

## 2. Resonancia de amplitud

### 2.1 Propiedades de las funciones de redes.

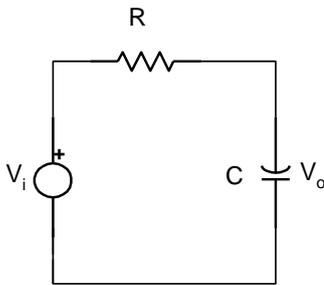
**Definición:** Toda relación entre dos tensiones y/o corrientes complejas, tal como lo son la ganancia en tensión, la impedancia de salida, etc, se denomina **función de red**.

**Propiedad 1:** Todas las funciones de redes pueden escribirse como la relación de dos polinomios en  $j\omega$  con coeficientes reales. Es decir, puede expresarse en la forma:

$$H(j\omega) = \frac{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_1(j\omega) + a_0}{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + b_1(j\omega) + b_0}$$

donde los  $a_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) y los  $b_i$  ( $i = 0, 1, \dots, m$ ) son números reales.

**Ej. 1:** Hallar la ganancia en tensión  $V_o/V_i$ :

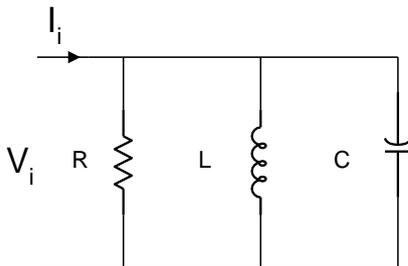


$$H(j\omega) = \frac{\dot{V}_o}{\dot{V}_i} = \frac{-j\frac{1}{\omega C}}{R - j\frac{1}{\omega C}} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{RC(j\omega) + 1}$$

Fig. 13

Vemos que el numerador de  $H(j\omega)$  es un polinomio de grado cero en  $j\omega$ , y el denominador es de grado 1 en  $j\omega$ . Los coeficientes son todos números reales.

**Ej. 2:** Hallar la admitancia de entrada:



$$H(j\omega) = \frac{j\omega L + (j\omega)^2 RLC + R}{jR\omega L} = \frac{RLC(j\omega)^2 + L(j\omega) + R}{RL(j\omega)}$$

Fig. 14

El numerador es un polinomio de grado 2 en  $j\omega$ , y el denominador es un polinomio de grado 1 en  $j\omega$ . Los coeficientes de ambos dependen de los parámetros del circuito y son números reales.

**Propiedad 2:** Para todas las funciones de redes, las raíces del numerador y del denominador o son reales o son complejos conjugados. Esto surge del hecho que los coeficientes son reales.

**Ej. 3:** En el ej. 1 el numerador no tiene raíces. La raíz del denominador es

$$RC(j\omega) + 1 = 0 \quad j\omega = -\frac{1}{RC} \quad \Re$$

**Ej. 4:** En el ej. 2, el denominador tiene raíz en  $j\omega = 0$  (real). Para el numerador será:

$$RLC(j\omega)^2 + L(j\omega) + R = 0$$

$$j\omega = \frac{-L \pm \sqrt{L^2 - 4R^2LC}}{2RLC}$$

Si  $L^2 \geq 4R^2LC$  raíces reales

Si  $L^2 < 4R^2LC$  raíces complejas conjugadas

**Propiedad 3:** Para cualquier función  $H(j\omega)$  puede demostrarse que:

$$|H(j\omega)| = \sqrt{H(j\omega)H^*(j\omega)}$$

es una función par de  $\omega$ , y que el ángulo de  $H(j\omega)$  es una función impar de  $\omega$ .

**Ej. 5:** En el ej. 1 vimos que:

$$H(j\omega) = \frac{1}{RC(j\omega) + 1}$$

veremos ahora si efectivamente se verifica la propiedad enunciada.

En efecto:

$$|H(j\omega)| = \sqrt{H(j\omega)H^*(j\omega)} = \sqrt{\frac{1}{1 + j\omega RC} \cdot \frac{1}{1 - j\omega RC}} = \sqrt{\frac{1}{1 + (\omega RC)^2}}$$

y obviamente  $|H(j\omega)| = |H(-j\omega)|$  lo que implica que  $H(j\omega)$  es una función par.

$$\arg H(j\omega) = \frac{1}{\arg(RC(j\omega) + 1)} = -\arctan \omega RC$$

que es una función impar.

## 2.2 Diagramas de polos y ceros.

La herramienta más conveniente para analizar funciones transferencia es el diagrama de polos y ceros, el cual puede construirse simplemente marcando los polos y ceros de la función transferencia en un plano complejo, indicando los ceros con **o** y los polos con **x**.

**Ej. 6:** Para el circuito del ejemplo 1 será:

$$s_1 = -1/RC$$

$$H(s) = \frac{1}{RC(s - s_1)}$$

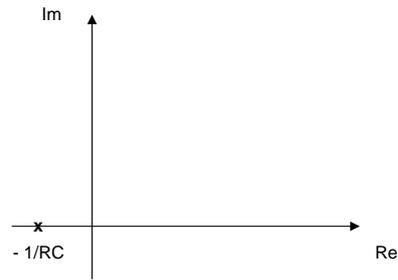


Fig. 15

**Ej. 7:** Para el circuito del ej. 2 será, con  $R = 500 \Omega$ ,  $L = 10^{-4} \text{ H}$ ,  $C = 10^{-8} \text{ F}$ :

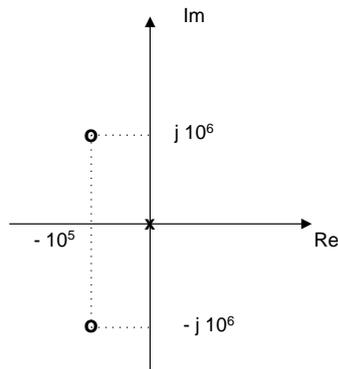


Fig. 16

$$\text{ceros } s_{1,2} = -10^5 \pm j10^6$$

$$\text{polo: } S = 0$$

donde:

$$H(s) = \frac{[s - (-10^5 + j10^6)][s - (-10^5 - j10^6)]}{[s - 0]} 10^{-8}$$

### 2.3 Gráficos de magnitud y fase en función de la frecuencia.

Una forma de visualizar las características en frecuencia de una red es examinar el gráfico de respuesta en frecuencia. Este gráfico muestra como cambian la amplitud y la fase de la respuesta en frecuencia de un circuito a medida que varía la frecuencia de la fuente de alimentación. La representación de la respuesta en frecuencia se hace en dos partes: una, la representación de  $|H(j\omega)|$  en función de  $\omega$ , que se denomina *gráfico de amplitud*, y otra, la representación del argumento  $H(j\omega)$  vs.  $\omega$ , que se denomina *gráfico de fase*.

En la figura siguiente se muestran los gráficos ideales de amplitud y fase para los cuatro tipos de filtros principales: pasabajo, pasaalto, pasabanda, y rechaza - banda.

