

Rta.: $A_0 = 17\text{V}$ $A_1 = \sqrt{41}\text{V}$ $A_3 = 3\text{V}$ $\theta_1 = \arctan(5/4) = 51,34^\circ$ $\theta_3 = 180^\circ$

4) a) Encontrar los coeficientes de Fourier de la forma seno-coseno de la siguiente onda:



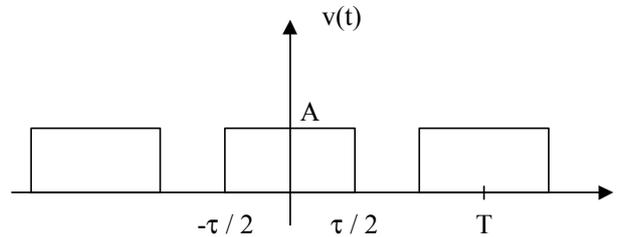
b) La Distorsión Total Armónica (Total Harmonic Distortion - THD) se define como el cociente entre el valor cuadrático medio del conjunto de los armónicos superiores y la amplitud de la armónica fundamental y da una idea de la distorsión que existe entre la señal dada y una onda senoidal de frecuencia igual a la frecuencia fundamental de la onda. Calcular el coeficiente THD para la señal $i(t)$ considerando los primeros 10 armónicos.

$$\text{THD} = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} (A_n)^2}}{A_1}$$

Rta.: a) $a_0 = \frac{A}{4}$ $a_n = \frac{A}{(\pi n)^2} ((-1)^n - 1)$ $b_n = \frac{A}{\pi n} (-1)^{n+1}$

Nota: Ver en el Anexo (última hoja) la aproximación de la onda con diferente cantidad de armónicos

5) El tren de pulsos periódico de la figura se aplica en bornes de una resistencia de $3K\Omega$. Hallar el porcentaje de potencia activa total disipada debido a la componente de continua. Escribir la respuesta en función de τ y T .



Rta.: $\frac{P_{dc}}{P_{total}} = \frac{\tau}{T} \cdot 100$

12.14 Análisis de circuitos en régimen poliarmónico.

Dada una magnitud cuya evolución en el tiempo es:

$$x(t) = X_m \text{sen}(\omega t + \theta)$$

la información que suministra se presenta en el dominio temporal como se ve en la Fig. 11

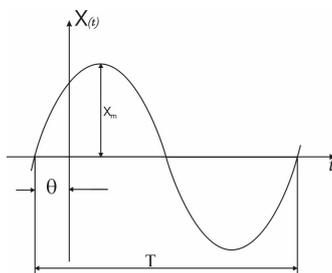


Fig. 11

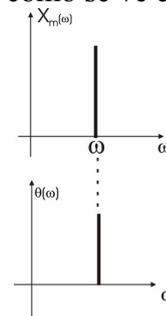


Fig. 12

Esta información, según hemos visto, puede representarse en el dominio frecuencial dando lugar a los espectros de amplitud y fase que se muestran en la Figura 12, de la cual se desprende que, para la señal senoidal existirá una sola componente de amplitud y una de fase en el dominio frecuencial. Si en lugar de la señal senoidal se dispusiera de una señal periódica como la mostrada en la Fig. 13, por medio de la serie de Fourier podrá descomponerse en sus componentes en el dominio frecuencial como se indica en la siguiente expresión:

$$x(t) = X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_{nM} \text{sen}(n\omega t + \theta_n)$$

y se representa en la Fig. 14.

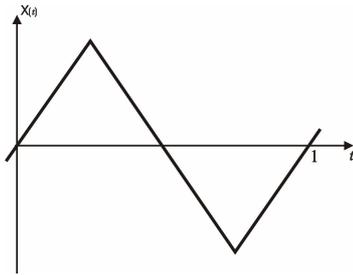


Fig. 13

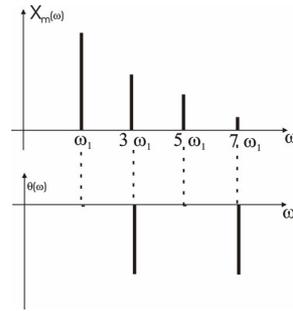


Fig. 14

Cabe recordar que ω es la pulsación de la componente senoidal de menor frecuencia, llamada fundamental o primera armónica. Los demás valores de la pulsación que se muestran en los espectros discontinuos de la Fig. 14 son múltiplos enteros de ω . En consecuencia, si una gran cantidad de señales, llamadas poliarmónicas, puede descomponerse en varias componentes senoidales de distinta amplitud y frecuencia, será conveniente extender los conceptos vistos anteriormente para la solución individual de cada una de ellas.

Si la señal en análisis posee un período grande, los intervalos entre armónicas que se muestran en la Figura 14 serán pequeños, y, en el límite, si el período es infinito, o sea, si la señal es aperiódica, se tendrá un *espectro continuo* que se analiza mediante la Transformada de Fourier.

12.15 Obtención de la respuesta permanente de un circuito en régimen poliarmónico.

Si un circuito lineal es excitado por un generador que provee una señal poliarmónica, podrá resolverse aplicando el siguiente método. En primer lugar, se descompondrá la señal poliarmónica en serie de Fourier. Luego, se hallará la respuesta temporal del modelo a cada una de las excitaciones componentes, y finalmente, en base al *principio de superposición* se hallará la respuesta del circuito como la suma algebraica de las respuestas del modelo a cada una de las excitaciones componentes.

