

A 2.14.2 TEORÍA DE CIRCUITOS I

CAPÍTULO 8:

REGIMEN PERMAMENTE SENOIDAL

Cátedra de Teoría de Circuitos I

Edición 2015

8.1 Senoides y fasores. Método simbólico.

Estudiaremos ahora el comportamiento en régimen permanente senoidal, es decir cuando están alimentados por fuentes sinusoidales de una frecuencia ω de los circuitos lineales, invariantes en el tiempo. Nuestra meta será desarrollar la técnica de análisis mediante el método fasorial, el cual consiste en asociar a cada onda senoidal (de tensión o de corriente) un número complejo denominado *fasor*. Esta técnica es muy importante en la ingeniería por varias razones:

- numerosos circuitos operan esencialmente en régimen permanente senoidal,
- es sumamente eficiente, con amplio rango de aplicabilidad (circuitos eléctricos, sistemas de control, electromagnetismo, etc.)
- tal como se verá posteriormente en esta misma materia, si conocemos la respuesta de un circuito lineal invariante en el tiempo a una entrada sinusoidal de cualquier frecuencia, podemos calcular su respuesta a cualquier señal periódica que podamos desarrollar en serie de Fourier.

En la figura 1 se muestra una onda senoidal genérica, cuya expresión temporal es:

$$v(t) = V_m \text{sen}(\omega t + \phi)$$

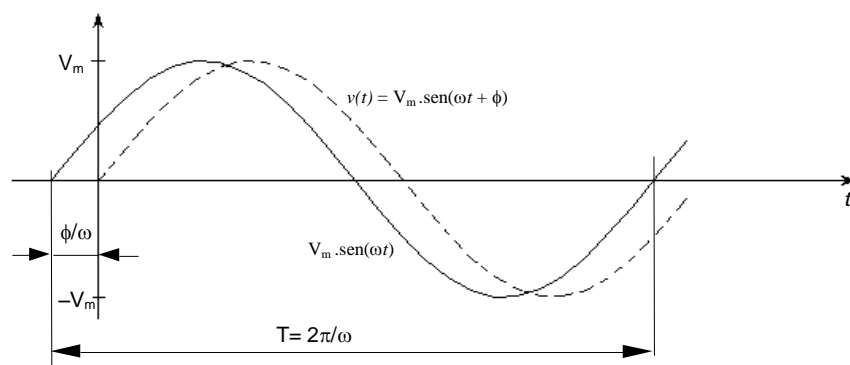


Fig. 1

donde:

- V_m es el valor máximo o amplitud de la senoide,
- ω es la frecuencia angular expresada en radianes/segundo.

El período, designado por T , es el intervalo de tiempo requerido para completar un ciclo completo de evolución, es decir, es el tiempo transcurrido entre $\omega t = 0$ y $\omega t = 2\pi$. Luego,

$$T = 2\pi / \omega$$

La frecuencia f , expresada en Hertz (Hz) es la inversa del período, por lo que podemos escribir:

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi}$$

- ϕ es el ángulo de fase inicial, medido en radianes o grados, y representa un desplazamiento hacia la izquierda de la senoide con respecto a una senoide de referencia, de manera que decimos que esta senoide está adelantada ϕ radianes, o ϕ/ω segundos.

Esta onda senoidal puede también escribirse como una función coseno:

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi - \pi/2)$$

y, si denominamos $\theta = \phi - \pi/2$, tendremos que:

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta) = (V_m \cos \theta) \cos \omega t - (V_m \sen \theta) \sen \omega t$$

Aplicando la identidad de Euler:

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sen \omega t \quad \text{donde } j = \sqrt{-1}$$

es fácil demostrar que:

$$\cos \omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} = \Re\{e^{j\omega t}\} \quad \text{sen } \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} = \Im\{e^{j\omega t}\}$$

Los términos $e^{j\omega t}$ y $e^{-j\omega t}$ pueden interpretarse como vectores rotantes:

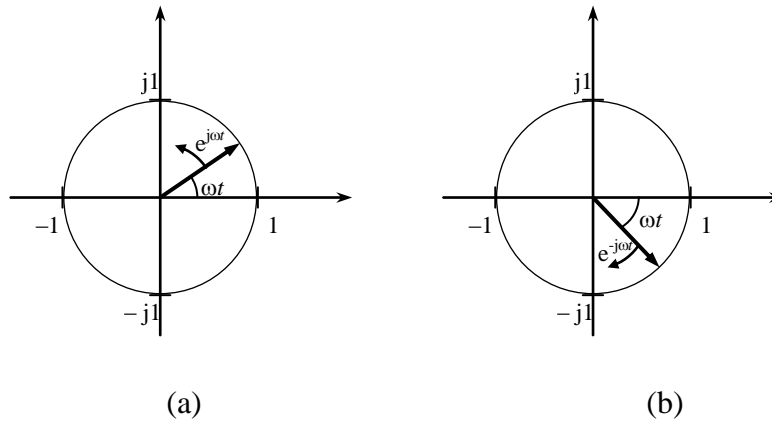


Fig. 2

- $e^{j\omega t}$ representa un vector unitario que rota en sentido antihorario como se muestra en la fig.2a, con magnitud:

$$|e^{j\omega t}| = [\cos^2 \omega t + \sen^2 \omega t]^{1/2} = 1$$

y fase:

$$\vartheta = \tan^{-1} \left[\frac{\Im e^{j\omega t}}{\Re e^{j\omega t}} \right] = \tan^{-1} \frac{\sen \omega t}{\cos \omega t} = \omega t$$

- $e^{-j\omega t}$ representa un vector unitario que rota en sentido horario, como se muestra en la figura 2 b.

Las ondas de evolución senoidal y cosenoidal pueden interpretarse en función de estos vectores rotantes, y desde ahora utilizaremos la función exponencial $e^{j\omega t}$ como un medio para determinar las respuestas de los circuitos a las excitaciones con este tipo de evolución.

Recordando que la relación que existe entre el valor máximo y el eficaz en una onda senoidal es $\sqrt{2}$, podemos escribir:

$$v(t) = V_m \operatorname{sen}(\omega t + \Phi) = \sqrt{2} V \operatorname{sen}(\omega t + \Phi)$$

que, en base a la identidad de Euler, es:

$$v(t) = \operatorname{Im} \left\{ \sqrt{2} V e^{j(\omega t + \Phi)} \right\} = \operatorname{Im} \left\{ \sqrt{2} V e^{j\Phi} e^{j\omega t} \right\}$$

expresión en la que podemos observar que $V e^{j\Phi}$ es un número complejo que da información acerca del valor eficaz y la fase de una función senoidal dada. Este número complejo es por definición la representación fasorial, o **fasor** de la función senoidal dada.

Así, introducimos una nueva notación, la notación simbólica:

$$\dot{V} = V e^{j\Phi} \quad (1)$$

y decimos que \dot{V} es el **fasor asociado a $v(t)$** . En otras palabras, el fasor "transfiere" la función senoidal desde el dominio temporal al dominio complejo.

Ejemplos:

$$v(t) = \sqrt{2} \cdot 3 \cdot \cos(\omega t + 2) = \operatorname{Re} [\sqrt{2} \cdot 3 e^{j(\omega t + 2)}] \quad \dot{V} = 3 e^{j2}$$

$$i(t) = \sqrt{2} \cdot 6 \cdot \operatorname{sen}(\omega t) = \operatorname{Im} [\sqrt{2} \cdot 6 e^{j\omega t}] \quad \dot{I} = 6 e^{j0}$$

La expresión obtenida en (1) es la forma polar del fasor, siendo su forma rectangular:

$$\dot{V} = V \cos \phi + j V \operatorname{sen} \phi$$

Tanto la forma polar como la rectangular son sumamente útiles para la resolución de circuitos por el método fasorial. La magnitud, o módulo, de dicho fasor será:

$$V_m = |\dot{V}| = \sqrt{\operatorname{Re}\{\dot{V}\}^2 + \operatorname{Im}\{\dot{V}\}^2}$$

y su fase será:

$$\phi = \arg \dot{V} = \tan^{-1} \left[\frac{\operatorname{Im}(\dot{V})}{\operatorname{Re}(\dot{V})} \right]$$

Conociendo la frecuencia ω de la onda de excitación, podremos pasar del fasor a la expresión temporal de la magnitud:

$$v(t) = \operatorname{Re} [\dot{V} e^{j\omega t}] = \operatorname{Re} [V_m e^{j\Phi} e^{j\omega t}] = \operatorname{Re} [V_m e^{j(\omega t + \Phi)}] = \operatorname{Re} [V_m \cos(\omega t + \Phi) + j V_m \operatorname{sen}(\omega t + \Phi)]$$

Por convención, representaremos los fasores mediante el valor eficaz de la magnitud, siendo su representación en el plano complejo la mostrada en la fig. 3, cuya expresión en forma polar es:

$$\dot{V} = V \angle \Phi$$

donde Φ indica el ángulo de fase inicial de la magnitud en estudio.

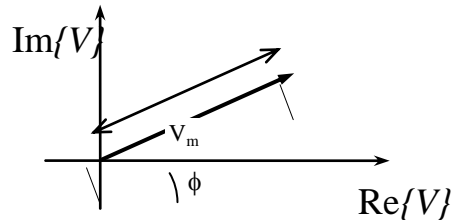


Fig. 3

Para hacer uso de los fasores en el análisis de los circuitos lineales invariantes en el tiempo en régimen permanente senoidal se deben tener presentes los siguientes lemas:

Lema 1 (unicidad): Dos senoides son iguales si y sólo si están representadas por el mismo fasor.