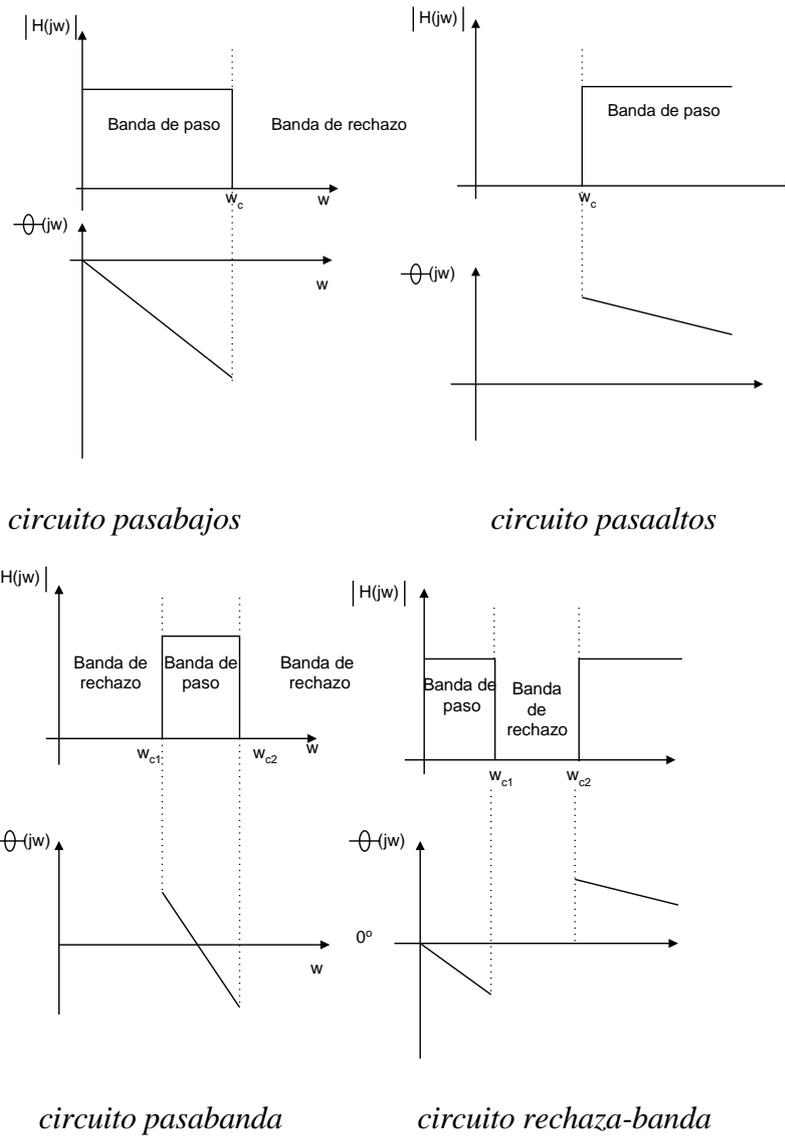


Fig. 17

## 2.4 Circuitos pasabajo

### 2.4.1 Circuito RC como pasabajos

El circuito RC serie de la figura 18 se comporta como un filtro pasabajos, hecho que podemos verificar fácilmente haciendo un análisis cualitativo de su comportamiento. Este análisis permite predecir las características del filtro, y la forma general de la función transferencia. Si la función transferencia calculada es similar a la forma que se ha predicho, es una verificación de que el análisis es correcto.

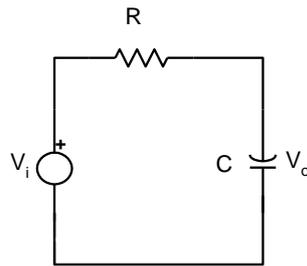


Fig. 18

Hemos tomado la salida sobre el capacitor, y a fin de realizar el análisis cualitativo, vemos el comportamiento en tres regiones de frecuencias distintas:

1. Frecuencia cero ( $\omega = 0$ ). La reactancia del capacitor es infinita, por lo que actúa como un circuito abierto. Las tensiones de entrada y salida son iguales, y la función transferencia es 1.
2. Frecuencias crecientes desde cero: La reactancia del capacitor disminuye con relación a la resistencia, y la tensión de la fuente se divide entre la resistencia y la reactancia capacitiva. La tensión de salida es menor que la tensión de la fuente.
3. Frecuencia infinita ( $\omega = \infty$ ): la reactancia del capacitor es cero, y el capacitor actúa como un cortocircuito. La tensión de salida es cero, y por lo tanto la función transferencia también.



Fig. 19

La función transferencia del circuito es:

$$H(j\omega) = \frac{\dot{V}_o}{\dot{V}_i} = \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{RC(j\omega) + 1}$$

expresión a partir de la cual determinamos el módulo y el argumento:

$$|H(j\omega)| = \sqrt{\frac{1}{1 + R^2 C^2 \omega^2}} \quad \arg H(j\omega) = -\arctan \omega RC$$

Del análisis del módulo vemos que:

- el valor máximo del mismo se produce a  $\omega = 0$  y es igual a 1
- tiende a cero cuando  $\omega$  tiende a infinito,

y de la fase observamos que:

- a frecuencia cero es 0
- cuando la frecuencia tiende a infinito es  $-\pi/2$ .

Vamos a definir ahora un parámetro que es sumamente útil para el análisis de filtros reales cuando la representación de la característica de frecuencia no nos permite identificar una frecuencia única que separa la banda de paso de la banda de rechazo. Este parámetro es la denominada *frecuencia de corte*, y es por definición la frecuencia a la cual el módulo de la función transferencia disminuye en el factor  $1/\sqrt{2}$  de su valor máximo:

$$|H(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}} H_{\max}$$

donde  $H_{\max}$  es la máxima amplitud de la función transferencia. A partir de esta expresión vemos que la banda de paso de un filtro se define como la gama de frecuencias dentro de la cual la amplitud de la tensión de salida es al menos el 70,7% de la máxima posible. El factor  $1/\sqrt{2}$  no es arbitrario, sino que, como se verá mas adelante, se corresponde con el hecho de que a esa frecuencia la potencia disponible a la salida es la mitad de la máxima potencia disponible.

Si analizamos el comportamiento del circuito en el dominio temporal, vemos que las ondas de entrada y salida son senoides de igual frecuencia angular y distinta amplitud y fase. Es por ello que una gráfica de  $|H(j\omega)|$  vs  $\omega$  y una de  $\arg\{H(j\omega)\}$  vs  $\omega$  nos permiten visualizar el efecto de la red RC sobre la onda de entrada al variar la frecuencia.

En la figura 20 se muestran las características de amplitud y fase del circuito RC pasabajos.

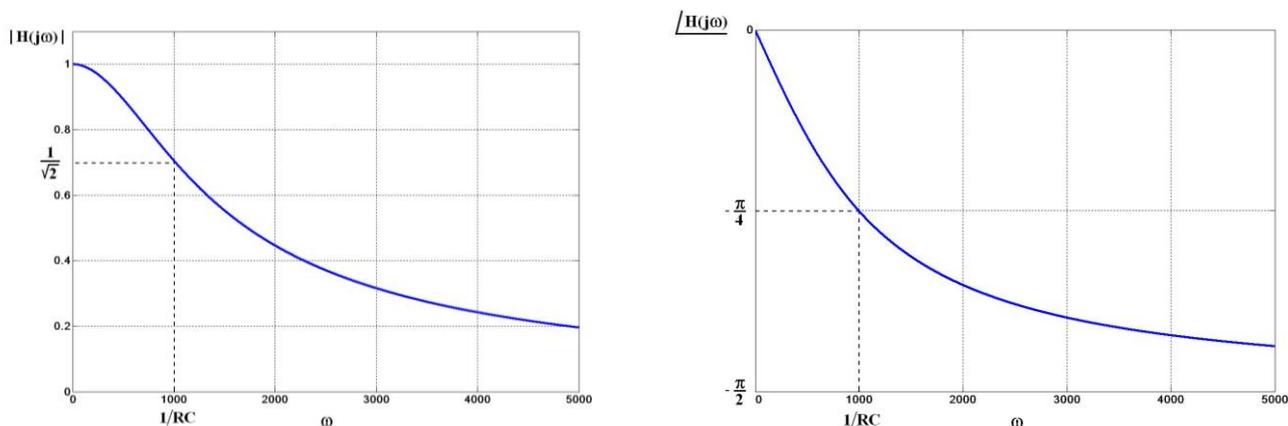


Fig. 20

#### 2.4.2 Circuito RL como pasabajos

Analizamos el comportamiento del circuito RL mostrado en la figura siguiente:

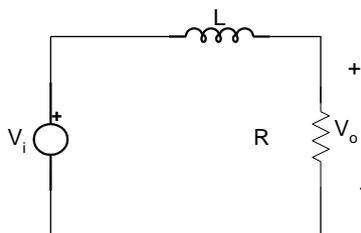
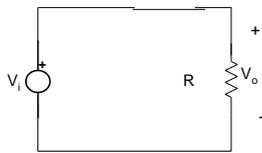


Fig. 21

Un análisis cualitativo del mismo nos permite ver que:



$$\omega = 0 \Rightarrow |H(j\omega)| = 1$$



$$\omega = \infty \Rightarrow |H(j\omega)| = 0$$

Fig. 22

por lo que deducimos que el circuito se comporta como un pasabajos. Analíticamente, la función transferencia es:

$$H(j\omega) = \frac{R}{R + j\omega L}$$

cuyo módulo y argumento son:

$$|H(j\omega)| = \frac{\frac{R}{L}}{\sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \omega^2}} \quad \arg H(j\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

Tal como había anticipado el análisis cualitativo, vemos que cuando  $\omega=0$ , el numerador y el denominador son iguales y  $|H(j\omega)|=1$  (la tensión pasa de entrada a salida sin atenuación). A medida que la frecuencia aumenta, el denominador aumenta, con lo que  $|H(j\omega)| \rightarrow 0$ . En consecuencia, el circuito se comporta como un pasabajos, con un máximo de función transferencia igual a 1. Igualmente, un análisis del argumento nos permite ver que el ángulo de fase varía desde los  $0^\circ$  en corriente continua a  $-90^\circ$  en  $\omega = \infty$ .