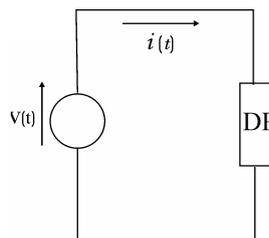


Fig. 15

Supongamos, por ejemplo, que el dipolo pasivo DP de la Figura 15 se alimenta con un generador de tensión poliarmónico cuya evolución puede expresarse en serie de Fourier como:

$$v(t) = V_o + \sum_{n=1}^{\infty} V_{nM} \text{sen}(n\omega t + \theta_{vn})$$

o, lo que es lo mismo:

$$v(t) = V_o + V_{1M} \text{sen}(\omega t + \theta_{v1}) + V_{2M} \text{sen}(\omega t + \theta_{v2}) + \dots + V_{nM} \text{sen}(\omega t + \theta_{vn})$$

lo cual, en forma sintética, puede expresarse como:

$$v(t) = V_0 + v_1(t) + v_2(t) + \dots + v_n(t)$$

De acuerdo a esta expresión, la señal de la fuente no senoidal está representada por la suma de una tensión continua y senoides de distinta frecuencia y amplitud, y a consecuencia de esto la fuente puede reemplazarse por una conexión en serie de un generador de tensión continua y generadores de tensión senoidal, como se ilustra en la Figura 16. Debido a la linealidad del dipolo, puede aplicarse superposición, resolviendo para determinar el estado de régimen del mismo para cada una de las excitaciones componentes, y hallar finalmente la respuesta a la excitación poliarmónica como suma de las respuestas individuales a cada uno de los generadores componentes.

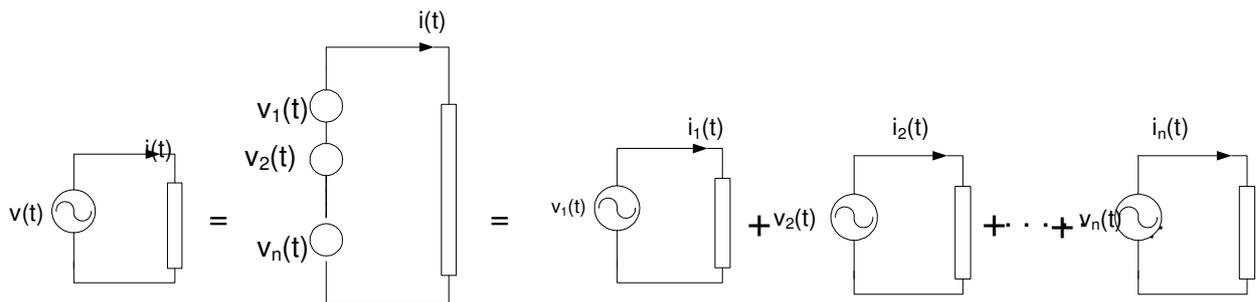


Fig. 16

Dado que el primero de los generadores de la Figura 16 es de valor constante en el tiempo, significa que debemos resolver un circuito alimentado por una fuente de tensión continua. Las restantes son generadores de tensión senoidal del tipo:

$$v_n(t) = V_{M_n} \text{sen}(n\omega t + \phi_{v_n})$$

por lo que se podrá aplicar el método fasorial para cada uno de ellos, es decir, calcular para cada frecuencia el valor de la impedancia Z_n , realizar el cociente entre el valor complejo de tensión y el valor de Z , obteniendo así el valor complejo de la corriente:

$$\dot{I}_n = \frac{\dot{V}_n}{Z_n}$$

y llegando así a que la respuesta temporal asociada a la componente en cuestión será:

$$i_n(t) = I_{M_n} \text{sen}(n\omega t + \phi_{i_n})$$

y la respuesta temporal correspondiente a la excitación poliarmónica será:

$$i(t) = I_0 + i_1(t) + i_2(t) + \dots + i_n(t)$$

Vemos que la suma de las respuestas individuales se efectúa en el dominio temporal, ya que no podrán sumarse los fasores correspondientes a distintas frecuencias, pues girarán con distinta velocidad angular.

Por otra parte, es obvio que el método será eficiente en aquellos casos en que la serie de Fourier sea lo suficientemente convergente como para representar con suficiente exactitud a la señal poliarmónica empleando un reducido número de generadores elementales.

Ejercicios de Aplicación.

1) La f.e.m. de un alternador de 50Hz observada en un osciloscopio es simétrica, consistiendo esencialmente de una fundamental y tercer armónica. Se sabe además $V_{ef1} > V_{ef2}$. Un voltímetro de C.A. indica 100V (valor eficaz), mientras que un voltímetro electrónico acusa 198V (valor máximo).

a) Escribir la ecuación de esta f.e.m. analizando 2 situaciones:

- Armónicos en fase
- Armónicos en contrafase

b) Dibujar la onda para las 2 situaciones.

Rta.: $e(t) = 113,11 \text{ sen } (2\pi 50t) + 84,89 \text{ sen } (6\pi 50t + \pi)$ Fundamental y 3er armónico en contrafase

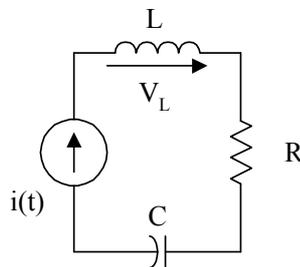
2) Un circuito pasabajos RC tiene como entrada un tren de pulsos periódico, cuya amplitud es $A = 1V$, $\tau = 0,3ms$ y $T = 1ms$. La resistencia es $R = 1K\Omega$. Elegir C para que la componente fundamental de la onda de salida sea 100 veces menor que la componente de continua de la misma.