Lema 2 (linealidad): El fasor que representa la combinación lineal de senoides con coeficientes reales es igual a la misma combinación lineal de los fasores que representan a las senoides individualmente.

Lema 3 (regla de derivación): \dot{A} es el fasor de una senoide dada si y solo si $j\omega A$ es el fasor de su derivada.

La demostración de estos tres lemas es muy simple:

Lema 1: *Dos senoides son iguales si y sólo si están representadas por el mismo fasor.*

$$\Re(\dot{A} e^{j\omega t}) = \Re(\dot{B} e^{j\omega t}) \quad \Leftrightarrow \quad \dot{A} \equiv \dot{B}$$

Dem: \Leftarrow] Suponemos $\dot{A} = \dot{B} \Rightarrow t \geq 0$

$$\dot{A} e^{j\omega t} = \dot{B} e^{j\omega t} \quad \text{y} \quad \Re(\dot{A} e^{j\omega t}) = \Re(\dot{B} e^{j\omega t})$$

\Rightarrow] Suponemos $t \geq 0$

$$\Re(\dot{A} e^{j\omega t}) = \Re(\dot{B} e^{j\omega t})$$

$$\text{Si } t = 0 \quad \Re(\dot{A}) = \Re(\dot{B})$$

$$\text{Si } t = \frac{\pi}{2\omega} \quad \Im(\dot{A}) = \Im(\dot{B})$$

$$\dot{A} = \Re(\dot{A}) + j\Im(\dot{A}) = \Re(\dot{B}) + j\Im(\dot{B}) = \dot{B}$$

Lema 2: *El fasor que representa la combinación lineal de senoides con coeficientes reales es igual a la misma combinación lineal de los fasores que representan a las senoides individualmente.*

Sean las senoides $x_1(t) = \Re(\dot{A}_1 e^{j\omega t})$ y $x_2(t) = \Re(\dot{A}_2 e^{j\omega t})$. Según vimos, el fasor \dot{A}_1 representa a

la senoide $x_1(t)$ y el fasor \dot{A}_2 a la senoide $x_2(t)$. Sean a_1 y a_2 dos números reales cualesquiera, entonces la senoide $a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$ estará representada por el fasor $a_1 \dot{A}_1 + a_2 \dot{A}_2$.

Dem.: Lo hacemos por cálculo:

$$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) = a_1 \Re \{A_1 e^{j\omega t}\} + a_2 \Re \{A_2 e^{j\omega t}\} \quad (1)$$

a_1 y a_2 son números reales, y por álgebra sabemos que, dados dos números complejos Z_1 y Z_2 será:

$$a_i \Re \{Z_i\} = \Re \{a_i Z_i\} \quad i=1, 2$$

de donde

$$a_1 \Re \{Z_1\} + a_2 \Re \{Z_2\} = \Re \{a_1 Z_1 + a_2 Z_2\}$$

Aplicando esto a (1) será:

$$a_1 \Re \{A_1 e^{j\omega t}\} + a_2 \Re \{A_2 e^{j\omega t}\} = \Re \{a_1 A_1 e^{j\omega t} + a_2 A_2 e^{j\omega t}\} = \Re \{(a_1 A_1 + a_2 A_2) e^{j\omega t}\}$$

Esta expresión y la indicada con (1) nos conducen a:

$$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) = \Re \{(A_1 a_1 + A_2 a_2) e^{j\omega t}\}$$

o sea, la senoide $a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$ queda representada por el fasor $a_1 \dot{A}_1 + a_2 \dot{A}_2$.

Lema 3: \dot{A} es el fasor de una senoide dada si y solo si $j\omega \dot{A}$ es el fasor de su derivada.

$$\Re [j\omega \dot{A} e^{j\omega t}] = \frac{d}{dt} [\Re (\dot{A} e^{j\omega t})]$$

Dem. Aceptando que los operadores lineales \Re y d/dt conmutan, o sea:

$$\Re [j\omega \dot{A} e^{j\omega t}] = \Re \frac{d}{dt} \dot{A} e^{j\omega t} = \frac{d}{dt} [\Re \dot{A} e^{j\omega t}]$$

Por cálculo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\Re \dot{A} e^{j\omega t}] &= \\ \frac{d}{dt} [\Re A_m e^{j\Psi_1} e^{j\omega t}] &= \frac{d}{dt} [\Re A_m e^{j(\omega t + \Psi_1)}] = \frac{d}{dt} A_m \cos(\omega t + \Psi_1) \\ &= A_m \omega [-\text{sen}(\omega t + \Psi_1)] = \Re [j\omega A_m e^{j\omega t + \Psi_1}] = \Re [j\omega \dot{A} e^{j\omega t}] \end{aligned}$$

Ejemplo de aplicación: Debemos efectuar una suma de senoides de igual frecuencia.

$$a(t) = A_{1m} \cos(\omega t + \Phi_1) + A_{2m} \cos(\omega t + \Phi_2) + \frac{dA_{3m} \cos(\omega t + \Phi_3)}{dt}$$

Vemos que, luego de hacer la derivada, la expresión se reduce a una senoide única de frecuencia ω . Si bien podríamos realizar el cálculo en forma trigonométrica, es un proceso complicado, por lo que

recurriremos a las reglas de trabajo con fasores que hemos aprendido. Supondremos que los fasores correspondientes son:

$$\dot{A}_1 = A_1 e^{j\psi_1} = 12e^{j23^\circ} = 11,046 + j4,689$$

$$\dot{A}_2 = A_2 e^{j\psi_2} = 7e^{-j57^\circ} = 3,812 - j5,871$$

$$\dot{A}_3 = A_3 e^{j\psi_3} = 0,2e^{j71^\circ} = 0,06511 + j0,18919$$

tomando $\omega = 377$ rad/s, y aplicando la regla de derivación, el último sumando puede representarse por el fasor:

$$j\omega \dot{A}_3 = 377 \times 0,2e^{j161^\circ} = -71,292 + j24,548$$

Por lo que la suma resulta:

$$\dot{A}_1 + \dot{A}_2 + j\omega \dot{A}_3 = -56,434 + j23,366 = 61,08e^{j157,51^\circ} = \dot{A}$$

correspondiéndole la siguiente evolución temporal en función del coseno:

$$\Re[\dot{A}e^{j\omega t}] = \sqrt{2} 61,08 \cos(377t + 157,51^\circ)$$

cuya representación gráfica es:

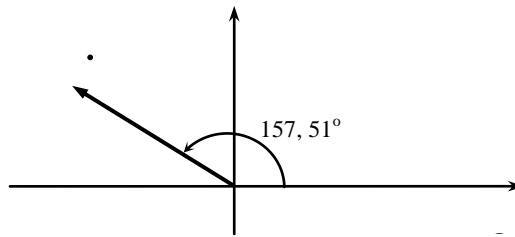


Fig. 4

Ejercicios de aplicación:

1) a) Determinar los fasores que representan las siguientes funciones reales del tiempo.

i) $10 \cdot \cos(2t + \frac{\pi}{6}) + 5 \cdot \sin 2t$ (referida al coseno)

ii) $\cos(3t + \frac{\pi}{3}) + \sin(3t - \frac{\pi}{3})$ (referida al seno)

iii) $\cos(t) + \cos(t - \frac{2\pi}{3}) + \cos(t + \frac{4\pi}{3})$ (referida al seno)

b) Escribir las funciones temporales que corresponden a los fasores obtenidos.

Rtas:

i) a) $\frac{8,66}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ$

b) $8,66 \cos(2t)$

ii) a) $\frac{0,518}{\sqrt{2}} \angle -135^\circ$

b) $0,518 \sin(3t - 135^\circ)$

iii) a) 0

b) 0

2) Evaluar las siguientes cantidades complejas y expresar las respuestas en coordenadas polares y rectangulares

$$a) \frac{(1+j) \cdot (1+2j)}{5j \cdot (1-j)} \quad b) 2 \cdot e^{j30^\circ} - e^{-j45^\circ} \quad c) \left(\frac{1-j}{1+2j} \right) \cdot e^{j45^\circ}$$

Rtas:

$$a) (0,2 + 0,4j) = 0,447 \angle 63,43^\circ \quad b) (1,025 + 1,707j) = 1,99 \angle 59^\circ$$

$$c) (0,283 - 0,566j) = 0,632 \angle -63,43^\circ$$

3) La d.d.p. en bornes de un elemento es $v(t) = 3 \cos 3t$ V, y la corriente asociada es $i(t) = -2 \sin(3t + 10^\circ)$
A. Determinar el desfase entre ambas magnitudes.

4) La expresión temporal de una d.d.p. es $v(t) = 3 \cos 4t + 4 \sin 4t$. Obtenga el fasor asociado.

5) Una d.d.p. tiene como expresión temporal $v(t) = 6 \cos(4t + 30^\circ)$ V. a) Determinar el período de oscilación. b) Obtener el desfase respecto a una corriente asociada $i(t) = 8 \cos(4t - 70^\circ)$ A.

6) ¿Podría obtener el desfase entre las siguientes dos magnitudes:

$$v(t) = 4 \cos 5t \text{ V} \quad e \quad i(t) = 3 \cos(3t - 45^\circ) \text{ A} ?$$

Justifique su respuesta.