Teniendo en cuenta la definición, podemos calcular la frecuencia de corte  $\omega_c$ :

$$|H(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}} |1| = \frac{\frac{R}{L}}{\sqrt{\omega_c^2 + \left(\frac{R}{L}\right)^2}} \Rightarrow \omega_c = \frac{R}{L}$$

A continuación se muestran las gráficas de módulo y fase en función de la frecuencia:

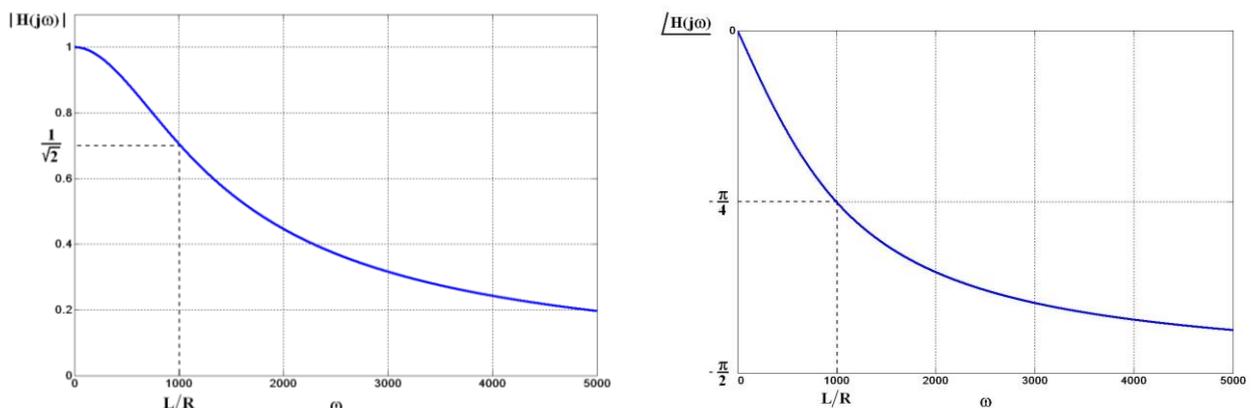


Fig. 23

## 2.5 Circuitos pasa alto

### 2.5.1 Circuito RC como pasa-alto

En la figura 24 se muestra un circuito RC serie. A diferencia del pasabajos anteriormente visto, la salida se toma sobre la resistencia, debido a lo cual el efecto de variación de la reactancia capacitiva con la frecuencia es diferente del caso anterior. A  $\omega = 0$ , el capacitor se comporta como un circuito abierto, por lo que no circula corriente por la resistencia, tal como se observa en el modelo para análisis cualitativo. El circuito elimina en consecuencia las tensiones de bajas frecuencias, las cuales no se observan a la salida.

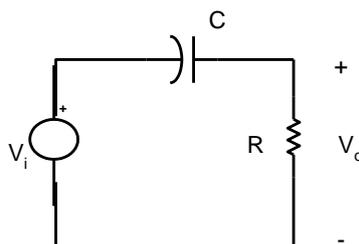


Fig. 24

A medida que la frecuencia de la tensión de la fuente aumenta, la reactancia capacitiva disminuye con respecto al valor de la resistencia, y la tensión de la fuente se divide entre el capacitor y la resistencia, comenzando a aumentar la amplitud de la tensión de salida.

Un análisis cualitativo del circuito nos conduce a :

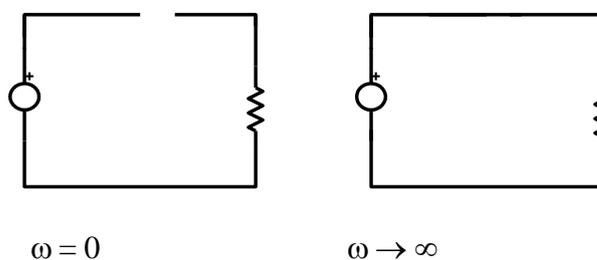


Fig. 25

- Cuando  $\omega = \infty$ , el capacitor se comporta como un cortocircuito, por lo que las tensiones de entrada y salida son iguales. El desfase entre la tensión de la fuente y la de salida también se modifica al variar la frecuencia. Para  $\omega = \infty$  la tensión de entrada y la de salida son iguales, por lo que el desfase entre ambas es cero. Al disminuir la frecuencia y aumentar la reactancia capacitiva, la tensión de salida adelanta a la tensión de entrada, y cuando  $\omega = 0$  esta diferencia alcanza un máximo de  $+90^\circ$ . Este análisis cualitativo nos confirma que cuando en el circuito RC serie la salida se toma sobre la resistencia, el circuito se comporta como un filtro pasaaltos, si bien las conexiones y componentes son idénticos al del circuito pasabajos. Es decir, el comportamiento como filtro depende no solamente de los valores y conexiones de los elementos, sino de donde se toma la salida.

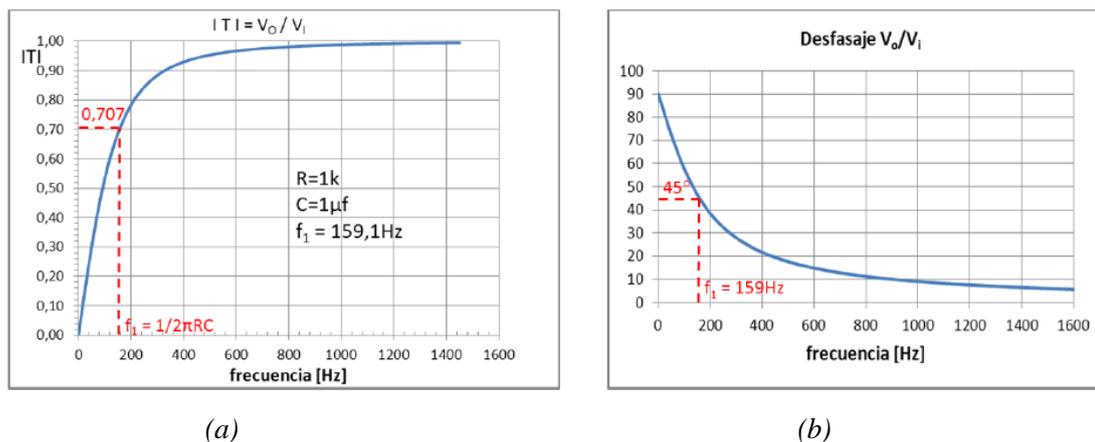


Fig. 26

La figura 26 (a) muestra la característica de respuesta en frecuencia para el circuito RC pasabajos, y la línea de puntos indica la característica de un filtro ideal.

La función transferencia del circuito, obtenida aplicando divisor de tensión, es:

$$H(j\omega) = \frac{j\omega}{j\omega + \frac{1}{RC}}$$

A partir de esta expresión, obtenemos su módulo y su argumento:

$$|H(j\omega)| = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \left(\frac{1}{RC}\right)^2}} \quad \arg H(j\omega) = 90^\circ - \arctan \omega RC$$

una observación simple de estas expresiones confirma la forma obtenida cualitativamente. A partir de la definición utilizada anteriormente, podemos calcular la frecuencia de corte del circuito RC pasabajos:

$$|H(j\omega_c)| = \frac{\omega_c}{\sqrt{\omega_c^2 + \left(\frac{1}{RC}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \omega_c = \frac{1}{RC}$$

Vemos que la frecuencia de corte del circuito RC es la misma, sea que este se comporte como pasabajos o como pasabajos, lo cual no nos sorprende, a partir del conocimiento de la relación existente entre la frecuencia de corte  $\omega_c$  y la constante de tiempo  $\tau$  de un circuito ( $\tau = RC$  y  $\omega_c = 1/RC$ ).

### 2.5.2 Circuito RL como pasa-alto

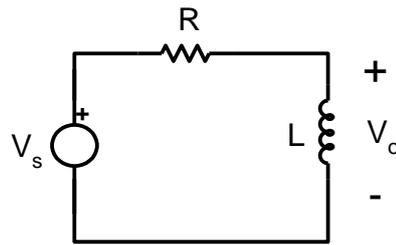


Fig. 27

Un análisis cualitativo del mismo nos permite anticipar que:

- para  $\omega = 0$   $|H(j\omega)| = 0$
- para  $\omega = \infty$   $|H(j\omega)| = 1$

por lo que deducimos que este circuito se comporta como un pasaaltos, con un máximo de función transferencia  $|H(j\omega)| = 1$ .

La función transferencia de tensión es:

$$H(j\omega) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L}$$

cuya amplitud es:

$$|H(j\omega)| = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} = \frac{\frac{\omega L}{R}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2}}$$

y su argumento:

$$\arg H(j\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\omega L}{R}$$

Para calcular la frecuencia de corte, procedemos tal como lo hicimos en los circuitos pasabajos:

$$|H(j\omega_c)| = \frac{\frac{\omega_c L}{R}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_c L}{R}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

resultando

$$\omega_c = \frac{R}{L}$$

la cual es igual a la calculada para el circuito pasabajos RL.