Rta.: $C = 27,32 \mu F$

3) Dado el circuito indicado en la figura, alimentado por un generador de corriente poliarmónica expresada por:

$$i(t) = 100.\text{sen } (100t + \pi/2) + 50.\text{sen } (300t - \pi/2) - 20.\text{sen } (500t) A$$

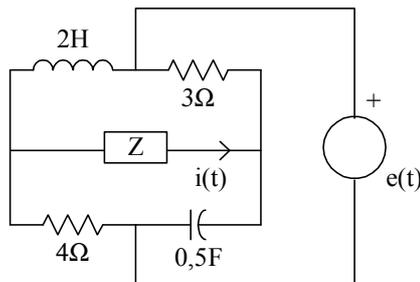
Sabiendo que la tensión eficaz entre los extremos de la bobina es $V_L = 100V$, se pide determinar el valor de L .



Rta.: $L = 6,89 mH$

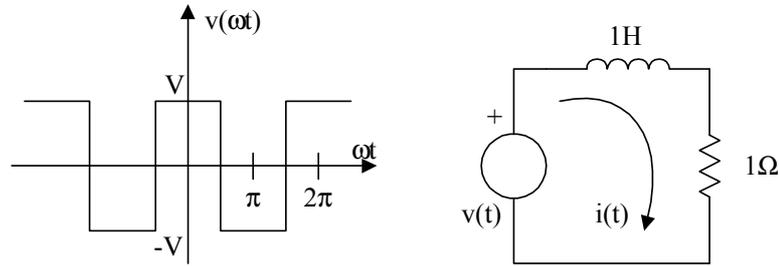
4) En el circuito de la figura, hallar, aplicando el teorema de Thevenin, el valor eficaz de la corriente I , si la f.e.m. aplicada es:

$$e(t) = 20.\text{sen}(1000t) + 10.\text{sen}(3000t) V \quad Z = (1\Omega, 3mH)$$



Rta.: $I = 3,8 mA$

5) Una fuente de tensión $v(t)$, cuya forma es una onda cuadrada, se aplica al circuito RL de la figura. Hallar la corriente de respuesta en estado estacionario.

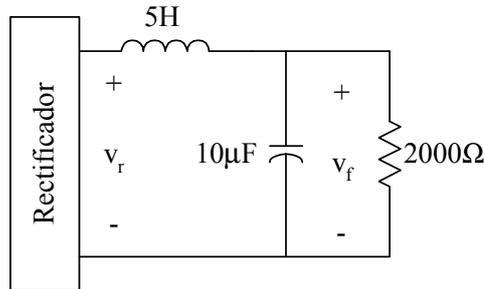


Rta.: $i_s(t) = \frac{4V}{\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos(t - 45^\circ) + \frac{1}{3\sqrt{10}} \cdot \cos(3t + 108,43^\circ) + \frac{1}{5\sqrt{26}} \cdot \cos(5t - 78,69^\circ) \right] A$

6) El circuito de la figura se utiliza para eliminar fluctuaciones de corriente alterna de la salida de un rectificador de onda completa. El rectificador suministra la siguiente tensión en bornes:

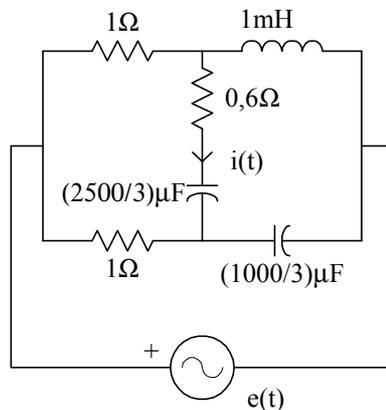
$$v_r(t) = \frac{2 \cdot V_m}{\pi} \left[1 + \frac{2}{3} \cdot \cos(2 \cdot \omega_1 t) - \frac{2}{15} \cdot \cos(4 \cdot \omega_1 t) + \dots \right] V$$

Siendo $\omega_1 = 377 \text{ rad/seg}$, hallar la tensión en bornes de una carga de 2000Ω .



Rta.: $v_f(t) = \frac{2 \cdot V_m}{\pi} \left[1 + 0,0242 \cdot \cos(2 \cdot \omega_1 t - 176,1^\circ) + 0,0012 \cdot \cos(4 \cdot \omega_1 t + 1,9^\circ) + \dots \right] V$

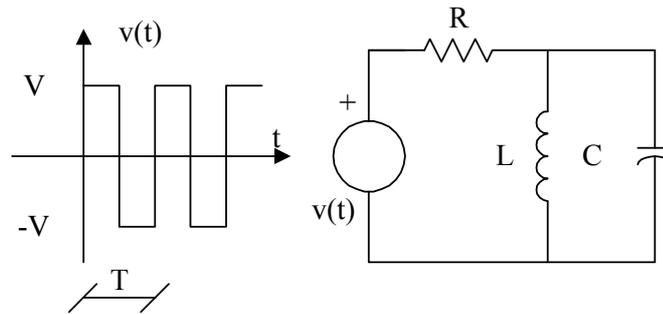
7) En el siguiente circuito obtener $i(t)$. Siendo: $e(t) = 10 + 5 \cdot \text{sen}(1000t) + 15 \cdot \text{sen}(3000t + \pi/4)$



Rta.: $i(t) = [1,83 \cdot \text{sen}(1000t + 151,56^\circ) + 6,42 \cdot \text{sen}(3000t + 125,13^\circ)] A$

8) En la figura siguiente, el circuito se sintoniza a la tercera armónica. Su ancho de banda es el 10% de la frecuencia central.

- a) Obtener las componentes fundamental, tercera y quinta armónica de la tensión de salida.
- b) Comparar la amplitud de la salida de la tercera armónica con la amplitud de la fundamental y la quinta armónica. Basar la comparación en una amplitud unitaria de la tercera armónica. Comentar el resultado.