8.2 Comportamiento de los elementos simples. Impedancia compleja

Sabemos que, para cualquier elemento lineal, existe una relación única entre la tensión y la corriente, denominada relación volt-ampere. Vimos que para una resistencia, una inductancia o una capacidad, las relaciones volt-ampere son:

$$v(t) = R i(t) \quad v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

También sabemos que, cuando se trata de funciones armónicas (senos o cosenos), la derivación nos da una función armónica de la misma frecuencia, pero desfasada 90° . Por lo tanto, en las expresiones anteriores, las tensiones y corrientes van a tener, siempre, una expresión de la forma:

$$v(t) = V_m \sin(\omega t + \Phi) \quad i(t) = I_m \sin(\omega t + \Phi)$$

Con lo antes mencionado, y recordando que la relación entre la expresión temporal y la compleja (o fasorial) de una magnitud es única, podemos realizar la siguiente representación gráfica:

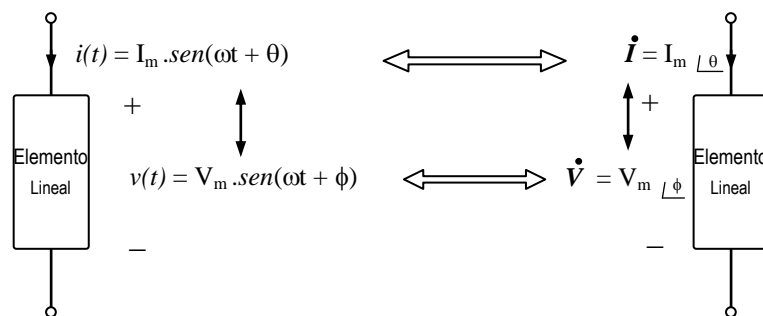


Fig. 5

Analizaremos ahora las relaciones temporales que vinculan a la tensión $v(t)$ con la corriente $i(t)$ en cada elemento, y obtendremos la relación existente entre el fasor tensión y el fasor corriente en una resistencia, una inductancia y una capacidad. Veremos que dicha relación es lineal, y que ambas magnitudes están vinculadas por una ecuación de la forma

$$\dot{V} = Z \dot{I}$$

donde Z es un número complejo denominado impedancia compleja del elemento.

8.2.1 Resistencia

Para una resistencia R , la tensión y la corriente están vinculadas por la ley de Ohm:

$$v(t) = R i(t)$$

la cual, en régimen permanente senoidal toma la forma:

$$V_m \text{sen}(\omega t + \Phi) = R I_m \text{sen}(\omega t + \theta)$$

La representación compleja de ambos miembros, y la aplicación del lema de unicidad conducen a:

$$V_m \angle \phi = R I_m \angle \theta \quad \text{o} \quad \dot{V} = R \dot{I}$$

Luego, la impedancia compleja para una resistencia será:

$$Z = \frac{\dot{V}}{\dot{I}} = R \angle 0 = R + j 0 = R$$

Siendo real pura, muestra que la tensión y la corriente complejas en una resistencia tienen la misma fase, difiriendo sus magnitudes en un factor R , lo cual se representa en la figura 6.

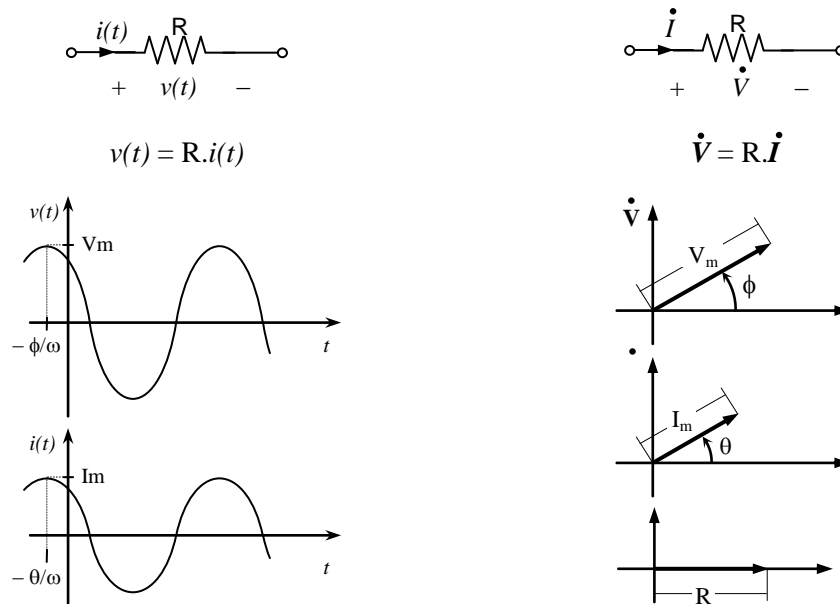


Fig. 6

La potencia instantánea en la resistencia será:

$$p(t) = v(t) i(t) = V_m I_m \text{sen} \omega t = \frac{V_m I_m}{2} (1 - \cos 2 \omega t)$$

La cual vemos que tiene una componente invariante en el tiempo $\frac{V_m I_m}{2}$ y una componente variable con una pulsación doble de la tensión o la corriente: $\frac{1}{2} V_m I_m \cos 2 \omega$. Esto implica que, aplicando la definición vista en el capítulo 1, tendremos un valor medio de potencia P distinto de cero, el cual corresponde a la potencia disipada por efecto Joule en la resistencia. En el capítulo 8 veremos que esta potencia se denomina *potencia activa*.

Ejercicio de aplicación:

A una resistencia de $2,5 \Omega$ se aplica una d.d.p. $v(t) = 10 \cos 10 t$ V. Obtener la evolución temporal de la corriente y escribir los fasores asociados a ambas magnitudes. Representarlos en un diagrama fasorial.

8.2.2 Inductancia:

La relación volt-ampere para una inductancia de L henrios es:

$$v(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

Reemplazando por la expresión temporal en ambos miembros, tenemos:

$$V_m \text{sen}(\omega t + \phi) = L \frac{d}{dt} [I_m \text{sen}(\omega t + \theta)] = \omega L I_m \cos(\omega t + \theta)$$

$$V_m \text{sen}(\omega t + \phi) = \omega L I_m \text{sen}(\omega t + \theta + \frac{\pi}{2})$$

La representación compleja en función de los fasores asociados a ambos miembros conduce a:

$$V_{m \angle \phi} = \omega L I_{m \angle (\theta + \pi/2)} = \omega L_{\angle \pi/2} \cdot I_{m \angle \theta}$$

Luego, la impedancia compleja para una inductancia es:

$$Z = \frac{\dot{V}}{\dot{I}} = \frac{V_{m \angle \Phi}}{I_{m \angle \theta}} = \omega L_{\angle \pi/2} = j \omega L \quad [X_L] = \frac{1}{s} \cdot \Omega s = \Omega$$

La cual resulta ser imaginaria pura, y recibe el nombre de **reactancia inductiva**.

Ya sea en la expresión temporal o en la expresión compleja, vemos que la relación entre el módulo de la tensión y el de la corriente es ωL , y la fase de la tensión difiere de la fase de la corriente en $\pi/2$ radianes. Dado que $\Phi = \theta + \pi/2$, decimos que **en una inductancia la tensión “adelanta” a la corriente en $\pi/2$ radianes**.

Las evoluciones temporales y los fasores asociados se representan en la figura 7:

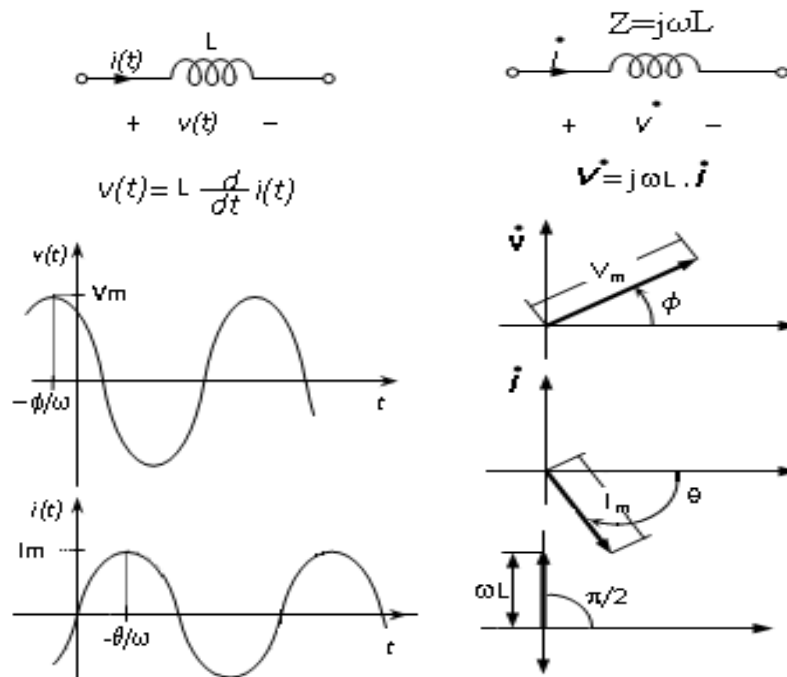


fig. 7

La potencia instantánea será:

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = V_m \cos \omega t \cdot I_m \sin \omega t = \frac{V_m I_m \sin 2\omega t}{2}$$

Observamos que, a diferencia de lo que ocurría en la resistencia, no hay componente constante, si bien la pulsación también es el doble de la de la onda de alimentación. La ausencia de componente constante indica que el valor medio de la potencia instantánea es cero (no hay potencia disipada por efecto Joule), mientras que el área encerrada por la curva y el eje de abscisas representa la energía alternativamente tomada y retornada a la fuente por el elemento, energía asociada al campo magnético de la inductancia.