Sobre el eje de frecuencias,  $\omega_c = R/L$  provee un punto de separación del mencionado eje en dos partes. Para  $\omega \ll R/L$ ,  $H(j\omega) \ll 1$ , lo cual nos dice que la amplitud de la senoide de salida es pequeña comparada con la de la senoide de entrada. Para  $\omega \gg R/L$ ,  $H(j\omega) \approx 1$  lo cual nos dice que las amplitudes de entrada y salida son prácticamente iguales si la frecuencia de la entrada es grande comparada con  $R/L$ .

Esto es fácil de explicar observando el circuito, dado que cuando  $\omega$  tiende a cero, la reactancia inductiva tiende a cero. Para  $\omega = 0$ , la reactancia es nula y la inductancia es equivalente a un cortocircuito, lo cual conduce a tener tensión cero a la salida. Si  $\omega$  tiende a infinito, la reactancia inductiva aumenta, y, en el límite, la inductancia tiende a comportarse como un circuito abierto, lo cual nos da ganancia de tensión unitaria, pues al no circular corriente no hay caída de tensión en R.

En la figura 16 se muestran las características de amplitud y fase del circuito pasaltos RL

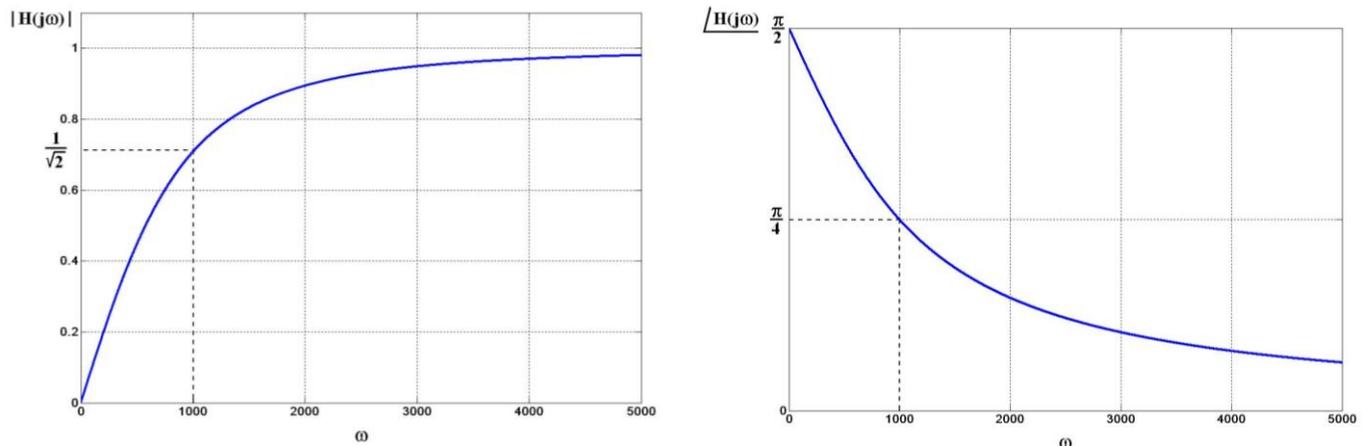


Fig. 16

*Comentario:* Si ahora comparamos las funciones transferencia de los circuitos pasaltos RL y RC, vemos que ambas tienen la misma forma:

$$H(j\omega) = \frac{j\omega}{j\omega + \omega_c}$$

por lo que podemos decir que cualquier circuito cuya función transferencia posea esta forma, se comportará como un filtro pasalto con una frecuencia de corte  $\omega_c$ . Podemos asimismo mencionar otra característica importante. Un circuito serie RC posee una frecuencia de corte que es independiente de que el circuito se comporte como pasalto o como pasabajo, y lo mismo ocurre con un circuito serie RL. Si además observamos que la frecuencia de corte de un circuito de primer orden es igual a la inversa de la constante de tiempo de ese circuito, podemos asegurar que la frecuencia de corte es un parámetro característico del circuito cuyo valor depende solo de los componentes del circuito, sus valores y la forma en que se hallan interconectados.

## 2.6 Circuitos pasabanda

Analizaremos ahora un tipo de filtro cuya característica es dejar pasar tensiones a la salida dentro de un cierto rango o *banda* de frecuencias, eliminando (o atenuando) aquellas cuyas frecuencias se encuentran fuera de esta banda. Se diferencian de los anteriormente vistos, tal como se observa en la figura 5, porque poseen dos *frecuencias de corte*,  $\omega_{c1}$  y  $\omega_{c2}$ , las cuales identifican los extremos de la *banda de paso*. Para filtros reales, se definen como las frecuencias para las cuales el módulo de la función transferencia iguala a  $H_{\max} / \sqrt{2}$ .

### 2.6.1 Frecuencia central, ancho de banda y factor de mérito.

Se define como *frecuencia central* o *frecuencia de resonancia* de un filtro pasabanda a aquella frecuencia para la cual la *función transferencia* es *máxima*. En el caso de que la salida del circuito se mida sobre la resistencia, veremos que la función transferencia calculada a frecuencia de resonancia de amplitud es real. El nombre “frecuencia de resonancia” lo utilizamos cuando estudiamos la respuesta natural de un circuito de segundo orden (frecuencia natural de oscilación, o frecuencia de resonancia).

El segundo parámetro de interés es el *ancho de banda*, o ancho de la banda de paso del filtro, comprendido entre los puntos de potencia mitad. El último parámetro es el *factor de mérito*, el cual se define como la relación entre la frecuencia central y el ancho de banda.

### 2.6.2 El circuito RLC serie con salida sobre el capacitor

Ahora analizaremos el circuito de la figura 17:

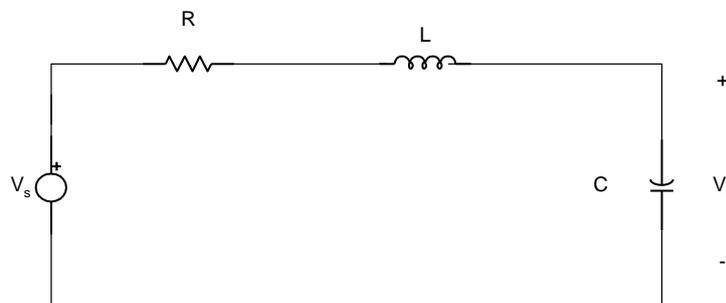


Fig. 17

Donde, aplicando divisor de tensión, podemos escribir la función transferencia:

$$H(j\omega) = \frac{\dot{V}_o}{\dot{V}_s} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} =$$

$$= \frac{1}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC} \Rightarrow |H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2}}$$

correspondiendo un argumento:

$$\arg H(j\omega) = -\arctan \frac{\omega RC}{1 - \omega^2 LC}$$

Un análisis cualitativo del circuito nos permite ver que:

- a  $\omega = 0$ , el capacitor se comporta como un circuito abierto, y la inductancia como un cortocircuito, por lo que la función transferencia vale 1, dado que no circula corriente por la resistencia.

- a  $\omega = \infty$ , el capacitor actúa como un cortocircuito y la bobina como un circuito abierto, por lo que nuevamente no circula corriente por la resistencia y la función transferencia vale 0.

La fig. 18 muestra las características de amplitud y fase para  $R = 0,1 \Omega$ ,  $L = 1 \mu H$  y  $C = 1 \mu F$ .