Rta.:

Fundamental: $\frac{4.V.0,037}{\pi} \angle 87,85^\circ$

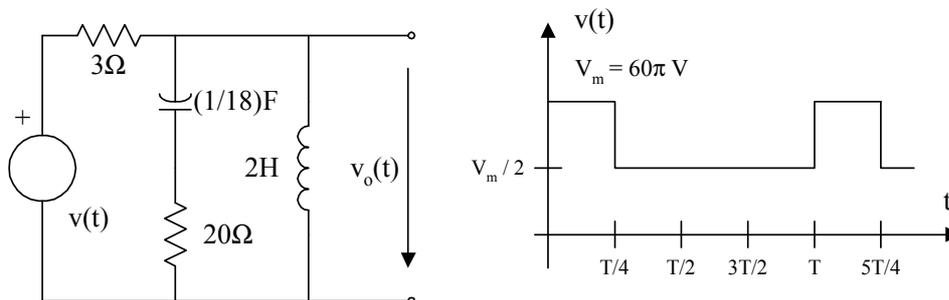
a) Tercera armónica: $\frac{4.V}{3.\pi} \angle 0^\circ$

Quinta armónica: $\frac{4.V.0,093}{5.\pi} \angle -84,64^\circ$

b) Fundamental: 0,111V Tercera armónica: 1V Quinta armónica: 0,058V

9) En el circuito de la figura, teniendo en cuenta hasta el tercer armónico, siendo $T = 628,32$ mseg obtener:

- a) La expresión de la serie real de Fourier de $v(t)$.
- b) La expresión de $v_o(t)$ y sus espectros de amplitud, fase y potencia.



Rta.:

a) $a_o = 37,5.\pi$ $a_k = \frac{30}{k} .sen(\frac{k.\pi}{2})V$ $b_k = \frac{30}{k} \cdot \left[1 - \cos(\frac{k.\pi}{2})V \right]$

$v(t) = 37,5.\pi + 30 .cos(10t) + 30 .sen(10t) + 30 .sen(20t) - 10 .cos(30t) + 10 .sen(30t)V$

b) $v_o(t) = 25,89.\sqrt{2} .sen(10t + 51,78^\circ) + 18,41.\sqrt{2} .sen(20t + 3,39^\circ) + 8,68.\sqrt{2} .sen(30t - 42,73^\circ)V$

12.16 Potencia en circuitos en régimen no senoidal.

Dado que en los circuitos recorridos por señales poliarmónicas coexisten senoides de distinta amplitud y frecuencia, se origina la coexistencia de fasores de distinta pulsación lo que induce a pensar que el procedimiento de cálculo para las potencias en régimen poliarmónico diferirá del correspondiente a régimen permanente senoidal.

De acuerdo a lo visto anteriormente, una tensión y la correspondiente corriente en un circuito en régimen poliarmónico puede expresarse como:

$$\begin{aligned} v(t) &= V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} V_{M_n} \text{sen}(n\omega t + \theta_{v_n}) \\ i(t) &= I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_{M_n} \text{sen}(n\omega t + \theta_{i_n}) \end{aligned} \quad (38)$$

y sus correspondientes valores eficaces pueden calcularse como:

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} V_n^2} \\ I &= \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} I_n^2} \end{aligned} \quad (39)$$

Por definición, el producto escalar de ambas se denomina *potencia aparente*:

$$S = V.I \quad (40)$$

Es decir, se define de manera análoga que en régimen permanente senoidal, y su significado y unidad son los mismos, pero debemos notar que la potencia aparente desarrollada por las señales poliarmónicas *no es igual* a la suma de las potencias aparentes de cada una de las componentes.

Por otra parte, recordamos que la *potencia activa* es el valor medio de la potencia instantánea para un período completo de excitación:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\omega t) i(\omega t) d\omega t \quad (41)$$

Reemplazando en ella las expresiones de tensión y corriente poliarmónica dadas por las ecuaciones 38, resulta:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} V_{M_n} \text{sen}(n\omega t + \theta_{v_n}) \right] \left[I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_{M_n} \text{sen}(n\omega t + \theta_{i_n}) \right] d\omega t \\ P &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V_0 I_0 d\omega t + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} I_{M_n} \text{sen}(n\omega t + \theta_{i_n}) d\omega t + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I_0 \sum_{n=1}^{\infty} V_{M_n} \text{sen}(n\omega t + \theta_{v_n}) d\omega t + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} V_{M_n} \text{sen}(n\omega t + \theta_{v_n}) \sum_{n=1}^{\infty} I_{M_n} \text{sen}(n\omega t + \theta_{i_n}) d\omega t \end{aligned} \quad (42)$$

Debido a la ortogonalidad de funciones, en el segundo miembro de la ecuación (42), las integrales del segundo y tercer término son nulas y las integrales del cuarto término son nulas para armónicas

de distinto orden, por lo que sólo tendrá sentido resolver las integrales que correspondan al producto de armónicas de tensión y corriente del mismo orden. Debido a esto, operando en la mencionada ecuación:

$$P = V_0 I_0 + \frac{1}{2\pi} V_{M_1} I_{M_1} \int_0^{2\pi} \text{sen}(\omega t + \theta_{v_1}) \text{sen}(\omega t + \theta_{i_1}) d\omega t + \quad (43)$$

$$+ \frac{1}{2\pi} V_{M_2} I_{M_2} \int_0^{2\pi} \text{sen}(2\omega t + \theta_{v_2}) \text{sen}(2\omega t + \theta_{i_2}) d\omega t + \dots + \frac{1}{2\pi} V_{M_n} I_{M_n} \int_0^{2\pi} \text{sen}(n\omega t + \theta_{v_n}) \text{sen}(n\omega t + \theta_{i_n}) d\omega t$$

