CAPITULO 6: Análisis de circuitos con elementos dinámicos.

En este capítulo estudiaremos los elementos almacenadores de energía (bobinas y condensadores) y su comportamiento cuando se producen aperturas o cierres de interruptores en circuitos que operan en régimen de corriente continua. Comenzaremos analizando la relación volt-ampere en el dominio temporal y luego estudiaremos su comportamiento cuando forman parte de un circuito frente a distintas situaciones, lo cual nos va a exigir la definición de nuevas funciones matemáticas con las que hasta ahora no hemos trabajado.

6.1 Inductores

Cuando levantamos un clip con un imán permanente usamos la energía asociada al campo magnético que éste origina. Ahora bien, dado que todo conductor recorrido por una corriente genera a su alrededor un campo magnético, podemos obtener la medida del mismo en un recinto cerrado de superficie S. Dicha medida la denominaremos flujo y la indicaremos con la letra Φ. Los campos magnéticos asociados a dicho sistema, siempre contienen un cierto valor de energía.

El dispositivo físico diseñado para almacenar energía en el campo magnético se denomina **inductor**, o, frecuentemente, **bobina**. Su uso es amplio en diversas aplicaciones, tales como transformadores, radios, radares, bobinas de ignición, motores, etc. Físicamente, y al solo objeto de obtener valores de campo apropiados a un determinado uso o necesidad, podemos construir un inductor realizando un arrollamiento conductor sobre una estructura soporte, la cual puede ser magnética o no (por ejemplo, hierro o plástico). En la fig. 1 se muestra el dispositivo conectado a un sistema eléctrico.

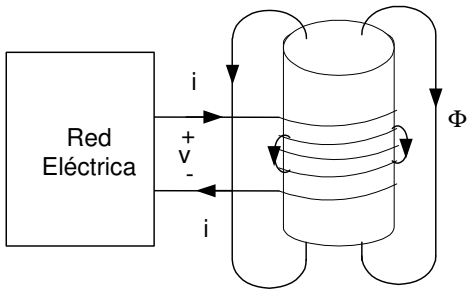


Fig. 1

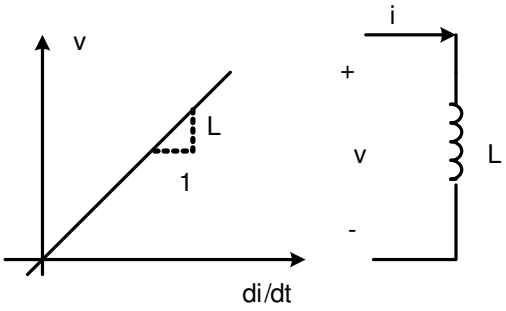


Fig. 2

Según se vio en Física, una corriente i(t) que circula por un arrollamiento genera un campo magnético, el cual podrá ser enlazado parcial o totalmente por las distintas espiras que conforman la bobina. Por ley de Faraday, la f.e.m. generada entre los extremos del arrollamiento, supuesto que el campo enlazado por una espira es igual al enlazado en las restantes, será:

$$v(t) = N \, d\phi / dt$$

donde ϕ es el flujo medio enlazado por una espira y N el número de espiras de la bobina. Para núcleos constituidos por materiales magnéticos lineales, la relación entre i y ϕ es constante, entonces definimos:

$$L \, i(t) = N \, \Phi(t) \qquad \text{o sea:} \quad L = N \, \phi(t) / i(t)$$

por lo que

$$v = N \frac{d\,\phi(t)}{d\,t} = N \frac{d}{dt}\left[\frac{L\,i(t)}{N}\right] = L \frac{d\,i(t)}{d\,t}$$

La constante de proporcionalidad entre v y di/dt se denomina **inductancia** de la bobina. Físicamente, representará la energía almacenada en el campo magnético, por lo que, por definición:

Un inductor es un dipolo cuya tensión v_{ab} es proporcional a la variación de la corriente que lo recorre con respecto al tiempo di_{ab}/dt. La constante de proporcionalidad se denomina inductancia L, y su unidad es el Henry (H).

$$v = L\frac{di(t)}{dt}$$

La representación gráfica de esta relación V-A se muestra en la figura 2, donde vemos que en el eje de absisas figura $di(t)/t$ y en el eje de ordenada la tensión *v(t)*. Dado que esta relación es lineal, vemos claramente que el elemento inductancia es un elemento lineal.