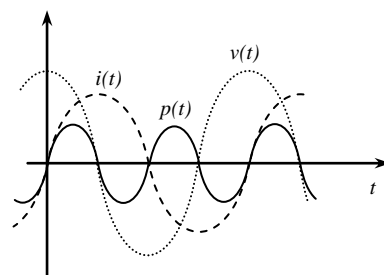


Fig. 8

Ejercicio de aplicación:

La corriente de régimen permanente que circula por un inductor de 2 H está representada por el fasor $\dot{I} = 0,05 \angle -40^\circ$ A. Si la pulsación $\omega = 100$ rad/s, obtener la expresión temporal de dicha corriente, de la d.d.p. en bornes y el fasor asociado a la d.d.p. Representar ambas magnitudes en un diagrama fasorial.

8.2.3 Capacidad

La relación volt-ampere en un capacitor es:

$$i(t) = C \frac{d}{dt} [v(t)]$$

Para ondas senoidales de frecuencia ω , tenemos:

$$I_m \text{sen}(\omega t + \theta) = C \frac{d}{dt} [V_m \text{sen}(\omega t + \Phi)] = C \omega V_m \cos(\omega t + \Phi) = C \omega V_m \text{sen}(\omega t + \Phi + \pi/2)$$

Ecuación que, en forma compleja, es:

$$I_m \angle \theta = C \omega V_m \angle (\Phi + \pi/2) = C \omega \angle \pi/2 \cdot V_m \angle \Phi \Rightarrow \dot{I} = \omega \angle \pi/2 \dot{V}$$

La ley de Ohm expresada en forma fasorial en un capacitor nos conduce entonces a:

$$Z = \frac{\dot{V}}{\dot{I}} = \frac{1}{\omega C} \angle -\pi/2 = \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C} = -j X_C \quad [X_C] = \Omega$$

Donde Z resulta ser un número complejo de parte real nula y parte imaginaria $-j1/\omega C$, que se denomina **reactancia capacitiva**. Es igualmente correcto decir que la reactancia capacitiva es $1/j\omega C$. Podemos observar que la magnitud de la tensión y la de la corriente en un capacitor están vinculadas por un factor $1/\omega C$, y las fases están relacionadas por $\pi/2$ radianes. Dado que $\theta = \Phi + \pi/2$, decimos que **en una capacidad la corriente "adelanta" a la tensión en $\pi/2$ radianes**, o que la tensión "atrassa" la corriente en $\pi/2$ radianes. Estos resultados se muestran en la fig. 9.

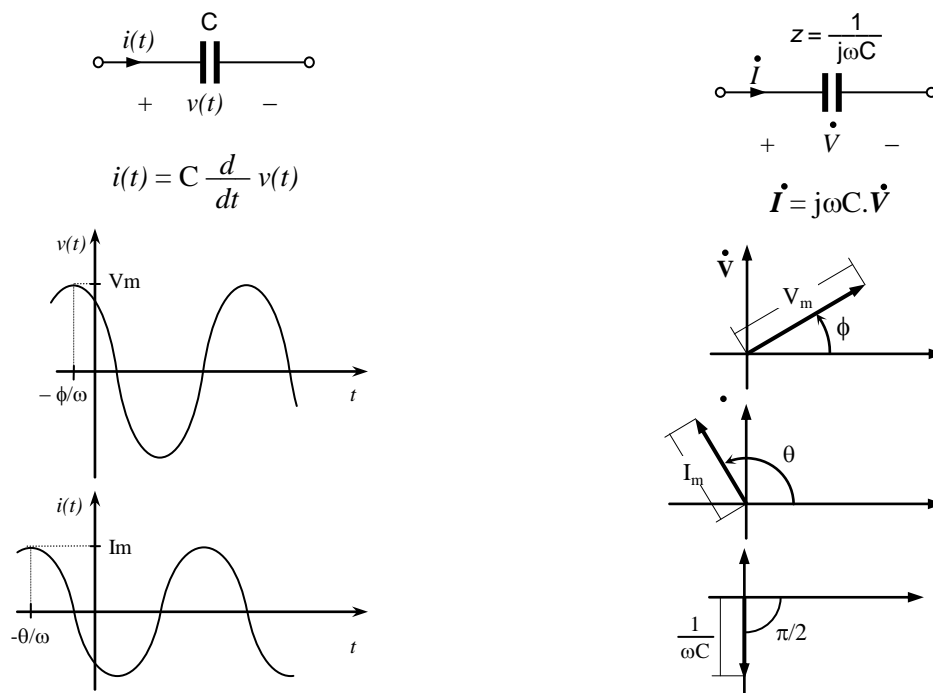


Fig. 9

La potencia instantánea $p(t)$ en un capacitor es:

$$p(t) = v(t) i(t) = V_m \operatorname{sen} \omega t \cdot I_m \operatorname{sen} \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2} V_m I_m \operatorname{sen} 2 \omega t$$

Vemos que, tal como aconteció en la inductancia, carece de término constante, por lo que su valor medio es cero (no hay potencia disipada por efecto Joule), mostrando una variación alternante de pulsación doble de la onda de alimentación, y donde el área encerrada por la curva representa la energía de campo eléctrico intercambiada con la fuente.

Comentario: Al discutir la circulación de una corriente a través de un capacitor supusimos que las placas estaban separadas por un dieléctrico ideal, o sea, sin pérdidas. En la realidad, los dieléctricos están sujetos a pérdidas, las cuales suelen ser despreciables. Si a pesar de todo deben ser tenidas en cuenta, el capacitor podrá ser reemplazado por el modelo de la figura 10, donde vemos un capacitor ideal C puenteado por una resistencia R que representa las pérdidas de energía en el dieléctrico del capacitor real. A partir de este modelo, vemos que la corriente compleja en el capacitor es igual a la suma de dos corrientes: una de valor I_1 , a través de C , que adelanta $\pi/2$ a la tensión en el mismo, y una corriente relativamente pequeña I_2 a través de R , en fase con la tensión V .

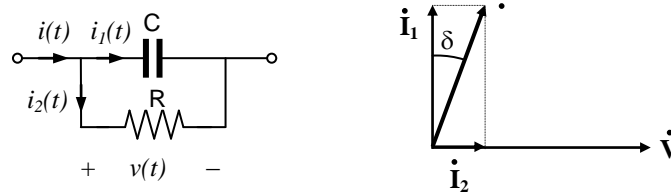


Fig. 10

Vemos así que la corriente en un capacitor real adelanta a la tensión un ángulo menor que $\pi/2$. El ángulo δ se denomina “ángulo de pérdidas” del capacitor real y su magnitud depende del material y la frecuencia utilizados, variando desde pocos segundos hasta varios grados. El valor de la tangente de δ , especificado en tablas para dieléctricos líquidos y sólidos se denomina **factor de potencia de los dieléctricos**.

Finalmente, definimos la **conductancia** como la **recíproca de la resistencia** y la **susceptancia** como la **recíproca de la reactancia** para los elementos vistos, utilizando la nomenclatura mostrada a continuación:

resistencia	$G = 1/R$	(conductancia)
inductancia	$\frac{1}{\omega L} = B_L$	(susceptancia inductiva)
capacidad	$\omega C = B_C$	(susceptancia capacitiva)

Ejercicio de aplicación:

A través de un capacitor de $C = 10 \mu\text{F}$ hay una d.d.p. $v(t) = 100 \cos (500t + 30^\circ) \text{ V}$. Determinar la corriente en forma temporal, y los fasores asociados a ambas magnitudes. Representarlos en un diagrama fasorial.

8.3 Leyes de Kirchhoff en forma fasorial

Decimos que un circuito lineal, invariante en el tiempo, está en régimen permanente senoidal a la frecuencia $\omega/2\pi$ si y solo si todas las tensiones de rama, todas las corrientes de rama y todos los potenciales de nudos son senoides de la misma frecuencia $\omega/2\pi$. En estas condiciones, todas las corrientes y tensiones poseen un fasor asociado, con lo que el análisis de un circuito en régimen permanente senoidal se reduce a la resolución de ecuaciones lineales algebraicas con coeficientes complejos.

8.3.1 Ley de Kirchhoff de corrientes

Sea el circuito de la figura 11.

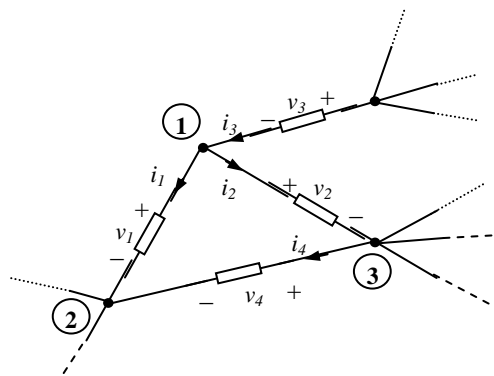


Fig. 11

En régimen permanente senoidal, a la pulsación ω , la LKC en valores instantáneos en el nudo 1 es:

$$-i_1(t) - i_2(t) + i_3(t) = 0$$

Si I_k es el fasor que representa a la senoide $i_k(t)$, la ecuación anterior se escribe como:

$$-\Im m(\dot{I}_1 e^{j\omega t}) - \Im m(\dot{I}_2 e^{j\omega t}) + \Im m(\dot{I}_3 e^{j\omega t}) = 0$$

y, utilizando los lemas de linealidad y unicidad, tenemos que:

$$-\dot{I}_1 - \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0$$

Recordando que A era la matriz $(n-1) \times b$ de coeficientes de las corrientes, la primera ley de Kirchhoff en forma matricial resulta ser:

$$[A][i(t)] = 0 \quad [A]\left[\begin{matrix} \dot{I} \end{matrix}\right] = 0$$

donde $\left[\begin{matrix} \dot{I} \end{matrix}\right]$ es el vector columna cuyos elementos son los fasores corrientes de rama $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dots, \dot{I}_b$.