Las integrales planteadas en el segundo miembro de la ecuación (43) resultan el producto de dos funciones senoidales y pueden simplificarse recordando que:

$$\text{sen}\alpha \text{sen}\beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

la cual, aplicada a dicha ecuación, nos conduce a:

$$P = V_0 I_0 + \frac{V_{M_1} I_{M_1}}{4\pi} \left[\int_0^{2\pi} \cos(\theta_{v_1} - \theta_{i_1}) d\omega t - \int_0^{2\pi} \cos(2\omega t + \theta_{v_1} + \theta_{i_1}) d\omega t \right] +$$

$$+ \frac{V_{M_2} I_{M_2}}{4\pi} \left[\int_0^{2\pi} \cos(\theta_{v_2} - \theta_{i_2}) d\omega t - \int_0^{2\pi} \cos(4\omega t + \theta_{v_2} + \theta_{i_2}) d\omega t \right] + \dots \quad (44)$$

$$+ \frac{V_{M_n} I_{M_n}}{4\pi} \left[\int_0^{2\pi} \cos(\theta_{v_n} - \theta_{i_n}) d\omega t - \int_0^{2\pi} \cos(2n\omega t + \theta_{v_n} + \theta_{i_n}) d\omega t \right]$$

Dado que la integral del coseno es nula, resolver la ecuación anterior nos conduce a:

$$P = V_0 I_0 + \frac{V_{M_1} I_{M_1}}{2} \cos(\theta_{v_1} - \theta_{i_1}) + \frac{V_{M_2} I_{M_2}}{2} \cos(\theta_{v_2} - \theta_{i_2}) + \dots + \frac{V_{M_n} I_{M_n}}{2} \cos(\theta_{v_n} - \theta_{i_n}) \quad (45)$$

si $\theta_{v_n} - \theta_{i_n} = \varphi_n$; $\frac{V_{M_n} I_{M_n}}{2} = \frac{V_{M_n}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_{M_n}}{\sqrt{2}} = V_n I_n$

y dado que estas componentes son senoidales, llegamos a:

$$P = V_0 I_0 + V_1 I_1 \cos \varphi_1 + V_2 I_2 \cos \varphi_2 + \dots + V_n I_n \cos \varphi_n$$

o, lo que es lo mismo:

$$P = V_0 I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} V_n I_n \cos \varphi_n = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \quad (46)$$

con $\varphi_0=0$ por ser un problema de continua.

La ecuación (46) da la forma de cálculo de la *potencia activa en régimen poliarmónico*, y dice que la potencia activa disipada en un circuito excitado por una señal poliarmónica es la suma de las potencias activas disipadas en el mencionado circuito por cada una de las componentes del desarrollo en serie de Fourier de la excitación. Su significado y unidad son los mismos que en régimen permanente senoidal.

En forma análoga se define la *potencia reactiva* como:

$$Q = \sum_{n=1}^{\infty} V_n I_n \text{sen } \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \quad (47)$$

Donde, naturalmente, la sumatoria debe partir del término 1, dado que no existe potencia reactiva para la componente de continua, y esta expresión da la forma de cálculo de dicha potencia en régimen poliarmónico, siendo su significado y unidad los mismos que en régimen permanente senoidal.

Hasta ahora hemos definido las potencias aparente activa y reactiva, que eran las únicas existentes en el capítulo 8. Cabe preguntarse si son en realidad las únicas existentes en régimen permanente poliarmónico. Para responder a esta pregunta, partiendo de las expresiones de los valores eficaces de tensión y corriente, los que se pueden escribir como:

$$V^2 = \sum_{n=0}^{\infty} V_n^2 \quad (48)$$

$$I^2 = \sum_{n=0}^{\infty} I_n^2$$

dado que $\cos^2 \varphi_n + \text{sen}^2 \varphi_n = 1$, el valor eficaz de la corriente puede escribirse como:

$$I^2 = \sum_{n=0}^{\infty} I_n^2 (\cos^2 \varphi_n + \text{sen}^2 \varphi_n) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n^2 \cos^2 \varphi_n + I_n^2 \text{sen}^2 \varphi_n \quad (49)$$

Donde φ_n es el desfase entre las armónicas de tensión y corriente de orden n, siendo $\varphi_0=0$ por tratarse de continua.

Multiplicando las ecs. (48a) y (49) se obtendrá el cuadrado de la potencia aparente, resultando:

$$S^2 = \left[\sum_{n=0}^{\infty} V_n^2 \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} I_n^2 \cos^2 \varphi_n + I_n^2 \text{sen}^2 \varphi_n \right] \quad (50)$$

Operando esta expresión, la misma puede expresarse como:

$$S^2 = \sum_{n=0}^{\infty} V_n^2 I_n^2 \cos^2 \varphi_n + V_n^2 I_n^2 \text{sen}^2 \varphi_n + \sum_{\substack{j=0 \\ k=0 \\ j \neq k}}^{\infty} V_j^2 I_k^2 \quad (51)$$

pero como sabemos el cuadrado de un multinomio, cumple con:

$$\sum_{n=0}^{\infty} X_n^2 = \left[\sum_{n=0}^{\infty} X_n \right]^2 - \sum_{\substack{j=0 \\ k=0 \\ j \neq k}}^{\infty} X_j X_k$$

y la ecuación (51) puede escribirse como:

$$S^2 = \left[\sum_{n=0}^{\infty} V_n I_n \cos \varphi_n \right]^2 + \left[\sum_{n=1}^{\infty} V_n I_n \text{sen} \varphi_n \right]^2 + \sum_{\substack{j=0 \\ k=0 \\ j \neq k}}^{\infty} V_j^2 I_k^2 -$$

$$- \sum_{\substack{j=0 \\ k=0 \\ j \neq k}}^{\infty} V_j I_j V_k I_k \cos \varphi_j \cos \varphi_k - \sum_{\substack{j=0 \\ k=0 \\ j \neq k}}^{\infty} V_j I_j V_k I_k \text{sen} \varphi_j \text{sen} \varphi_k$$

expresión que puede modificarse recordando que:

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

por lo que:

$$S^2 = P^2 + Q^2 + \left[\sum_{\substack{j=0 \\ k=0 \\ j \neq k}}^{\infty} V_j^2 I_k^2 - \sum_{\substack{j=0 \\ k=0 \\ j \neq k}}^{\infty} V_j I_j V_k I_k \cos(\varphi_j - \varphi_k) \right] \quad (52)$$

Notemos que, si $\varphi_n=0$, circuito resistivo;

$$\varphi_j = \varphi_k \therefore \cos(\varphi_j - \varphi_k) = 1$$

y $\frac{V_n}{I_n} = \text{cte}$, circuito lineal; $\frac{V_j}{I_j} = \frac{V_k}{I_k} \therefore V_j I_k = V_k I_j$

y en consecuencia $V_j I_j V_k I_k = V_j^2 I_k^2$

y el tercer y cuarto término del segundo miembro de la ecuación (52) se anulan mutuamente.

Analicemos ahora el significado de cada uno de los términos que aparecen en esta expresión:

- El primer término del segundo miembro corresponde al cuadrado de la potencia activa.
- El segundo término al cuadrado de la potencia reactiva.

Los términos restantes, que obviamente son dimensionalmente una potencia, corresponden al cuadrado de una nueva potencia que aparece en régimen poliarmónico, y que no aparecía en régimen permanente senoidal. Veremos cómo interpretamos esto. En régimen permanente senoidal, si la forma de onda de la excitación es senoidal, la respuesta también tiene forma senoidal, tal como se ve en la Fig. 17. Los espectros de amplitud y fase que corresponden a la excitación y respuesta se muestran en la misma figura, y resultan formalmente iguales.

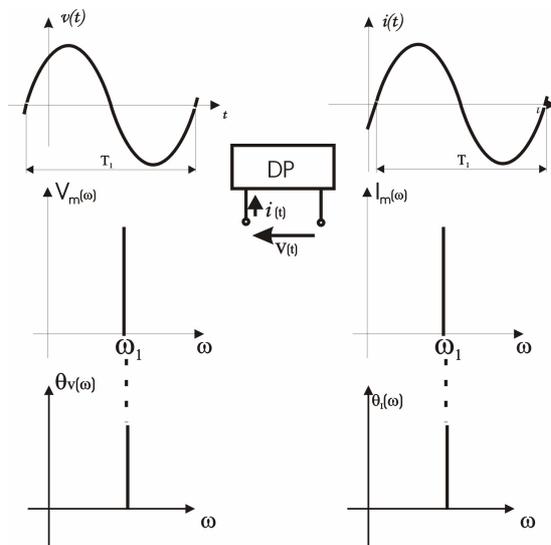


Fig. 17

En cambio, en régimen permanente poliarmónico la situación es la de la Fig. 18. En esta se observa que las formas de onda de señal de excitación y respuesta difieren, al igual que los espectros de amplitud y fase.

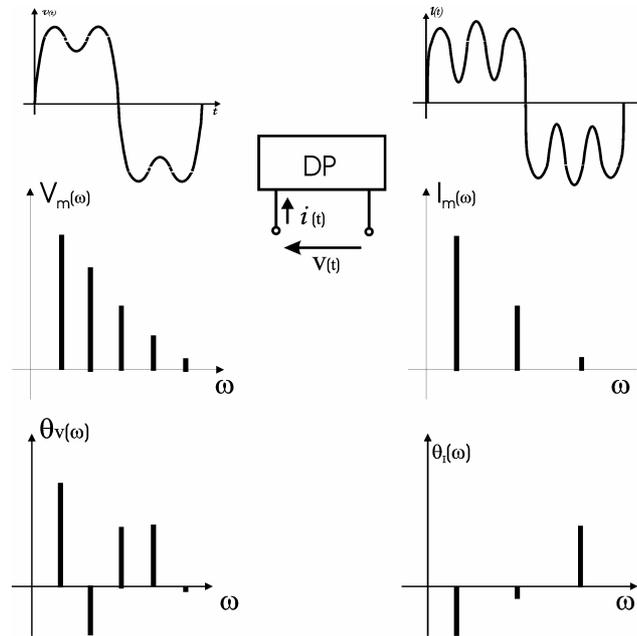


Fig. 18

Ensayando una serie de circuitos se encuentra que cada vez que los espectros de tensión y corriente coinciden, o, lo que es lo mismo, que la forma de señal de $v(t)$ e $i(t)$ son iguales, la potencia que corresponde a los términos no identificados de la ecuación 52 se anula. En cambio, cuanto más difieren dichos espectros, la mencionada potencia aumenta. Esto ocurre a medida que el circuito en ensayo se comporta más reactivamente.

Todo esto induce a asignar a esta potencia el nombre de *potencia de deformación o distorsión* (T), pudiendo por lo tanto interpretarse como la *potencia puesta en juego para alterar o deformar la forma de la señal de respuesta respecto de la excitación*.

En consecuencia, la ecuación (52) puede expresarse como:

$$S^2 = P^2 + Q^2 + T^2 \quad (53)$$

Debido a la sencillez del cálculo para las potencias aparente, activa y reactiva, la potencia de distorsión puede calcularse como:

$$T^2 = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2}$$

y su unidad es el Volt-Ampere de deformación, simbolizado Vad.