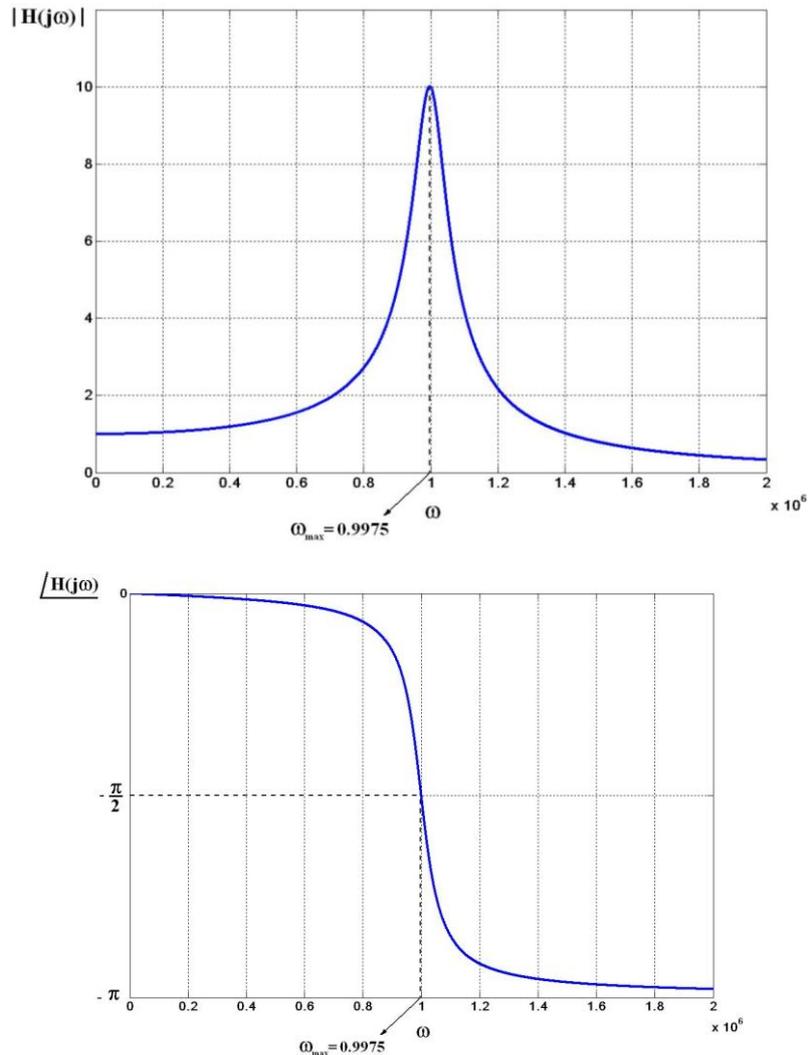


Fig. 18

La característica más pronunciada es el pico que ocurre en la curva de amplitud, y al cual llamamos *pico de resonancia*. El valor de  $\omega$  al cual se produce dicho pico lo llamamos *frecuencia de resonancia de máxima respuesta (o amplitud)*  $\omega_{mr}$ . La expresión de dicha frecuencia la obtenemos derivando  $|H(j\omega)|$  respecto a  $\omega$  e igualando a cero:

$$\omega_{mr} = \sqrt{\frac{1}{LC} - 2\left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

que, para los valores numéricos del ejemplo considerado nos da:

$$\omega_{mr} = 997,5 \times 10^3 \text{ r/s} = 0,9975 \text{ Mr/s}$$

siendo:

$$|H| = 10,01 \quad \text{y} \quad \arg[H] = -87,1^\circ$$

Vemos así que un uso práctico de este circuito es la posibilidad de **amplificar** las tensiones senoidales cuyas frecuencias son próximas a la de resonancia (en este caso  $997,5 \times 10^3 \text{ r/s}$ ), en relación a otras frecuencias.

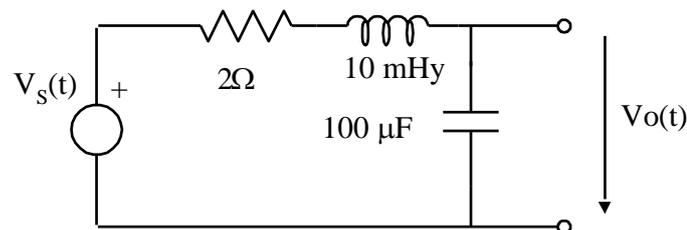
### Ejercicios de aplicación

1) Mostrar que  $H(j\omega) = \frac{2 \cdot j\omega}{(j\omega)^2 + 0,4 \cdot j\omega + 4}$  es la función transferencia de un filtro pasa banda y

obtener  $\omega_0$ ,  $\omega_{C1}$ ,  $\omega_{C2}$  y AB. Hallar la frecuencia para la cual  $H(j\omega)$  es una función real. Graficar  $H(S)$ .

Respuesta:  $\omega_0 = 2 \text{ r/s}$   $\omega_{C1} = 1,81 \text{ r/s}$   $\omega_{C2} = 2,21 \text{ r/s}$   $AB = 0,4 \text{ r/s}$

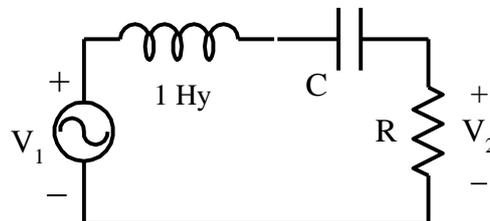
2) Para el circuito de la figura mostrado, determinar los valores del coeficiente de amortiguamiento y de la frecuencia natural amortiguada.



Respuesta:  $\alpha = 100 \text{ n/s}$   $\omega_d = 994,98 \text{ r/s}$

3) Siendo  $H(j\omega) = \frac{V_2(j\omega)}{V_1(j\omega)}$ , hallar R y C de modo que el pico de amplitud se produzca para

$\omega = 10 \text{ r/s}$  y que  $|H(j\omega)| = 0,707$ .



Respuesta:  $R = 10,66 \Omega$   $C = 0,01 \text{ F}$

## 2.7 Justificación del fenómeno de resonancia de amplitud

a) Matemática

El denominador de la función transferencia es:

$$D(j\omega) = j\omega CR + (j\omega)^2 LC + 1 = LC \left[ (j\omega)^2 + \frac{R}{L} j\omega + \frac{1}{LC} \right]$$

con raíces:

$$s_1 = -\alpha + j\omega_d$$

$$s_2 = -\alpha - j\omega_d$$

siendo:

$$\alpha = r/2L = 4 \times 10^4 \text{ coeficiente de amortiguamiento}$$

$$\omega_d = 1/LC - (r/2L)^2 = 0,9987 \text{ Mr/s frecuencia natural amortiguada}$$

Conocidos  $s_{1,2}$  podemos reescribir  $D(j\omega)$ :

$$D(j\omega) = LC (j\omega - s_1) (j\omega - s_2)$$

de donde

$$D(j\omega) = LC (j\omega - s_1) (j\omega - s_2)$$

y la función transferencia será:

$$H(j\omega) = \frac{I}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC} = \frac{I}{LC (j\omega - s_1) (j\omega - s_2)}$$

Ahora podemos dibujar  $(j\omega - s_1)$  y  $(j\omega - s_2)$  como vectores en el plano complejo, tal como se muestra en la figura 19:

$$j\omega - s_1 = j\omega + \alpha - j\omega_d = \alpha + j(\omega - \omega_d)$$

$$j\omega - s_2 = j\omega + \alpha + j\omega_d = \alpha + j(\omega + \omega_d)$$

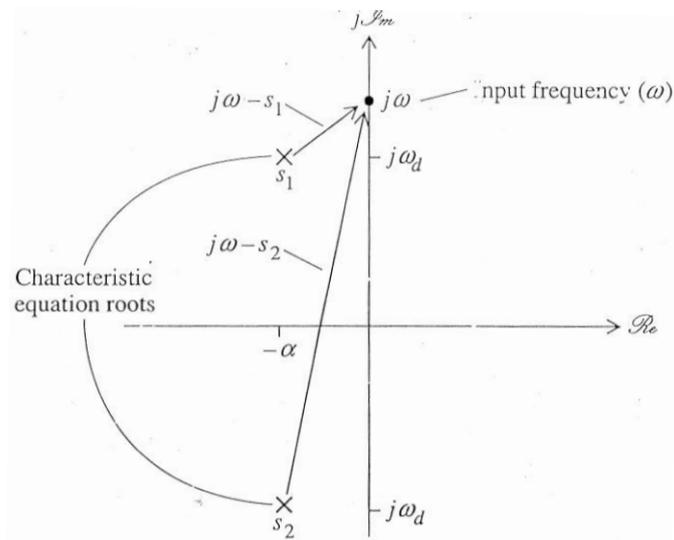


Fig. 19

La característica de amplitud está determinada por la inversa del producto de las longitudes de estos dos vectores:

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{LC} \frac{1}{|j\omega - s_1||j\omega - s_2|}$$

La figura 19 da una interpretación geométrica de la influencia combinada de  $\omega$  y  $s_{1,2}$ . La razón matemática para el pico de módulo de la función transferencia y el cambio de fase de la misma está relacionada con el comportamiento del vector  $j\omega - s_1$ . En efecto, la magnitud  $|j\omega - s_1|$  es mínima cuando  $\omega = \omega_d$  y por lo tanto el máximo de la función transferencia ocurre aproximadamente a esa frecuencia. Entonces:

*La proximidad de la frecuencia de alimentación (representada por el punto  $j\omega$  en la figura X) a la raíz  $s_1$  de la ecuación característica (indicada por el punto  $s_1$ ) es lo que provoca el pico de resonancia en la característica de amplitud.*

b) Física:

Recordemos que la respuesta natural de un circuito estaba determinada por las raíces de la ecuación característica del mismo. Siendo las raíces complejas, la respuesta natural será:

$$v_{oh}(t) = e^{-\alpha t} (A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t)$$

donde A y B dependen de las condiciones iniciales, y cuya forma es una oscilación senoidal amortiguada de frecuencia angular  $\omega_d$ . Hemos visto que el pico máximo en la función transferencia ocurre cuando el circuito se alimenta con una fuente senoidal de frecuencia  $\omega \approx \omega_d$ , por lo que concluimos que el pico de resonancia de la figura 8 se debe a un refuerzo periódico que ocurre cuando el circuito se alimenta a una frecuencia aproximadamente igual a la frecuencia natural amortiguada.