8.3.2 Ley de Kirchhoff de tensiones

Apliquemos ahora la LKT al camino cerrado 1-2-3-1 de la figura 11 (observamos que el recorrido se realiza en sentido antihorario) sumando las d.d.p. en valores instantáneos.

$$v_1(t) - v_2(t) - v_4(t) = 0$$

dado que $v_k(t) = \Im(\dot{V}_k e^{j\omega t})$, usando linealidad y unicidad será:

$$\dot{V}_1 - \dot{V}_2 - \dot{V}_4 = 0$$

habíamos visto que la LKT se expresa en forma matricial como:

$$[\mathbf{V}_b(t)] = [\mathbf{A}^T][\boldsymbol{\varphi}_n(t)]$$

Por lo que, en forma fasorial, será:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_b \end{bmatrix} = [\mathbf{A}^T] \cdot \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_n \end{bmatrix}$$

8.3.3 Relaciones volt-ampere para los elementos de circuito.

Una aplicación directa de los tres lemas a las relaciones volt-ampere en el dominio temporal conduce a las siguientes expresiones fasoriales:

Elemento	Expresión temporal	Expresión Fasorial
Resistor	$v(t) = R i(t)$	$\dot{V} = R \dot{I}$
Inductor	$v(t) = L di(t) / dt$	$\dot{V} = j\omega L \dot{I}$
Capacitor	$i(t) = C dv(t) / dt$	$\dot{I} = j\omega C \dot{V}$
Fuente de tensión controlada por tensión	$v_3(t) = \mu v_1(t)$	$\dot{V}_3 = \mu \dot{V}_1$
Fuente de tensión controlad por corriente	$v_4(t) = r_m i_5(t)$	$\dot{V}_4 = r_m \dot{I}_5$
Fuente de corriente cont. por corriente	$i_8(t) = \alpha i_7(t)$	$\dot{I}_8 = \alpha \dot{I}_7$
Fuente de corriente controlada por tensión	$i_4(t) = g_m v_5(t)$	$\dot{I}_4 = g_m \dot{V}_5$

donde μ es ganancia en tensión, α es ganancia en corriente, g_m es conductancia de transferencia, y r_m es resistencia de transferencia de las fuentes controladas.

En términos de fasores, vemos que las ecuaciones de rama se vuelven ecuaciones algebraicas lineales con coeficientes complejos, dado que \dot{V} e \dot{I} son fasores (números complejos), R es real puro y $j\omega L$ y $j\omega C$ son números imaginarios puros.

8.4 Análisis de circuitos en régimen permanente senoidal

Trabajaremos con el circuito serie de la figura 12, alimentado con una fuente de tensión senoidal. Suponemos que ha transcurrido un tiempo lo suficientemente largo como para que el circuito haya alcanzado el régimen permanente senoidal.

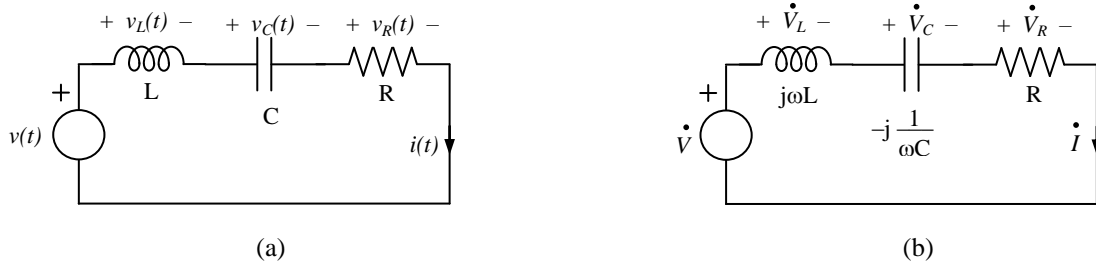


Fig. 12

En forma temporal, la LKT en el camino cerrado del circuito de la figura 12(a) resulta:

$$v_L(t) + v_C(t) + v_R(t) - v_S(t) = 0$$

y siendo que la evolución de las magnitudes es senoidal de frecuencia ω :

$$V_{Lm} \sin(\omega t + \phi_L) + V_{Cm} \sin(\omega t + \phi_C) + V_{Rm} \sin(\omega t + \phi_R) - V_{Sm} \sin(\omega t + \phi_S) = 0$$

o, lo que es lo mismo:

$$\Im m(V_{Lm} e^{j\phi_L} e^{j\omega t}) + \Im m(V_{Cm} e^{j\phi_C} e^{j\omega t}) + \Im m(V_{Rm} e^{j\phi_R} e^{j\omega t}) - \Im m(V_{Sm} e^{j\phi_S} e^{j\omega t}) = 0$$

Agrupando términos, tendremos:

$$\Im m\left(\dot{V}_L e^{j\omega t} + \dot{V}_C e^{j\omega t} + \dot{V}_R e^{j\omega t} - \dot{V}_S e^{j\omega t}\right) = 0$$

$$\Im m\left[\left(\dot{V}_L + \dot{V}_C + \dot{V}_R\right) e^{j\omega t} - \dot{V}_S e^{j\omega t}\right] = 0$$

de donde:

$$\dot{V}_L + \dot{V}_C + \dot{V}_R - \dot{V}_S = 0$$

A partir de esta expresión, que corresponde al circuito de la figura 12 b, podemos hallar la corriente I , sin necesidad de recurrir al circuito original, sino a partir del equivalente fasorial:

$$\dot{V}_S = j\omega L \dot{I} - \frac{j}{\omega C} \dot{I} + R \dot{I} = \left[j\omega L - \frac{j}{\omega C} + R \right] \dot{I}$$

Resolviendo para \dot{I} se obtiene:

$$\dot{I} = \frac{V_S}{\left[j\omega L - \frac{j}{\omega C} + R \right]} = \frac{V_{sm} e^{j\phi_S}}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

$$= \frac{V_{sm}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} e^{j\left(\phi_S - \arctg \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}\right)} = I_m e^{j\phi_i}$$

Vemos así que tanto la amplitud como la fase de la solución:

$$I_m = \frac{V_{sm}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad \Phi_i = \Phi_s - \arctg \left[\frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R} \right]$$

están relacionadas con los valores de los elementos de la red y la amplitud, la fase y la pulsación de la fuente de alimentación de la misma.

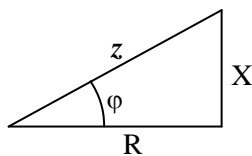
El denominador de la ecuación que nos permite calcular la corriente es

$$Z = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

cantidad compleja que indicamos con la letra **Z** y que representa la **impedancia** del circuito a la pulsación ω . El módulo de la impedancia (que indicamos con la letra minúscula **z** es:

$$z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

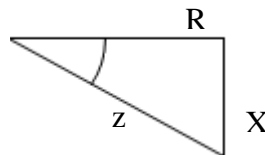
La impedancia **Z** puede representarse gráficamente mediante un triángulo rectángulo, como se muestra en la figura 13(a), al cual denominaremos desde ahora **triángulo de impedancias**, cuyos catetos son, respectivamente, la resistencia total del circuito **R** y la reactancia total **X**, y su hipotenusa es el módulo de la impedancia **z**:



Triángulo de Impedancias,

caso inductivo.

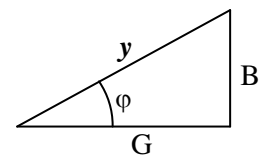
(a)



Triángulo de Impedancias,

caso capacitivo

(b)



Triángulo de Admitancias

(c)

Fig. 13

verificándose que:

$$X / R = \operatorname{tg} \varphi$$

Cabe aclarar que, dado que la reactancia (parte imaginaria de la impedancia **Z**) tiene la forma:

$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$, según sea la relación entre ambos sumandos podrá ser positiva o negativa. En caso de ser positiva, diremos que el circuito posee carácter inductivo, mientras que si es negativa diremos que el circuito posee carácter capacitivo, en cuyo caso el triángulo de impedancias se representará invertido (figura 13 c)

Tal como habíamos visto anteriormente, la inversa de la impedancia recibe el nombre de **admitancia**:

$$Y = \frac{\dot{I}}{\dot{V}} = G - jB = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j \frac{X}{R^2 + X^2}$$

Y su módulo será

$$y = \sqrt{G^2 + B^2}$$

el cual corresponde a la hipotenusa del **triángulo de admitancia** representado en la figura 13 (b),

siendo $G = \frac{R}{R^2 + X^2}$ (conductancia) y $B = \frac{X}{R^2 + X^2}$ (susceptancia) sus catetos.

Si consideramos un dipolo formado por una interconexión arbitraria de elementos lineales invariantes en el tiempo, siendo la alimentación del mismo una senoide de frecuencia ω , denominaremos impedancia de punto motriz de dicho dipolo a la frecuencia ω a la relación entre el fasor \dot{V} y el fasor \dot{I} :

$$Z(j\omega) = \frac{\dot{V}}{\dot{I}} \quad \dot{V} = Z(j\omega) \cdot \dot{I}$$

A partir de esta expresión, vemos que:

$$\dot{V} = Z \cdot \dot{I} \quad \therefore \quad V \angle \Phi_v = z \angle \varphi \cdot I \angle \Phi_i \quad \Rightarrow \quad \Phi_v = \varphi + \Phi_i \quad \Rightarrow \quad \varphi = \Phi_v - \Phi_i$$

por lo que el ángulo de la impedancia φ , que se muestra en la figura 13(a), resulta ser la diferencia entre el ángulo de fase de la tensión y el ángulo de fase de la corriente. A partir de esta expresión podemos observar que dicho ángulo podrá ser positivo o negativo, según sea que la tensión adelante o atrase a la corriente, o sea que el circuito tenga comportamiento inductivo o capacitivo. El mismo ángulo aparece en el triángulo de la figura 13(b).