La aparición de esta nueva potencia, no existente en el régimen permanente senoidal, hace que el diagrama de potencia se altere respecto al conocido en dicho régimen, y de la ecuación (53) surge que el diagrama de potencias en régimen permanente poliarmónico es el ilustrado en la Figura 19

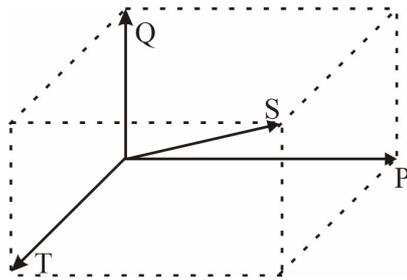


Fig. 19

En virtud de lo anteriormente expresado, es evidente que para que la potencia de distorsión sea nula, debe cumplirse que las formas de la señal de excitación y respuesta no difieran entre sí, o, dicho de otra manera, que los espectros de amplitud y fase correspondientes a cada señal sean formalmente iguales, exceptuando unidad y factor de escala. Desde el punto de vista circuital, esto implica que el circuito se comporta como resistivo puro, para todas las frecuencias del espectro de la excitación y que obviamente dicho circuito sea lineal e invariante en el tiempo.

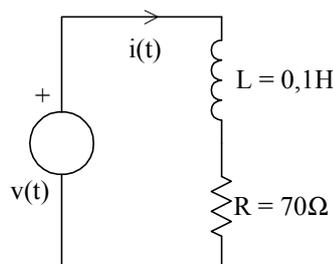
Finalmente, es posible mencionar que por analogía con el régimen senoidal, se define un factor de potencia en régimen poliarmónico, como el cociente entre la potencia activa disipada y la potencia aparente total, resultando:

$$\text{factor de potencia } f.p = \frac{P}{S}$$

Problemas propuestos:

1) El siguiente circuito se encuentra alimentado por una tensión poliarmónica cuya expresión es:

$$v(t) = 100 + 141 \cdot \text{sen}(1000t) + 70,7 \cdot \text{sen}(2000t) \text{ V.}$$



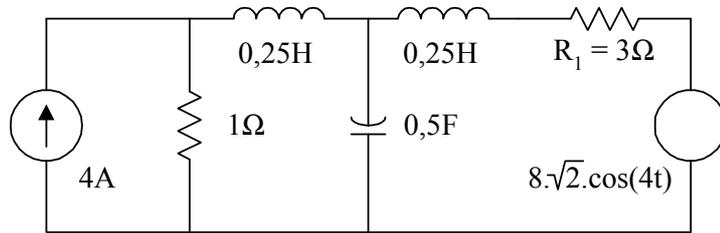
Se pide:

- La expresión de la corriente instantánea.
- Graficar los espectros de amplitud y fase de la tensión y la corriente.
- Los valores de las potencias aparente, activa, reactiva y de distorsión, justificando los resultados obtenidos basándose en el análisis de los espectros.

Rta.: a) $i(t) = 10/7 + 1,156 \text{ sen}(1000t - 55^\circ) + 0,332 \text{ sen}(2000t - 70,71^\circ)$

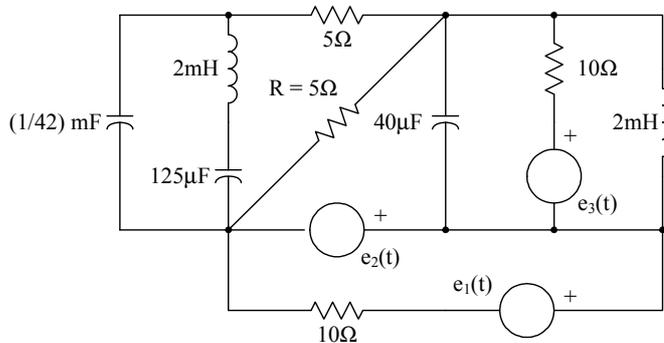
b) $P = 179,2 \text{ W}$ $Q = 77,84 \text{ VAR}$ $S = 249,05 \text{ VA}$ $T = 154,44 \text{ VA}$

2) Hallar la potencia media absorbida por la resistencia R_1 y las potencias activa, reactiva, aparente y de distorsión que intervienen en la fuente de continua.



Rta.: $P_{R1} = 21,45 W$
 $P_f = -12W$ $Q_f = 0 VAR$ $S_f = 12,79 VA$ $T = 4,43 VA$

3) En el circuito de la figura, calcular la potencia disipada en la resistencia $R = 5\Omega$. Analizar previamente las frecuencias de resonancia de las ramas y conjuntos de ramas reactivas puras.



$$e_1(t) = \sqrt{2} \cdot 100 \cdot \text{sen}(1000t - \frac{\pi}{4})V$$

$$e_2(t) = \sqrt{2} \cdot 150 \cdot \text{sen}(2000t + \frac{\pi}{6})V$$

$$e_3(t) = \sqrt{2} \cdot 100 \cdot \text{sen}(5000t - \frac{\pi}{3})V$$

Rta.: $P_T = 828,03W$

4) Para un filtro pasabanda RLC con una resistencia $R = 2,2K\Omega$.

a) Elegir los valores de L y C para que la quinta armónica de una onda triangular de entrada de 10KHz pase sin atenuación y para que la salida de la séptima armónica sea 25 veces menor en amplitud que la quinta.

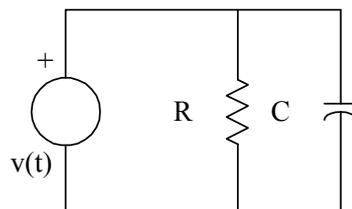
b) Hacer un gráfico aproximado de los espectros de amplitud de la entrada y la salida, y del módulo de la función transferencia, hasta la séptima armónica.

5) Dado el circuito mostrado en la figura, excitado por un generador de tensión poliarmónico de valor:

$$v(t) = 100 + 100 \cdot \sqrt{2} \cdot \text{sen}(1000t)V$$

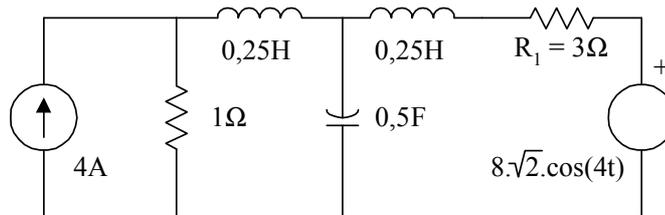
a) Determinar los valores de R y C para que la potencia activa sea $P = 100W$ y la reactiva $Q = 5 VAR$

b) Justificar si existe potencia de distorsión.