La ecuación $v_{ab} = L\frac{di_{ab}(t)}{dt}$ implica en sí misma una convención de signos pasiva. Su integración con respecto al tiempo nos conduce a lo siguiente:

$$\int_{i_{ab}(-\infty)}^{i_{ab}(t)} d\, i_{ab} = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{L} v_{ab}\, d\tau$$

Realizando la integral del primer miembro:

$$i_{ab}(t) - i_{ab}(-\infty) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v_{ab}\, d\tau$$

Suponiendo que la corriente por la inductancia es cero en t = -∞, será:

$$i_{ab}(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v_{ab}\, d\tau$$

ecuación que puede escribirse como:

$$i_{ab}(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t_o} v_{ab}\, d\tau + \frac{1}{L}\int_{t_o}^{t} v_{ab}\, d\tau = i_{ab}(t_o) + \frac{1}{L}\int_{0}^{t} v_{ab}\, d\tau \qquad (1)$$

denominándose a la corriente:

$$i_{ab}(t_o) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t_o} v_{ab}\, d\tau = i_{L0}$$

condición inicial de corriente en el instante t_o, $\boldsymbol{i_{L0}}$.

Si observamos la ecuación (1) vemos que la misma es expresión de la ley de Kirchhoff de corrientes, por lo que podemos proponer el siguiente modelo circuital para una inductancia con condición inicial de corriente.

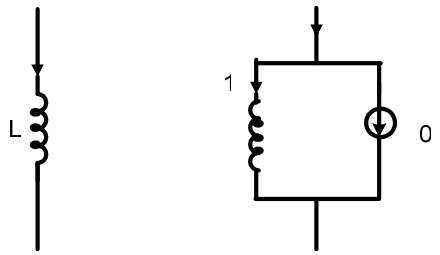


Fig. 3

Una inductancia en sí no disipa energía en forma de calor como lo hace una resistencia, sino que almacena energía en un campo magnético a medida que aumenta la corriente, y retorna dicha energía al resto del circuito cuando la magnitud de la corriente disminuye. La energía almacenada es:

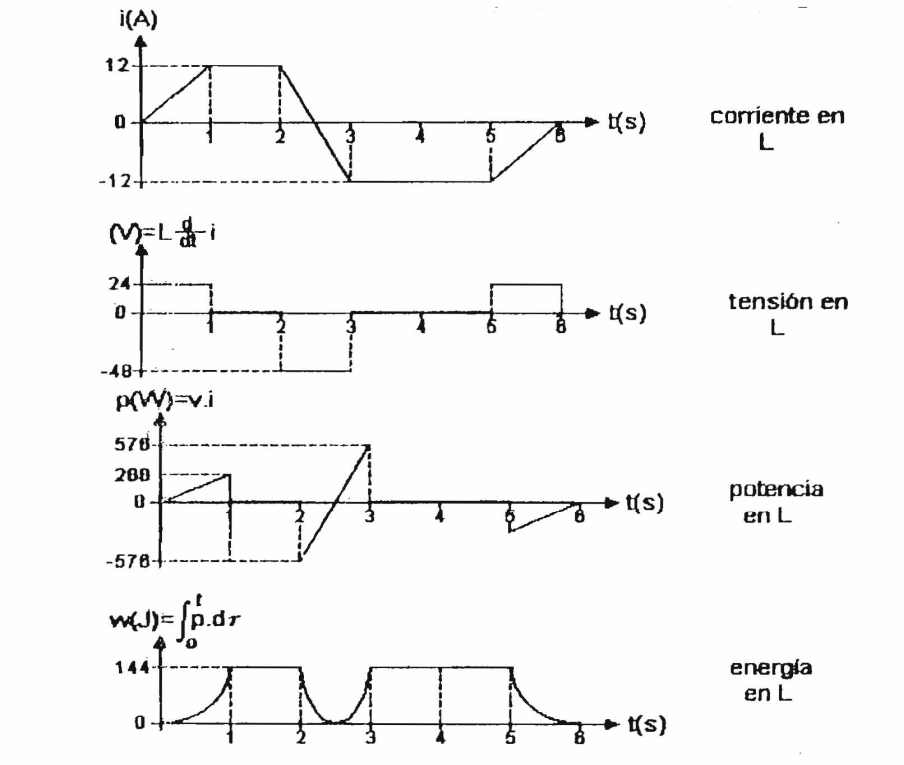
$$w(t) = \int_{-\infty}^{t} p(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{t} i(\tau)\, v(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{t} i(\tau)\, L \frac{di(\tau)}{d\tau} d\tau = L \int_{i(-\infty)}^{i(t)} i(\tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{2} L\, i^2(t) \Big|_{i(-\infty)}^{i(t)} = \frac{1}{2} L\, i^2(t)$$

o sea

$$w(t) = \frac{1}{2}\, L\, i^2(t)$$

En la figura siguiente se han representado las curvas de tensión, corriente, potencia y energía en una inductancia.