Ejemplos de la vida diaria son una hamaca, que se impulsa en los intervalos que mejor refuerzan las oscilaciones naturales, la emisión de una nota que hace vibrar una copa de cristal, o la amplificación de las vibraciones producidas por un temblor de tierra en una estructura mal diseñada.

## 2.8 El circuito RLC serie con salida sobre la resistencia

Analizaremos ahora el caso de tomar la salida en bornes de la **resistencia**, tal como se muestra en la figura siguiente.

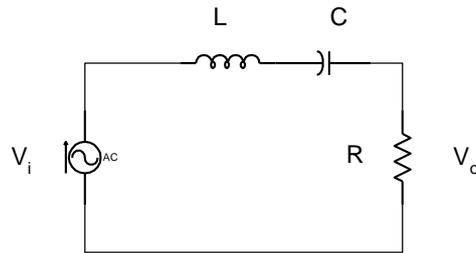


Fig. 20

La función transferencia correspondiente es:

$$H_R(j\omega) = \frac{V_R}{V_S} = \frac{R}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega R/L}{j\omega^2 + \frac{R}{L}j\omega + \frac{1}{LC}} = \frac{j\omega R/L}{(j\omega - s_1)(j\omega - s_2)}$$

la cual, en función de  $j\omega$  nos queda:

$$H(j\omega) = \frac{j\omega R/L}{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right) + j\omega \frac{R}{L}}$$

correspondiendo un argumento

$$\arg H(j\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\omega R/L}{\frac{1}{LC} - \omega^2}$$

Un análisis cualitativo del circuito nos permite ver que:

- a  $\omega = 0$ , el capacitor se comporta como un circuito abierto, y la inductancia como un cortocircuito, por lo que la función transferencia vale 0, dado que no circula corriente por la resistencia.
- a  $\omega = \infty$ , el capacitor como un cortocircuito y la bobina se comporta como un circuito abierto, por lo que nuevamente no circula corriente por la resistencia y la función transferencia vale 0.

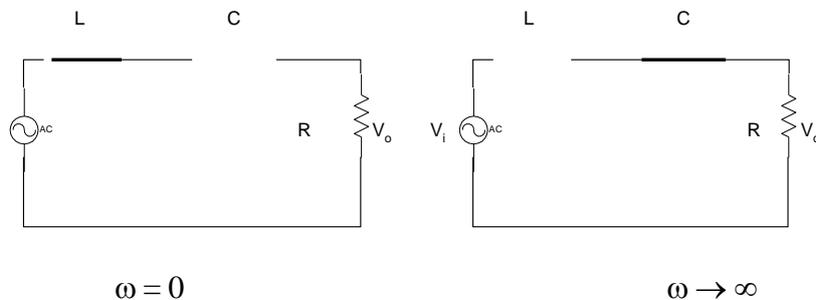


Fig. 21

Cabe preguntarse qué ocurrirá en el circuito para valores de frecuencia intermedias entre 0 e infinito. Para analizar ese comportamiento, volvemos a la expresión de los polos de la función

transferencia:

$$s_1 = -\alpha - j\omega_d$$

$$s_2 = -\alpha + j\omega_d$$

donde:

$$\alpha = \frac{R}{2L} \quad \omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \omega_d = \sqrt{\omega_o^2 - \alpha^2}$$

El diagrama de polos y ceros se ve en la figura siguiente:

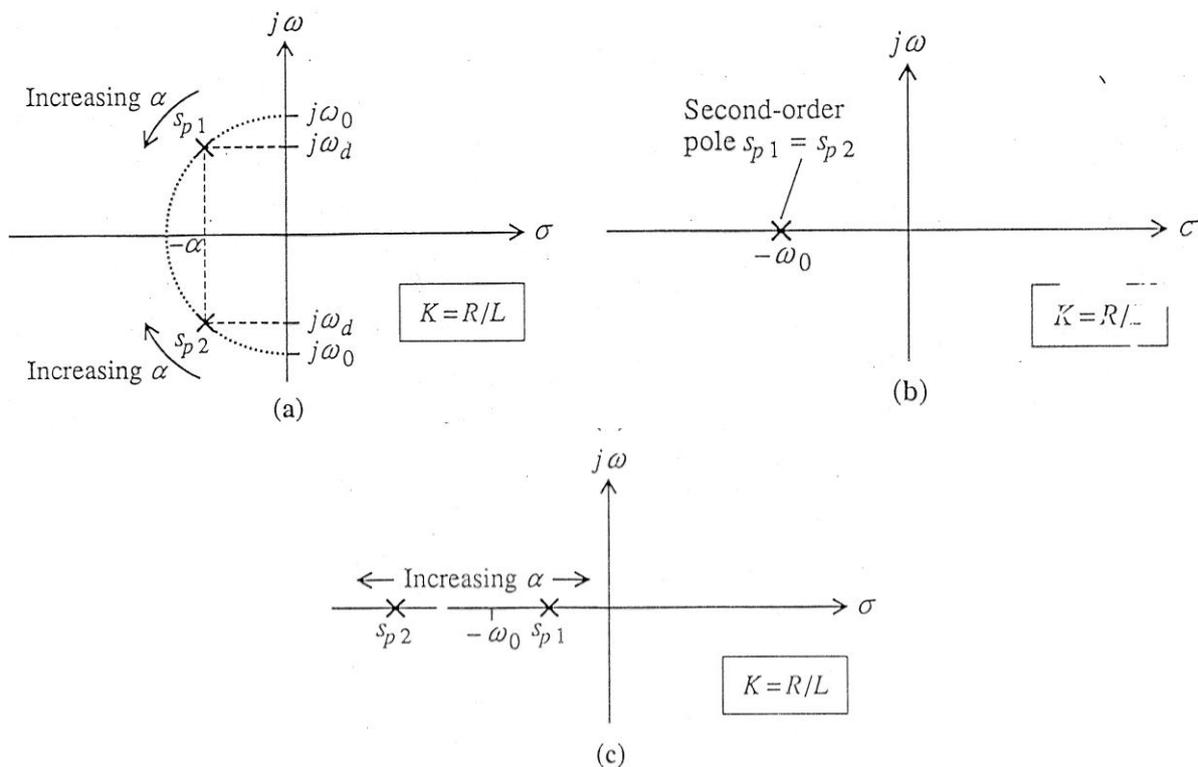


Fig. 22

Cuando  $\alpha$  varía de 0 a  $\omega_o$  con  $\omega_o$  constante, los polos se acercan uno al otro en la trayectoria circular definida por la expresión (\*) que se muestra en la figura 22 (a). Cuando  $\alpha = 0$ , los polos yacen en el eje  $j\omega$  en  $\pm j\omega_o$  y en el eje  $\sigma$  cuando  $\alpha = -\omega_o$ . Cuando los polos están en la trayectoria circular, la relación de amortiguación

$$\xi = \alpha/\omega_o$$

cae en el rango  $0 \leq \xi < 1$ , lo que significa que el circuito está subamortiguado. Cuando los polos se encuentran en el eje real  $\sigma$ , la relación de amortiguación es 1, y el amortiguamiento es crítico. Si  $\alpha$  aumenta más allá de  $\omega_o$ , las frecuencias naturales se separan,  $s_1 \rightarrow 0$  y  $s_2 \rightarrow -\infty$ . Si  $\xi > 1$ , el circuito es sobreamortiguado para  $\alpha > \omega_o$ .

El circuito serie RLC subamortiguado tiene aplicación como filtro pasabanda. Esta conclusión la obtenemos a partir de la figura 23. En ella se muestran las características de amplitud, y fase

para  $0 \leq \xi < 1$ . Podemos observar que el pico en la característica de amplitud, que se obtiene haciendo:

$$\frac{d|H(j\omega)|}{d\omega} = 0$$

se produce en  $\omega = \omega_0$ . Es interesante comparar las características en el dominio frecuencial (figura 23) con la respuesta natural del circuito (figura 24).