6) El siguiente circuito está en régimen permanente. Se desea determinar la potencia activa entregada a la resistencia de 9Ω .

- ¿Se aplica superposición a las tensiones y corrientes instantáneas?
- ¿Se aplica superposición a las tensiones y corrientes fasoriales?
- ¿Se aplica superposición a la potencia instantánea?
- ¿Se aplica superposición a la potencia activa?
- En base a las respuestas anteriores, calcular la potencia disipada en la resistencia.

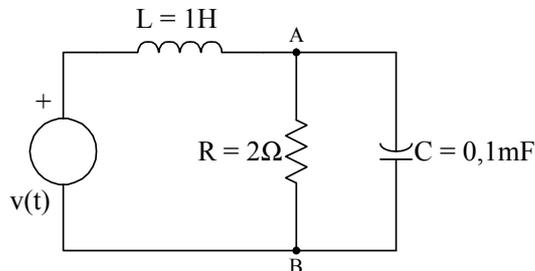


7) Para el circuito mostrado en la figura, alimentado por un generador de tensión poliarmónica expresada como:

$$v(t) = \frac{200}{\pi} + \frac{400}{3\pi} \cdot \text{sen}\left(100t + \frac{\pi}{2}\right) \text{V}$$

se pide:

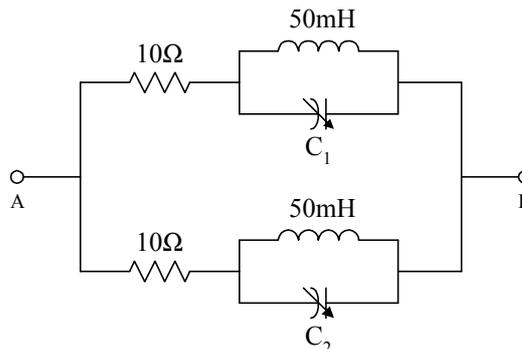
- Hallar la expresión de $v_{AB}(t)$.
- Calcular la relación entre las componentes alterna y continua para la excitación y la respuesta. Sacar conclusiones.



8) El circuito de la figura se alimenta con una f.e.m. cuya ecuación es:

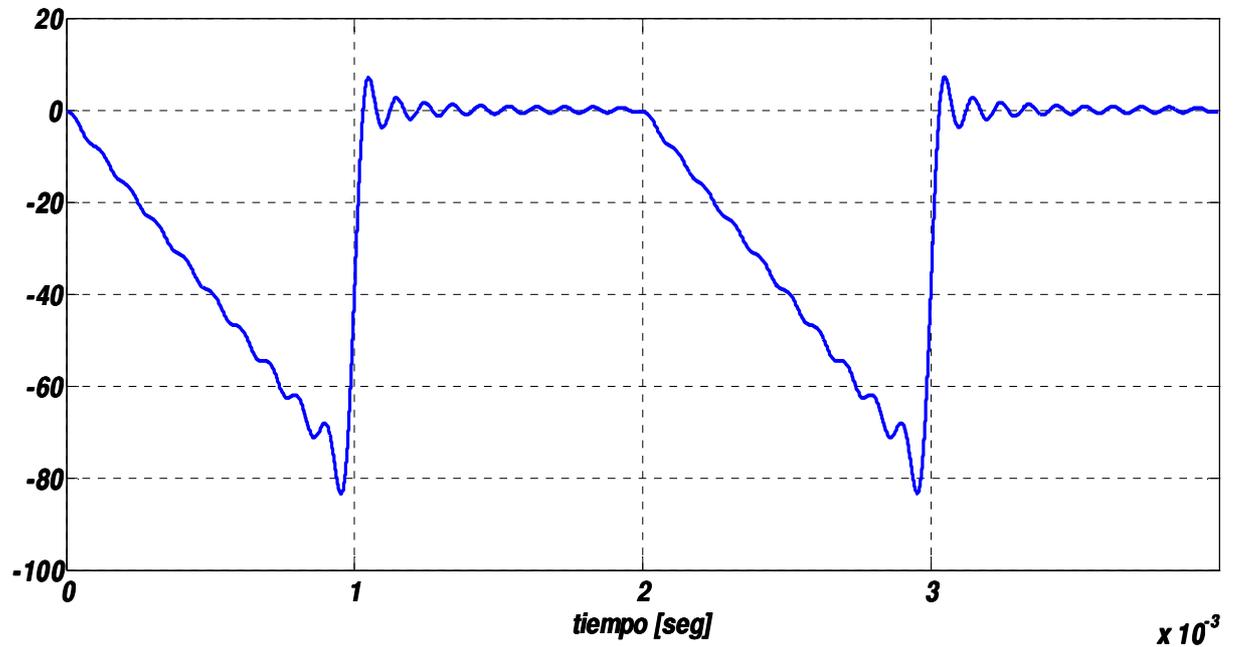
$$e_{AB}(t) = 200 \cdot \text{sen}(100\pi) + 50 \cdot \text{sen}(300\pi) \text{ V}$$

Sintonizar la rama 1 para eliminar en ella la tercera armónica de corriente, y la rama 2 para eliminar en ella la fundamental de corriente. Calcular los valores instantáneos y eficaces de las corrientes en cada rama y de la corriente total.



Aproximación de la forma de onda del Ejemplo de Aplicación – Problema 4

- Con 20 primeros armónicos



- Con 100 primeros armónicos