Aplicación:

Consideremos la conexión serie de dos dipolos cualesquiera, los cuales pueden caracterizarse mediante sus impedancias $Z_1(j\omega)$ y $Z_2(j\omega)$, y supongamos que el circuito se halla en régimen permanente senoidal. Queremos calcular la impedancia de entrada o de punto motriz Z del dipolo equivalente. Por inspección de la fig. 14 a, vemos que la LKT dice que

$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2$$

Y la LKC establece que $I = I_1 = I_2$. Por lo tanto,

$$Z = \frac{\dot{V}}{\dot{I}} = \frac{\dot{V}_1}{\dot{I}} + \frac{\dot{V}_2}{\dot{I}} = Z_1 + Z_2$$

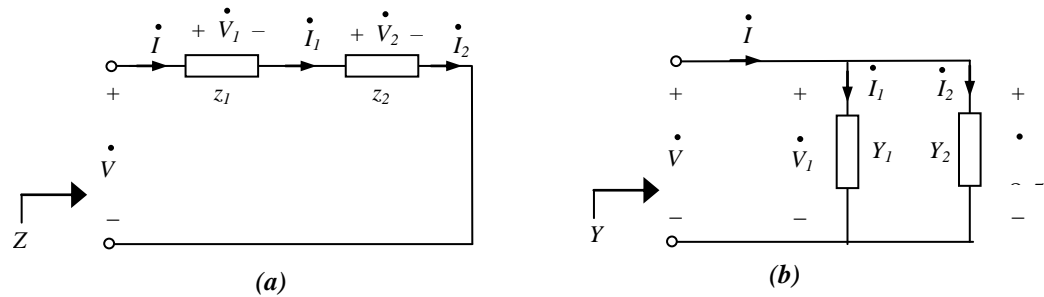


Fig.14

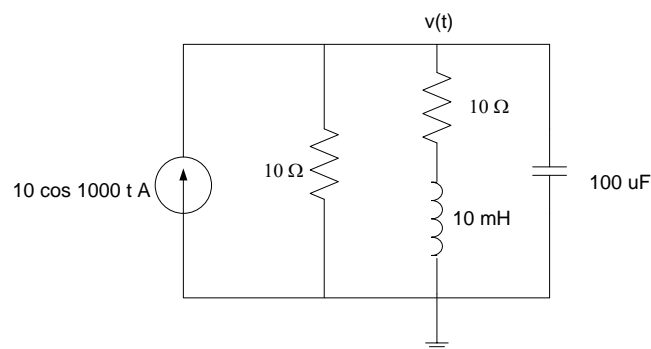
Para la situación dual, mostrada en la fig. 14 b, la LKT da que $\dot{V} = \dot{V}_1 = \dot{V}_2$, y la LKC que $\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$, por lo que la admitancia de entrada o de punto motriz será:

$$Y = \frac{\dot{I}}{\dot{V}} = \frac{\dot{I}_1 + \dot{I}_2}{\dot{V}} = Y_1 + Y_2$$

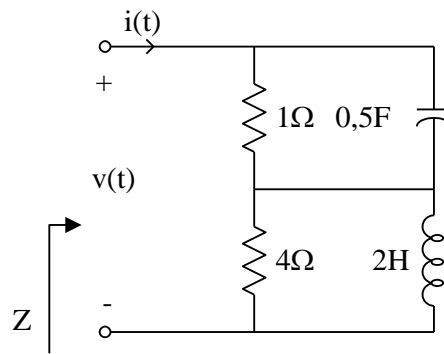
Conociendo la forma de calcular la impedancia equivalente de dipolos conectados en serie y la admitancia equivalente de dipolos conectados en paralelo, es simple calcular la impedancia o admitancia de punto motriz de circuitos combinados serie-paralelo.

Ejercicios de aplicación:

- 1) Se disponen en serie una bobina de $L = 10 \text{ mH}$, un capacitor de $C = 1 \text{ mF}$ y una resistencia de valor $R = 9 \Omega$, alimentados con una fuente de tensión senoidal de 100 V eficaces y $\omega = 100 \text{ rad/s}$. Dibujar el circuito transformado. Obtener la evolución temporal y el fasor asociado a la corriente. Representar las magnitudes en un diagrama fasorial.
- 2) En el circuito de la figura siguiente hallar la d.d.p. $v(t)$ y su fasor asociado.



- 3) a) Hallar la impedancia de punto motriz $Z(j\omega)$
- b) Calcular su valor para $\omega = 0$ y $\omega = 1 \text{ rad/seg}$
- c) Explicar, mediante un razonamiento físico, el valor de la misma para $\omega = 0$ y $\omega = \infty$



Rta.:

$$a) Z(j\omega) = \frac{4 \cdot (1 + \omega^2) + 6\omega j}{(\omega^2 + 4)}$$

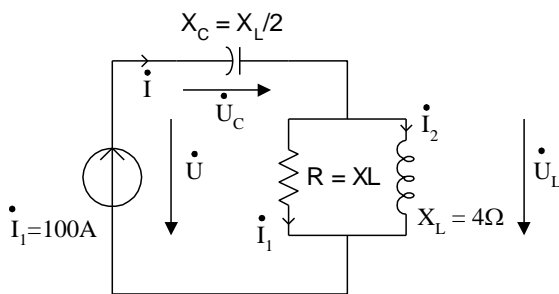
$$b) Z(j0) = 1 + 0j$$

$$Z(j1) = (1,6 + 1,2j) = 2 \angle 36,86^\circ$$

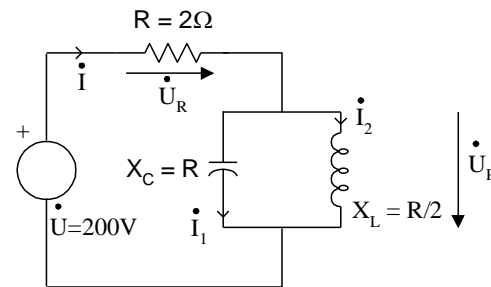
$$c) Z(j\infty) = 4\Omega$$

$$Z(j0) = 1\Omega$$

4) Para los siguientes circuitos trazar los diagramas fasoriales de tensiones y de corrientes.



(a)



(b)

Rta.:

$$a) \dot{U} = 200V \quad \dot{U}_L = (200 + 200j)V \quad \dot{U}_C = (-200j)V$$

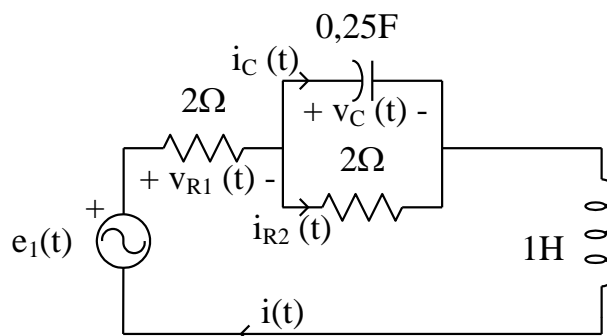
$$\dot{I}_1 = (50 + 50j)A \quad \dot{I}_2 = (50 - 50j)A$$

$$b) \dot{U}_R = (100 - 100j)V \quad \dot{U}_p = (100 + 100j)V$$

$$\dot{I}_1 = (-50 + 50j)A \quad \dot{I}_2 = (100 - 100j)A \quad \dot{I} = (50 - 50j)A$$

5) El circuito mostrado está en régimen permanente senoidal. Suponer $v_C(t) = \cos 2t$.

- a) Construir un diagrama fasorial mostrando todas las tensiones y corrientes indicadas.
- b) Hallar la tensión de régimen permanente senoidal $e_1(t)$.



Rta.:

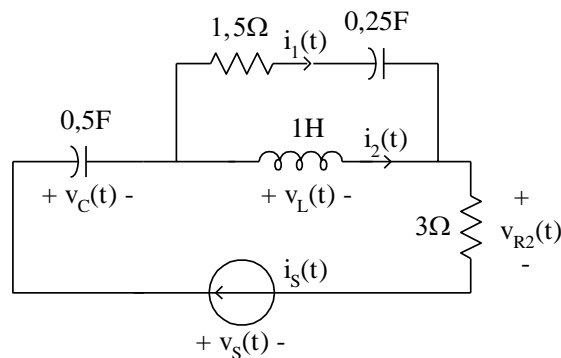
$$a) \quad \dot{V}_{R1} = \frac{(1+j)}{\sqrt{2}} V \quad \dot{E}_1 = \frac{(1+2j)}{\sqrt{2}} V \quad \dot{I}_C = \frac{(0,5j)}{\sqrt{2}} A \quad \dot{I}_{R2} = \frac{0,5}{\sqrt{2}} A \quad \dot{I} = \frac{(0,5+0,5j)}{\sqrt{2}} A$$

$$b) \quad e_1(t) = \sqrt{2} \cdot 1,5 \cdot \cos(2t + 45^\circ)$$

6) Sabiendo que $i_1(t) = \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \cos(2t)$:

a) Calcular \dot{V}_s y expresarla en forma temporal.

b) Trazar el diagrama fasorial de las tensiones y las corrientes indicadas.