Vemos que si bien la potencia instantánea puede ser positiva o negativa, siendo negativa cuando la inductancia devuelve la energía almacenada al resto del circuito, como L>0, la energía es siempre positiva o nula, o sea que **la inductancia es un componente pasivo.**

Comentario:

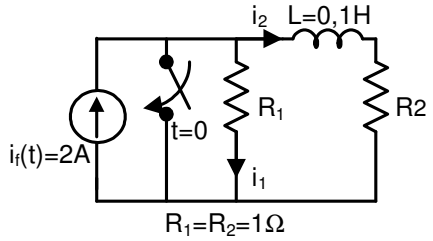
En sistemas físicos hallamos inductores cuyas inductancias varían desde micro henrios a varios henrios. Los inductores de equipos de comunicaciones a menudo se bobinan sobre núcleos no magnéticos, y podemos modelizarlos en forma precisa como inductancias que son independientes de la corriente. Las inductancias que contienen materiales ferromagnéticos en su constitución no pueden, en general, ser modelizadas como inductancias de valor constante. No obstante ello, bajo determinadas condiciones de análisis de un sistema, es posible modelizarlas como tales.

Esta aproximación puede ser válida por ejemplo en el análisis del comportamiento de motores y transformadores, los cuales utilizan en su conformación materiales ferromagnéticos y bajo condiciones de uso incursionan en zonas no lineales del ferromagnético utilizado. Asimismo, para determinadas aplicaciones, como por ejemplo los amplificadores magnéticos, se recurre intencionalmente a la

característica anómala de ciertos componentes. Estos amplificadores se utilizan como parte de circuitos convertidores DC/DC en alta frecuencia.

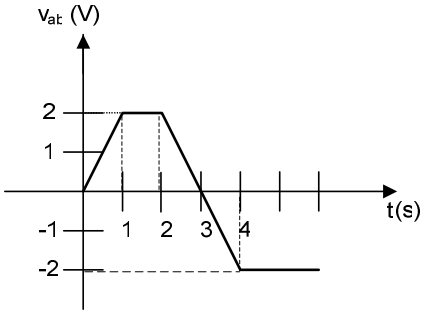
Ejercicios de aplicación:

1) En el circuito de la figura, el interruptor ha estado abierto el tiempo suficiente como para que se llegue al régimen permanente. En t=0 se cierra. Calcular los valores de corriente indicados en $t=0^+$



2) a) La tensión v_{ab} en una inductancia de 0,1H se muestra en la figura. Si $i(0^-)=2$ A, graficar i(t) para $0 \leq t \leq 4$ seg.

b) Si en la figura la ordenada pasa a ser la corriente i_{ab} en amperes a través de la inductancia, graficar la tensión v_{ab} para $0 \leq t \leq 4$ seg.



6.2 Capacitores

El dispositivo físico que se diseña intencionalmente para almacenar energía en un campo eléctrico se denomina **capacitor** o **condensador**. El uso de los capacitores es muy amplio, ya sea en circuitos electrónicos (por ejemplo, un sintonizador de radio usa un capacitor de valor variable) o en sistemas de potencia (capacitores para corrección de factor de potencia). Físicamente, está compuesto por dos placas conductoras (a menudo hojas de aluminio), separadas por un medio dieléctrico (aislante), que puede ser sólido, líquido o gaseoso. En la figura 4 se muestra un capacitor conectado a un sistema eléctrico:

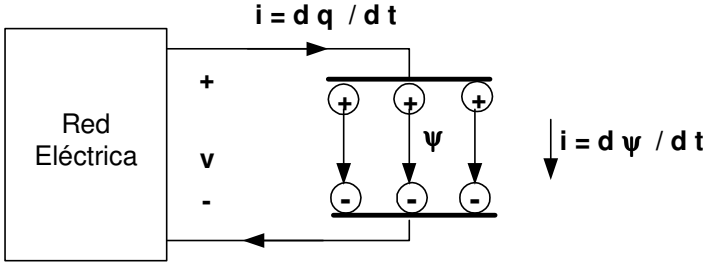


Fig. 4

El hecho de introducir en un circuito eléctrico, sede de <u>corrientes de conducción</u>, a un capacitor, que tiene en su constitución un <u>aislante</u>, implica, desde el punto de vista formal de lo que constituye un circuito, la apertura del mismo, con la consecuente interrupción de las corrientes de conducción.