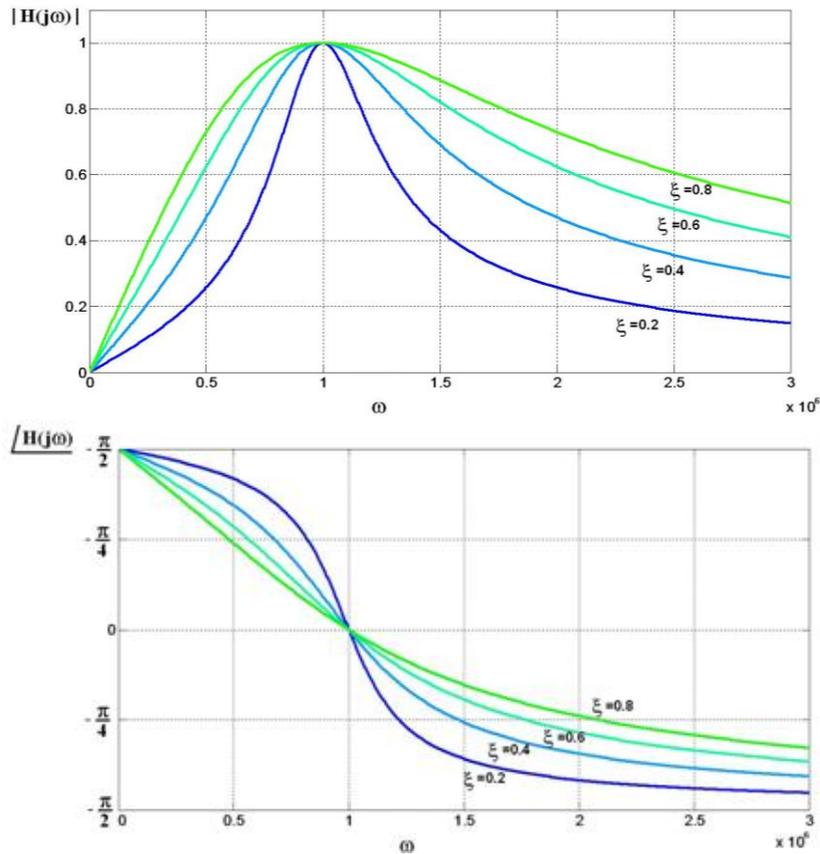


Fig. 23

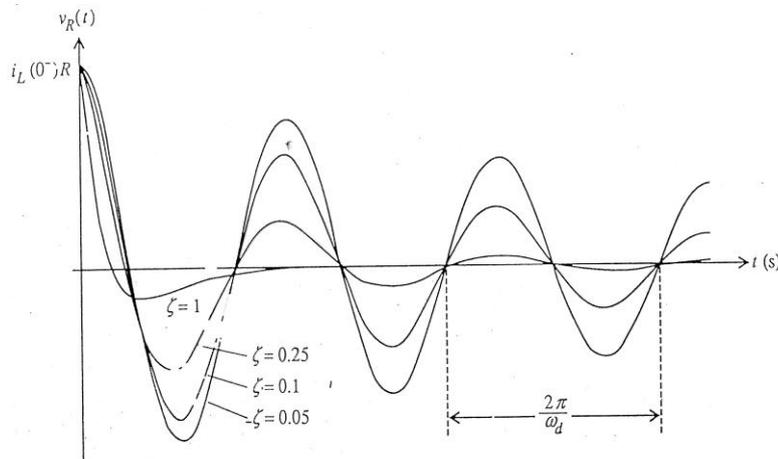


Fig. 24

La respuesta natural que se muestra en la figura 24 resulta de una condición inicial no nula en la inductancia, y es una senoide amortiguada con coeficiente de amortiguamiento  $\alpha$  y frecuencia natural amortiguada  $\omega_d$ . Vemos que si el coeficiente de amortiguamiento es pequeño, de forma que los polos estén próximos al eje  $j\omega$ , la característica de amplitud tiene un pico agudo, y la respuesta natural es altamente oscilante. A medida que el coeficiente de amortiguamiento aumenta, los polos se alejan del eje  $j\omega$ , de forma que la característica de amplitud es menos aguda y la respuesta natural es menos oscilante. Para  $\xi \geq 1$  la respuesta natural no oscila.

Cuando se habla de las aplicaciones de un filtro pasabanda, es porque la tensión de entrada  $v_s(t)$  posee dos o más componentes senoidales con distintas frecuencias. Solo las componentes senoidales cuyas frecuencias sean próximas a  $\omega_0$  pueden pasar a la salida  $v_R(t)$  sin sufrir una atenuación significativa. La *banda de paso* se define como la banda de frecuencias comprendidas entre  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , donde  $\omega_1$  y  $\omega_2$  son las frecuencias superior e inferior del filtro que se muestra en la figura . La banda de rechazo incluye todas las frecuencias fuera de la banda de paso. El ancho de banda está dado por:

$$AB_\omega = \omega_1 - \omega_2$$

y el módulo de la función transferencia en función de la frecuencia se muestra en la fig. 25

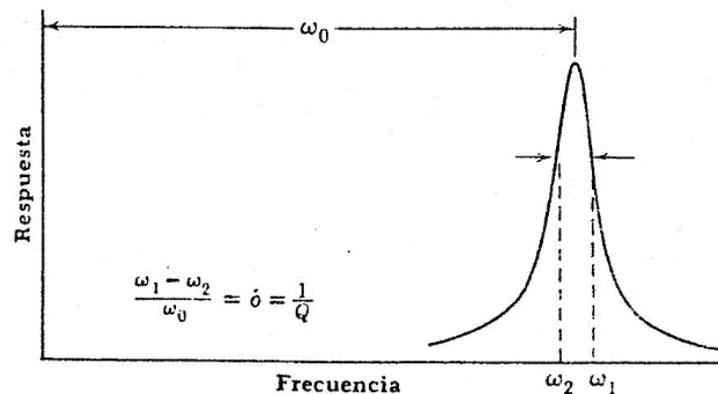


Fig. 25

Ahora veremos qué expresión tiene el ancho de banda en función de los parámetros del circuito. En efecto, sabemos que las frecuencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$  son las soluciones positivas de la ecuación:

$$|H_R(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

o, lo que es lo mismo:

$$\left| \frac{R}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

que, a cálculo hecho, nos conduce a:

$$\omega_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{1}{LC} + \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = -\alpha + \sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2}$$

y :

$$\omega_2 = +\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{1}{LC} + \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = +\alpha + \sqrt{\omega_o^2 + \alpha^2}$$

Si restamos  $\omega_1$  de  $\omega_2$ , vemos que el ancho de banda está dado por la siguiente expresión:

$$AB = 2\alpha = \frac{R}{L}$$

Vemos así que efectivamente, el circuito serie RLC con salida sobre la resistencia puede ser usado como un filtro pasabanda. Para este circuito, la característica de amplitud tiene su máximo a frecuencia

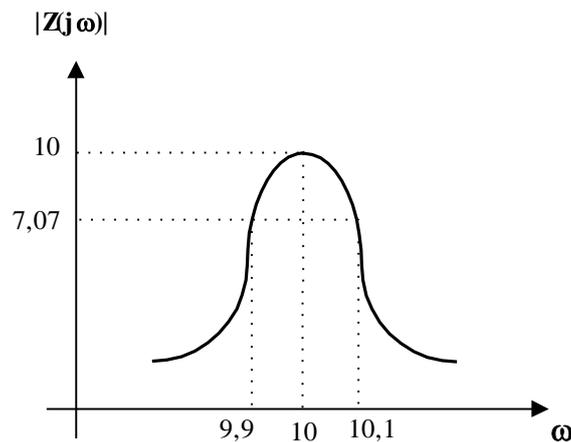
$$\omega_o = 1/\sqrt{LC}$$

y tanto este valor como el del ancho de banda son coincidentes con los obtenidos cuando estudiamos la resonancia de fase en el circuito RLC.

### Ejercicios propuestos:

1) En la figura siguiente se muestra la curva de resonancia de un circuito paralelo RLC.

- Hallar R, L, C.
- Se desea el mismo comportamiento en resonancia pero alrededor de una frecuencia central de 20KHz. El valor máximo de  $|Z(j\omega)|$  debe ser  $0,1M\Omega$ . Hallar los nuevos valores de R, L y C manteniendo el valor de  $Q_o$ .

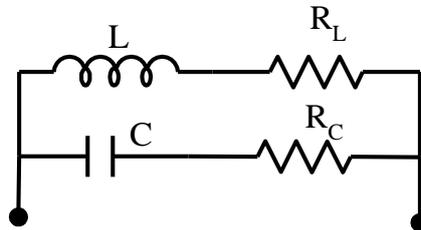


Respuesta: a)  $R = 10 \Omega$        $L = 0,02Hy$        $C = 0,5 F$   
 b)  $R = 0,1 M\Omega$     $L = 0,1Hy$        $C = 25nF$        $Q_o = 50$

2) En el circuito de la figura siendo  $R_L = 208,8 \Omega$ ,  $R_C = 110 \Omega$ ,  $L = 20mH$  y  $C = 2\mu F$ , determinar:

- Frecuencia e impedancia de resonancia supuesta  $\omega$  variable.