**Rta.:**

$$a) \quad v_s(t) = \sqrt{2} \cdot 8,63 \cdot \cos(2t - 79,9^\circ) v$$

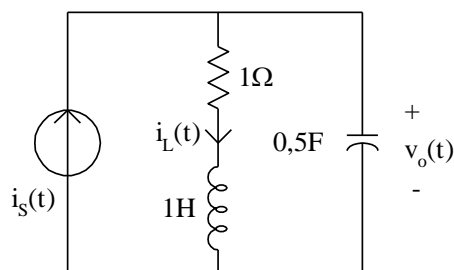
$$b) \quad \dot{V}_L = (3 - 4j)V \quad \dot{V}_{R2} = (-4,5j)V \quad \dot{V}_C = (-1,5)V \quad \dot{V}_s = (1,5 - 8,5j)V \quad \dot{I}_2 = (-2 - 1,5j)A$$

$$\dot{I}_s = (-1,5j)A$$

7) Para el siguiente circuito, siendo $i_s(t) = \cos(t + 45^\circ)$

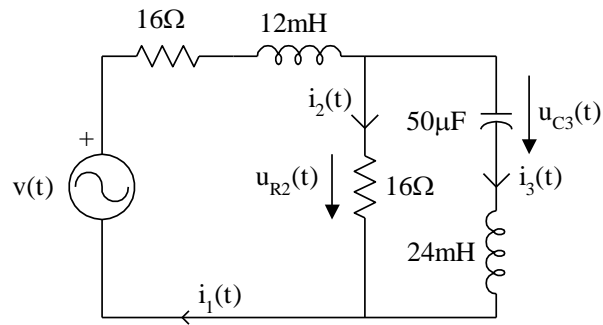
a) Usando fasores, obtener la solución de régimen permanente senoidal para $v_o(t)$ e $i_L(t)$.

b) Realizar un diagrama fasorial en el que figuren todas las tensiones y corrientes.



$$\text{Rta.:} \quad v_o(t) = \cos(t + 135^\circ) \quad i_L(t) = 1,414 \cos(t)$$

8) En el siguiente circuito obtener $v(t)$, siendo $i_3(t) = \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \cos(1000t - 30^\circ)$. Trazar el diagrama fasorial de las magnitudes indicadas.



Rta.: $v(t) = \sqrt{2} \cdot 47,6 \cdot \cos(1000t + 26,93^\circ)$

9) a) En el circuito de la figura, obtener $v(t)$ e $i_3(t)$ utilizando los datos del diagrama fasorial; graficar todas las magnitudes utilizadas.

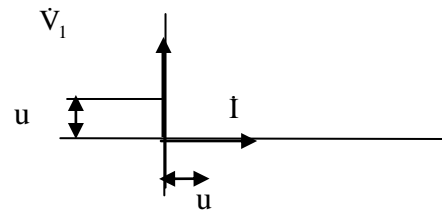
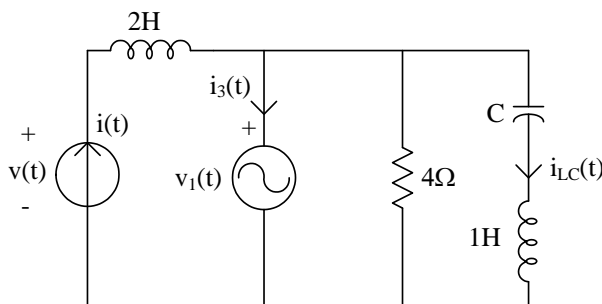
b) Calcular el valor de C.

$\omega = 2 \text{ r/s}$

u = unidad gráfica

Escala V: u = 2 Volts

Escala I: u = 1 Ampere



Rta.:

$v(t) = \sqrt{2} \cdot 12 \cdot \cos(2t + 90^\circ) \text{ V}$

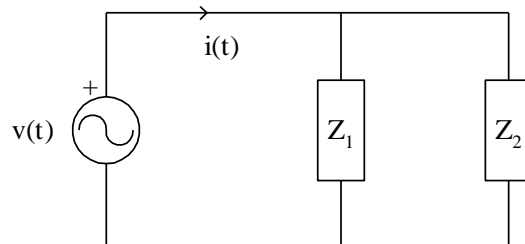
$i_3(t) = \sqrt{2} \cdot 2,23 \cdot \cos(2t - 153,4^\circ) \text{ A}$

$C = 0,5 \text{ F}$

10) Hallar los elementos que componen las impedancias Z_1 y Z_2 indicando sus valores en Ω , H, F, suponiendo que cada impedancia está compuesta por un único elemento.

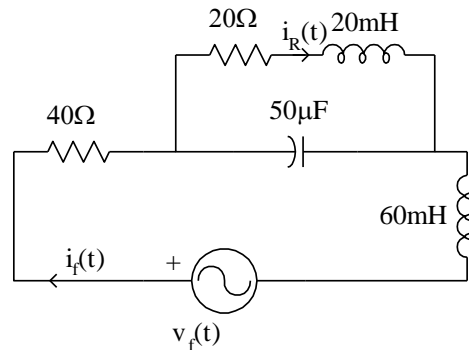
$v(t) = 50 \cdot \text{sen}(10t + \frac{\pi}{4})$

$i(t) = 400 \cdot \cos(10t + \frac{\pi}{6})$



10) Realizar el diagrama fasorial del circuito de la figura y hallar la expresión temporal de la tensión $v_f(t)$ de la fuente.

$$i_R(t) = 0,1 \cdot \sqrt{2} \cdot \text{sen}(1000t) \text{ A}$$



4.5 Análisis de circuitos con inductancias acopladas en régimen permanente senoidal. Desacoplamiento por impedancias.

De acuerdo a lo visto en el capítulo 6, la tensión en bornes de dos inductancias acopladas tal como se muestran en la figura 15 estará dada por:

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} \qquad v_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt}$$

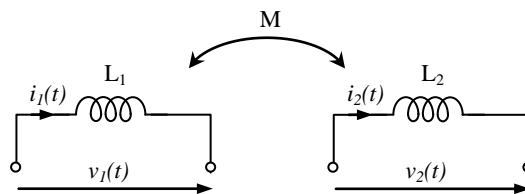


Fig. 15

El signo a aplicar dependerá de que la corriente ingrese a ambas bobinas por los bornes homólogos (+) o no (-). En régimen permanente senoidal, aplicando las reglas operacionales vistas, estas expresiones toman la siguiente forma:

$$\dot{V}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 \pm j\omega M \dot{I}_2 \qquad \dot{V}_2 = j\omega L_2 \dot{I}_2 \pm j\omega M \dot{I}_1$$

Dado que, según hemos visto, la transformación a notación simbólica no altera el cumplimiento de las leyes de Kirchhoff, podemos tratar un circuito acoplado escribiendo directamente las ecuaciones correspondientes en forma simbólica. Así, para el circuito de la figura 16, las ecuaciones de la LKC y la LKT son:

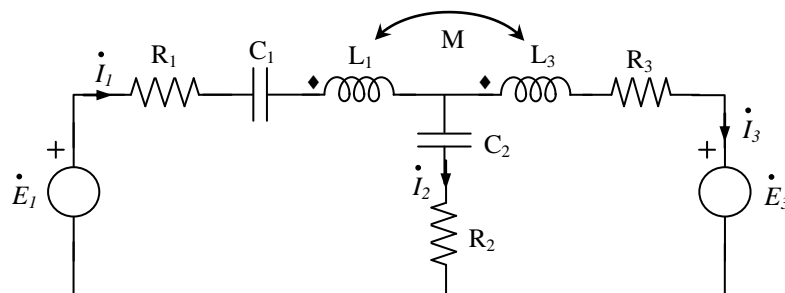


Fig.16

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3 \quad (1)$$

$$\dot{I}_1 \left(R_1 - j \frac{1}{\omega C_1} + j\omega L_1 \right) + \dot{I}_2 \left(R_2 - j \frac{1}{\omega C_2} \right) + \dot{I}_3 j\omega M = \dot{E}_1 \quad (2)$$

$$\dot{I}_1 j\omega M - \dot{I}_2 \left(R_2 - j \frac{1}{\omega C_2} \right) + \dot{I}_3 (R_3 + j\omega L_3) = -\dot{E}_3 \quad (3)$$

Ahora, procederemos a sustituir \dot{I}_3 por $\dot{I}_1 - \dot{I}_2$ en la ecuación (2) e \dot{I}_1 por $\dot{I}_2 + \dot{I}_3$ en la ecuación (3):

$$\dot{I}_1 \left(R_1 - j \frac{1}{\omega C_1} + j\omega L_1 \right) + \dot{I}_2 \left(R_2 - j \frac{1}{\omega C_2} \right) + \dot{I}_1 j\omega M - \dot{I}_2 j\omega M = \dot{E}_1$$

$$\dot{I}_2 j\omega M + \dot{I}_3 j\omega M - \dot{I}_2 \left(R_2 - j \frac{1}{\omega C_2} \right) + \dot{I}_3 (R_3 + j\omega L_3) = -\dot{E}_3$$

Reordenando, tendremos:

$$\dot{I}_1 \left[R_1 - j \frac{1}{\omega C_1} + j\omega(L_1 + M) \right] + \dot{I}_2 \left(R_2 - j \frac{1}{\omega C_2} - j\omega M \right) = \dot{E}_1$$

$$-\dot{I}_2 \left(R_2 - j \frac{1}{\omega C_2} - j\omega M \right) + \dot{I}_3 \left[R_3 + j\omega(L_3 + M) \right] = -\dot{E}_3$$