Maxwell, para obviar dicha anomalía formal, introdujo en el capacitor el concepto de <u>corriente de desplazamiento</u>, la cual, en lo que hace a la posibilidad de generar campos magnéticos, se comporta de igual forma que la corriente de conducción, estableciendo la continuidad de ambas en las expresiones que regulan el comportamiento electromagnético del desplazamiento de cargas eléctricas.

En las placas opuestas del capacitor se acumulan cargas iguales pero de signos contrarios. Cuando la tensión **v** no es cero, existe un campo eléctrico resultante cuya medida la denominaremos flujo eléctrico. Este flujo eléctrico ψ igualará la carga q en exceso en la placa (+). Si ψ es constante, i será cero, pero si ***v*** varía, ψ variará e ***i*** será no nula.

La corriente de conducción en un conductor es el resultado del movimiento de cargas eléctricas:

$$i = dq(t) / dt$$

Aun cuando en un dieléctrico ideal ninguna carga pasa por la zona aislante entre las dos placas, el flujo eléctrico, cuando no es estacionario, provoca en la zona dieléctrica, de acuerdo a Maxwell, una corriente de desplazamiento cuya medida es:

$$i(t) = d\,\psi(t) / dt$$

Esta corriente de desplazamiento iguala exactamente a la corriente de conducción, por lo que la LKC no se transgrede.

La relación entre flujo y tensión es aproximadamente constante para la mayoría de los dieléctricos. Debido a que ψ es igual a la carga q, la relación entre carga y tensión es también una constante C:

$$C = q(t) / v(t)$$

Esto nos permite escribir la corriente en función de la tensión v:

$$i = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{q(t)}{v(t)}\right) v(t)\right] = \frac{dCv(t)}{dt} = C\frac{d\,v(t)}{dt}$$

siendo la constante de proporcionalidad C la capacidad de las placas.

De esta forma modelizamos el almacenamiento de energía en un campo eléctrico con un componente de red llamado **capacitor** ideal. Por definición, entonces:

Un capacitor es un dipolo cuya corriente i_{ab} es directamente proporcional a la derivada de la tensión v_{ab} con respecto al tiempo. La constante de proporcionalidad se denomina capacidad y su unidad es el Faradio (F).

La fig. 5 muestra la representación gráfica de su relación V-A, así como la convención que utilizaremos para sentidos asociados de tensión y corriente. Vemos que en el eje de absisas se ha representado $dv(t)/dt$ y en el eje de ordenadas a la corriente *i*. La relación entre ambas es constante, por lo que decimos que el capacitor es un elemento lineal.

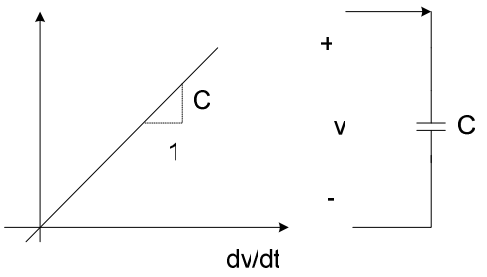


Fig. 5

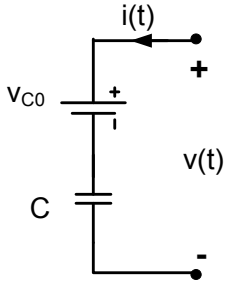


Fig. 6

Si integramos la expresión de la relación volt-ampere del capacitor respecto a t nos da:

$$\int_{v_{ab}(-\infty)}^{v_{ab}(t)} d\, v_{ab} = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t} i_{ab}\, d\tau$$

$$v_{ab}(t) - v_{ab}(-\infty) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t} i_{ab}\, d\tau$$