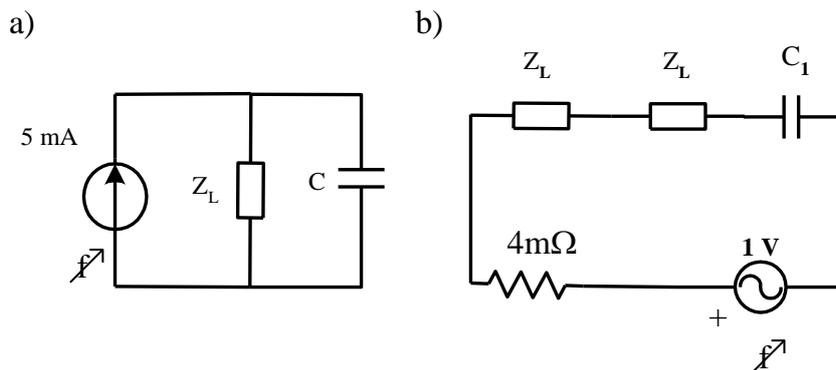
- b) Cuál es el mínimo valor que puede tomar  $R_C$  para mantener la resonancia. Se suponen constantes  $R_L$ ,  $L$  y  $C$ .



Respuesta: a)  $f_0 = 3181,5 \text{ Hz}$ ,  $z_0 = 103,41 \Omega$  b)  $R_C = 100 \Omega$

3) Se efectúan los siguientes ensayos:

- a) Una bobina no ideal y un condensador ideal se conecta en paralelo y se los somete a la alimentación de una fuente de corriente de  $5 \text{ mA}$  eficaces y de frecuencia variable, obteniéndose la máxima  $U_C = 10 \text{ V}$  para  $\omega = 200 \text{ r/s}$ , con un  $Q_0 = 200$  del circuito.  
 b) Se conectan dos bobinas iguales a la anterior en el circuito que sigue, encontrándose que a la frecuencia de resonancia es  $\omega_0 = 100 \text{ r/s}$ .

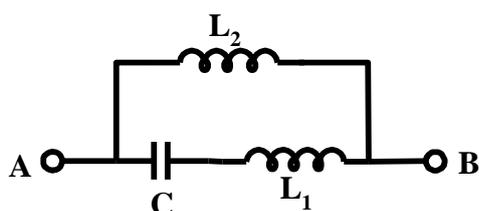


Determinar el valor de  $C_1$ .

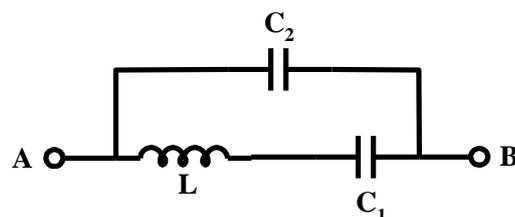
Respuesta:  $C_1 = 1 \text{ mF}$

4) En los siguientes circuitos obtener gráficamente las frecuencias de resonancia, comparar los resultados y sacar conclusiones.

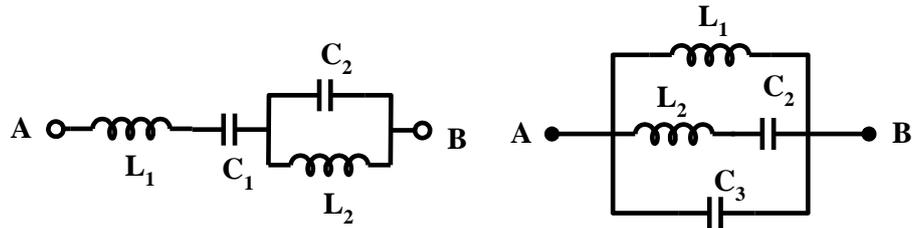
a) Hallar  $Z_{AB}$ .



Hallar  $Y_{AB}$ .

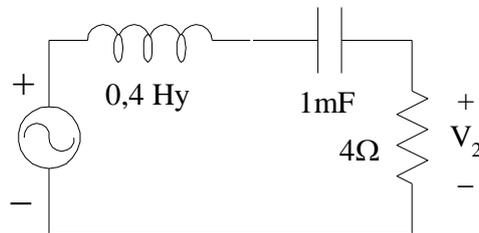


b) Hallar  $Z_{AB}$  de ambos circuitos.



5) En el siguiente circuito hallar:

- $H(j\omega)$
- Frecuencia de resonancia (de amplitud)
- AB



Respuesta:

$$a) H(j\omega) = \frac{10 \cdot j\omega}{(j\omega)^2 + 10 \cdot j\omega + 2,5 \cdot 10^3}$$

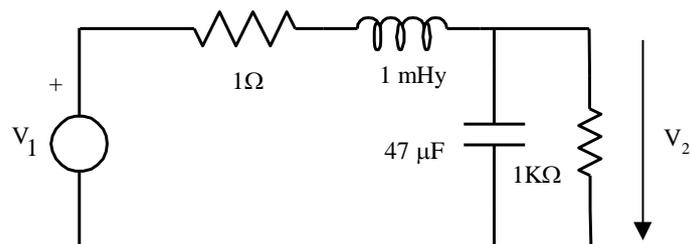
- $\omega_0 = 50 \text{ r/s}$
- $AB = 10 \text{ r/s}$

6) Mostrar que  $H(S) = \frac{2 \cdot j\omega^2}{(j\omega)^2 + 4j\omega + 1600}$  es la función transferencia de un filtro pasa alto.

Hallar  $|H(j\omega)|_{\text{máx}}$  y  $\omega_{\text{mr}}$ . Dibujar  $|H(j\omega)|$  en forma cualitativa.

Respuesta:  $|H(j\omega)|_{\text{máx}} = 20,03$   $\omega_{\text{mr}} = 40,1 \text{ r/s}$ .

7) Obtener  $H(j\omega) = \frac{V_2(j\omega)}{V_1(j\omega)}$ , frecuencia de resonancia y justificar de qué tipo de filtro se trata. Obtener las frecuencias de corte.



Respuesta:

$$H(s) = \frac{21,28 \cdot 10^6}{s^2 + 1021,3s + 21,29 \cdot 10^6} \quad \omega_0 = 4557,2 \text{ r/s}$$

$$\omega_{c2} = 5046,8 \text{ r/s} \quad \omega_{\chi 1} = 4008,7 \text{ r/s}$$

8) Obtener la frecuencia de resonancia de un circuito paralelo RLC si:

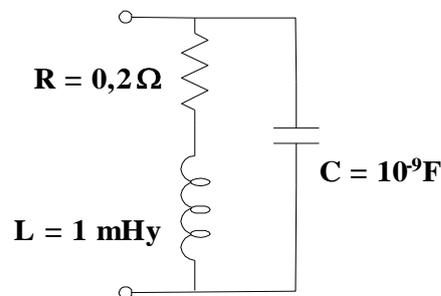
- |                      |                     |                 |
|----------------------|---------------------|-----------------|
| a) $R = 2K\Omega$    | $L = 4mH$           | $C = 0,1 \mu F$ |
| b) $\omega_d = 5r/s$ | $\alpha = 12Np/s$ . |                 |
| c) $\alpha = 1Np/s$  | $r = 4\Omega$       | $L = 2H$        |

Respuesta:

- 50.000 r/s
- 13 r/s
- 2 r/s

9) Para la red de la figura:

- Hallar  $H(s) = Z_{in}(s)$
- Trazar un diagrama de polos y ceros
- Tomar  $\omega_0$  como el punto del eje  $j\omega$  más próximo al polo del semiplano superior izquierdo. Calcular el ancho de banda y el factor de mérito.

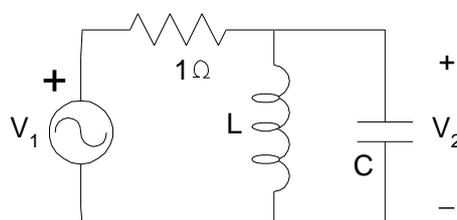


Respuesta: a)  $H(s) = 10^9 \cdot \frac{s + 200}{s^2 + 200 \cdot s + 10^{12}}$

c)  $\omega_0 = 10^6 \text{ r/s}; AB = 200r/s \quad Q_0 = 5.000$

10) Siendo el circuito un filtro pasa banda con  $AB = 0,5r/s$  y  $\omega_0 = 1r/s$ .

Hallar  $H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)}$ , L y C.



Respuesta:  $H(s) = \frac{(1/RC) \cdot s}{s^2 + (1/RC) \cdot s + (1/LC)}$        $L = 0,5\text{Hy}$        $C = 2\text{F}$