Si dibujamos el circuito correspondiente a estas ecuaciones, vemos que es el siguiente:

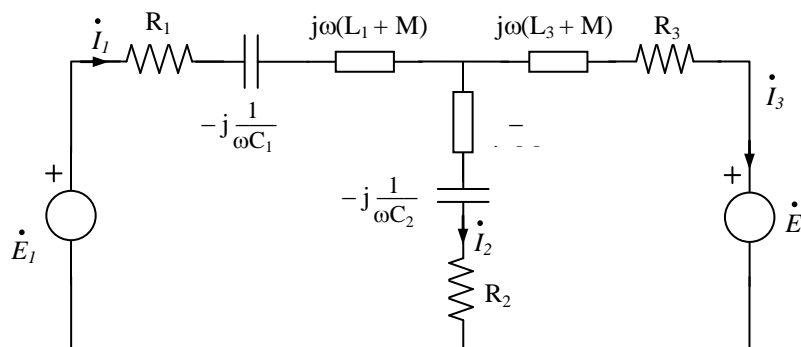


Fig.17

Comparando con el circuito que originó el sistema de ecuaciones, vemos que la reactancia $j\omega L_1$ fue reemplazada por $j\omega(L_1 + M)$, la reactancia $j\omega L_3$ por $j\omega(L_3 + M)$ y que en la rama 2 apareció una reactancia $-j\omega M$, la cual no tiene realización física en un circuito con elementos lineales, dado que correspondería a una inductancia negativa, pero que representa el efecto de inductancia mutua entre las bobinas acopladas.

Esta forma de desacoplamiento se denomina “desacoplamiento por impedancias”, y, según se desprende del procedimiento realizado, puede aplicarse toda vez que las inductancias acopladas concurren a un mismo nudo. Como norma general, el reemplazo se hará según se muestra en la figura 18, de acuerdo a que al nudo común concurren o no los bornes homólogos:

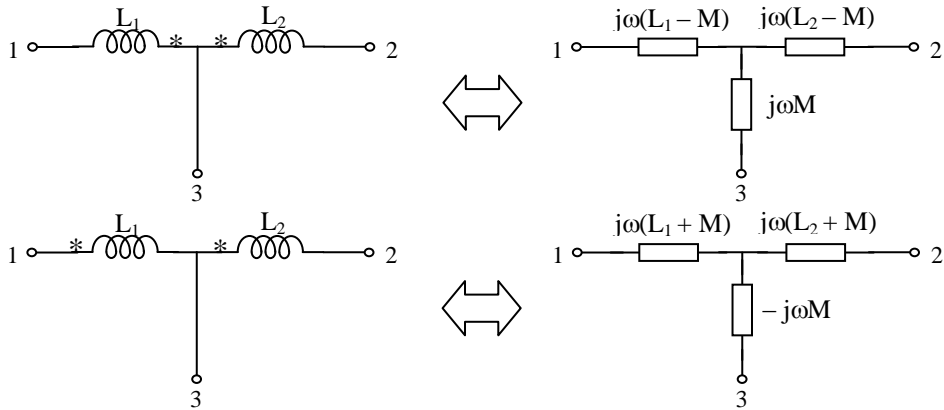
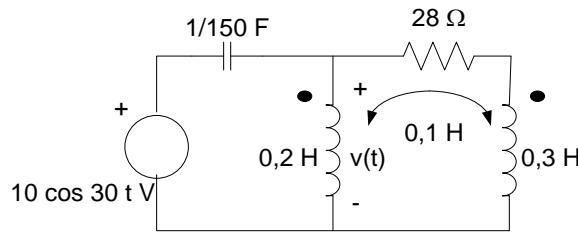


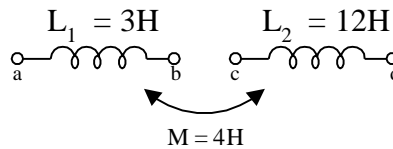
Fig. 18

Ejercicios de aplicación:

1) En el circuito de la figura, determinar $v(t)$.

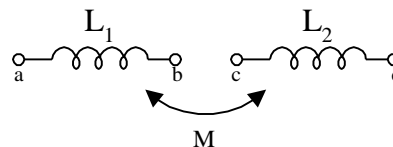


2) Dos inductancias acopladas tienen sus bornes marcados como se muestra en la figura. Los bornes homólogos son "a" y "d". Se unen los bornes "b" y "c", siendo $i_{ad}(t) = 2 \cdot \cos(10t)A$, hallar $v_{ab}(t)$ y $v_{cd}(t)$.



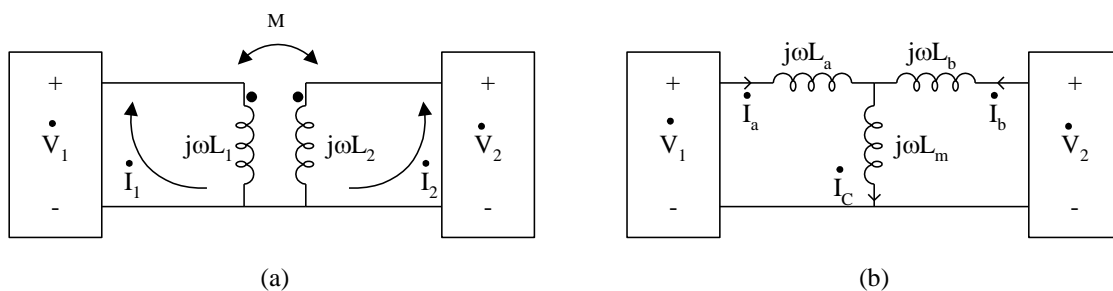
Rta.: $v_{ab}(t) = 20 \cdot \cos(10t - 90^\circ) V$ $v_{cd}(t) = 160 \cdot \cos(10t + 90^\circ) V$

3) Dos inductancias acopladas tienen bornes designados como muestra la figura. Sabiendo que la corriente $i_{cd}(t) = 0A$ y la corriente $i_{ab}(t) = -8 \cdot \sin(100t)A$, producen las tensiones $v_{ab}(t) = 4000 \cdot \sin(100t - 90^\circ)V$ y $v_{cd}(t) = 3200 \cdot \sin(100t + 90^\circ)V$, asignar un conjunto conveniente de bornes homólogos a las inductancias. Si el fabricante informa que el coeficiente de acoplamiento es 0,8 hallar L_1, L_2 y M .



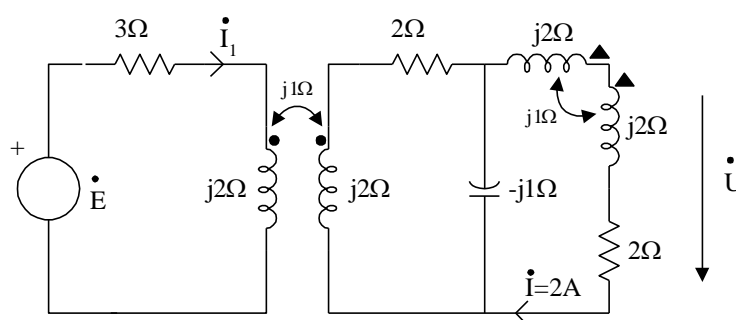
Rta.: $L_1 = 5H$ $L_2 = 5H$ $M = 4H$ Bornes homólogos "a" y "d"

4) Escribir la LKT en los caminos marcados para cada una de las redes de la figura.
 a) ¿Cómo deberían relacionarse L_a, L_b y M para que el circuito de la figura (b) sea eléctricamente equivalente a las inductancias acopladas del circuito de la figura (a).?



Rta.: $L_a = L_1 - M$ $L_b = L_2 - M$ $L_m = M$

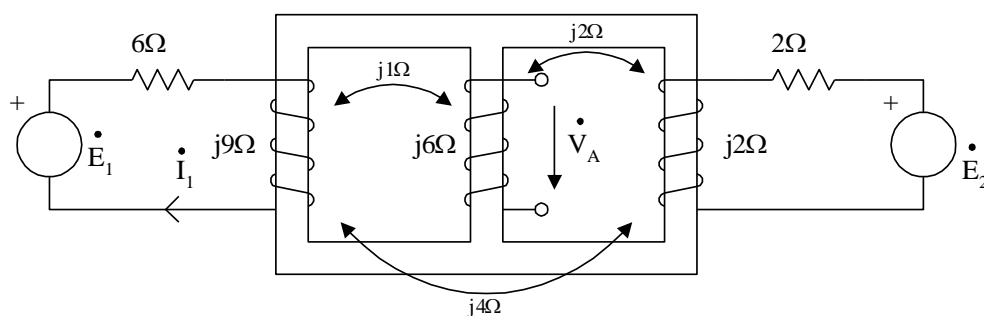
5) En el siguiente circuito determinar \dot{E} , \dot{I}_1 y \dot{U} , sabiendo que $I = 2A$



Rta.: $\dot{E} = (12 + 42j)V$ $\dot{I}_1 = (8 + 8j)A$ $\dot{U} = (4 + 2j)V$

6) En el siguiente circuito

- Determinar los bornes homólogos de los arrollamientos dados.
- Plantear las ecuaciones que permitan resolverlo.
- Encontrar la relación $\frac{\dot{E}_1}{\dot{E}_2}$ que hace que \dot{I}_1 sea nula, y dar la expresión de \dot{V}_A en ese caso



Rta.:

$$\frac{\dot{E}_1}{\dot{E}_2} = (1 + j1) = \sqrt{2} \angle 45^\circ$$

$$\dot{V}_A = -(0,5 + j0,5) \cdot \dot{E}_2$$