Suponiendo que $v_{ab}(-\infty) = 0$, será:

$$v_{ab}(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t} i_{ab}\, d\tau$$

la cual puede escribirse como:

$$v_{ab}(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t_o} i_{ab}\, d\tau + \frac{1}{C} \int_{t_o}^{t} i_{ab}\, d\tau$$

o, lo que es lo mismo:

$$v_{ab}(t) = v_{ab}(t_o) + \frac{1}{C} \int_{t_o}^{t} i_{ab}\, d\tau$$

denominándose a la tensión:

$$v_{ab}(t_o) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t_o} i_{ab}\, d\tau = v_{c0}$$

condición inicial de tensión en el tiempo t_o, $\mathbf{v_{c0}}$ **.**

El modelo del capacitor con condiciones iniciales es el mostrado en la figura 6.

Un capacitor ideal no disipa energía eléctrica en forma de calor como lo hace una resistencia. Un capacitor real sí disipa calor como consecuencia del proceso que ocurre en el dieléctrico.

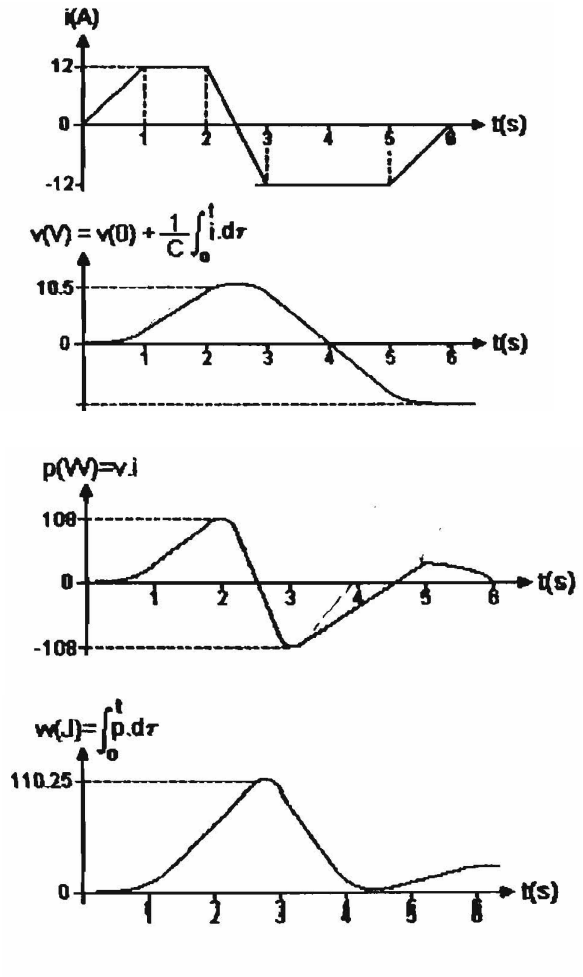
A medida que aumenta la tensión, un capacitor almacena energía en el campo eléctrico y retorna dicha energía al resto del circuito cuando la tensión disminuye. La energía almacenada, expresada en joules, es:

$$w(t) = \int_{-\infty}^{t} p(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{t} v(\tau)\, i(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{t} v(\tau)\, C\, \frac{dv(\tau)}{d\tau}\, d\tau =$$

$$= \int_{v_c(-\infty)}^{v_c(t)} C\, v(\tau)\, d\tau = \frac{1}{2} C\, v^2(\tau) \Big|_{v_c(t=-\infty)}^{v_c(t)} = \frac{1}{2} C\, v^2(t)$$

Como C>0, la energía es siempre positiva o nula, o sea que una capacidad es un componente pasivo.

En la siguiente figura se pueden observar las curvas de tensión, corriente, potencia y energía en un capacitor.



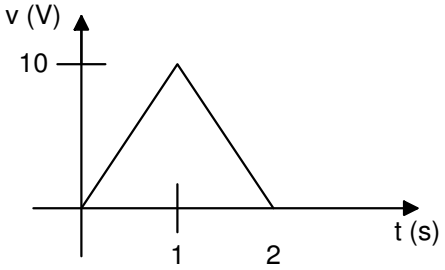
La mayoría de los capacitores posee una capacidad que es independiente de la tensión y la corriente. Algunos dispositivos prácticos hacen uso de capacidades dependientes de tensión. Uno de estos dispositivos, el diodo varactor, se utilizaba para la sintonía electrónica de radios o televisores, reemplazando a un capacitor de ajuste mecánico.

Ejercicios de aplicación:

1) *Hallar la corriente por un capacitor de 2μF para t>0 si la tensión entre sus bornes es:* $v_{ab}(t) = 50 \cos 300t$ *V para* $t \geq 0$.

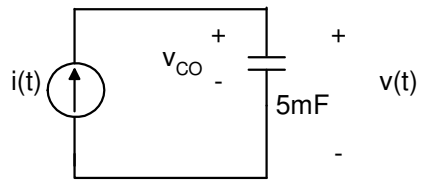
   Rta: $i(t) = -0{,}03 \operatorname{sen} 300t$.

2) *Determinar la corriente en un capacitor de C=1mF cuando el voltaje a través de él es el representado por la señal que se ve en la figura siguiente*



Rta: *0<t<1 seg* $i = 10mA$ *1 seg <t<2 seg* $i = -10mA$

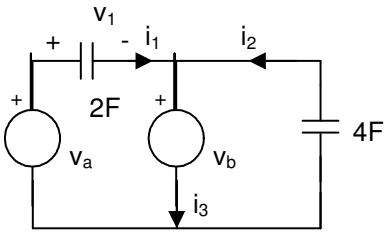
3) La corriente i(t) del circuito de la figura es ***cero*** *para t<0 e* ***i(t)=2+2 cos 5t mA*** *para t ≥ 0. El voltaje inicial del capacitor es 1/5 V. Determine v(t) para t ≥ 0.*



Rta: *v(t)= 1/5 + 2/5t + 2/25sen 5t*

4) Para la red de la figura, $v_a = 24\ e^{-3t}$ V y $v_b = 2\ e^{-3t}$ V. Determinar las siguientes cantidades para t > 0.

i) v_1
ii) i_1
iii) i_2
iv) i_3



Rta: $v_1 = 22\ e^{-3t}$, $i_1 = -132\ e^{-3t}$, $i_2 = 24\ e^{-3t}$, $i_3 = -108\ e^{-3t}$

6.3 Leyes de Conmutación

Si observamos las relaciones volt-ampere correspondientes a la bobina y al capacitor

$$v = L\frac{d\ i(t)}{dt} \qquad i = C\frac{d\ v(t)}{dt}$$

vemos claramente que imponen limitaciones en cuanto a la forma en que puede variar la corriente en la inductancia o la tensión en el capacitor, dado que las derivadas deben ser finitas.

Si la corriente por una inductancia pudiera variar bruscamente, como se muestra en la figura 7:

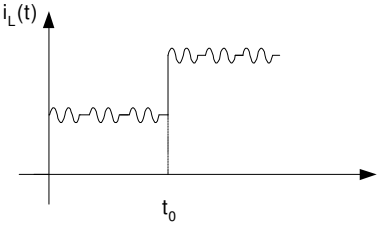


Fig. 7

su derivada en t_o tendería a ∞, y la tensión en bornes también lo haría. Dado que no existen elementos reales que puedan entregar potencia infinita, esta situación es inadmisible en un circuito físico, excepto que definamos matemáticamente funciones que nos permitan resolverla, como veremos más adelante.

A partir de esta consideración, podemos enunciar las **Leyes de Conmutación**:

Primera ley de conmutación: La corriente en una inductancia debe variar con continuidad.

$$i_L(t_{0^-}) = i_L(t_{0^+})$$

Segunda ley de conmutación: La tensión en bornes de un capacitor debe variar con continuidad.

$$v_C(t_{0^-}) = v_C(t_{0^+})$$

Los valores en el instante inicial t_0- son las condiciones iniciales de corriente y de tensión halladas al estudiar cada componente.

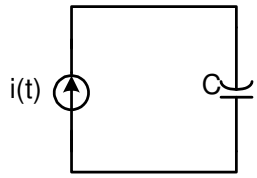
A partir de las leyes de conmutación, vemos que en t_0 **una bobina sin condiciones iniciales se comporta como un circuito abierto**, mientras que **un capacitor inicialmente descargado se comporta como un cortocircuito**.

Más adelante en este mismo capítulo veremos que, mediante el empleo de nuevas funciones (escalón, impulso) podremos analizar circuitos en los cuales la tensión en un capacitor o la corriente en una inductancia presenten una variación brusca.

6.4 Propiedades básicas de los capacitores e inductancias invariantes en el tiempo.

- ***Memoria.***

Supongamos alimentar un capacitor lineal con una fuente de corriente **i(t)**. Considerando que el capacitor no posee carga inicial, es decir, v(-∞) = 0 , obtenemos:



$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\, d\tau$$

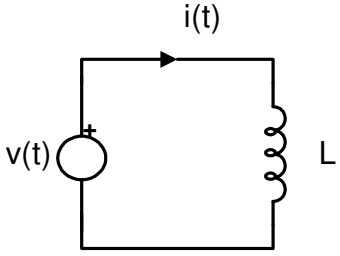
Podemos observar que, a diferencia de la tensión en una resistencia que depende sólo de la corriente por la misma en un instante **t**, la tensión en el capacitor depende de lo ocurrido con la corriente en el intervalo **(-∞ , t)**. Luego, podemos decir que el capacitor tiene **memoria**.

Supongamos ahora que conocemos el valor de la tensión v(t) en algún instante de tiempo $t_o < t$, luego, la ecuación anterior, integrada desde **- ∞** a **t** resulta:

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_o} i(\tau)\, d\tau + \frac{1}{C}\int_{t_o}^{t} i(\tau)\, d\tau = v(t_o) + \frac{1}{C}\int_{t_o}^{t} i(\tau)\, d\tau \qquad t \geq t_o$$

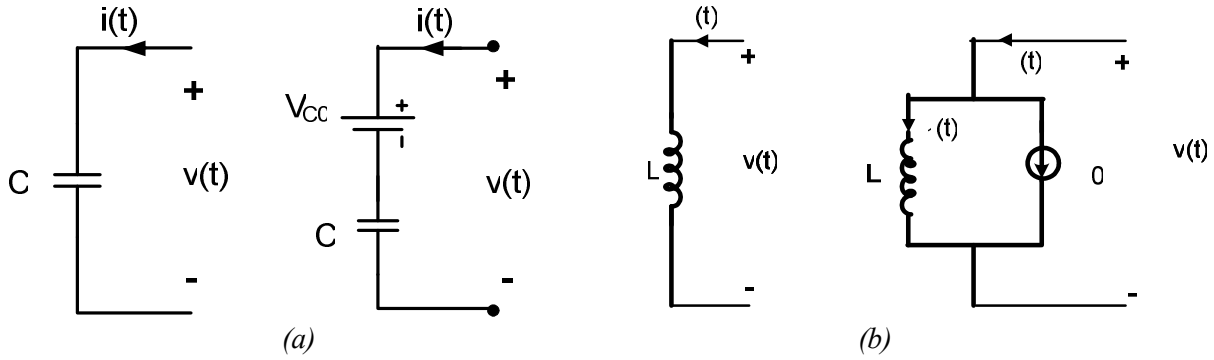
En otras palabras, para obtener el valor de la tensión **v** en un instante $t > t_o$, debemos especificar la **condición inicial de tensión $v(t_o) = v_{c0}$** y que nos permite prescindir de la historia anterior a dicho instante, dado que la misma *resume* el efecto de **i(τ)** desde $\tau = -\infty$ a $\tau = t_o$ en el valor de v(t) el cualquier instante de tiempo posterior a t_0.

Por dualidad, se deduce que **el inductor tiene memoria**, y que la corriente por el mismo está dada por:



$$i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(\tau)\, d\tau \qquad t \geq t_0$$

La propiedad de memoria en un capacitor o un inductor queda evidenciada claramente en los circuitos equivalentes antes obtenidos, los cuales, de acuerdo a lo estudiado en el capítulo 3, son duales y se muestran en la figura 8 a y 8 b:



(a) *(b)*

Fig.8

Esto nos permite decir que:

a) Un capacitor lineal invariante en el tiempo con una tensión inicial V_o es equivalente, desde el punto de vista externo, a un dipolo compuesto por un capacitor de la misma capacidad, inicialmente **descargado,** en serie con una batería de V_o volts

b) Un inductor lineal invariante en el tiempo con una corriente inicial I_o es externamente equivalente a un dipolo constituido por un inductor de igual inductancia con corriente inicial **cero** en paralelo con una fuente de corriente constante de I_o amperes.

- ***Continuidad***

Consideremos el circuito de la fig. 9 a, donde la corriente está descrita por la onda cuadrada "discontinua" de la fig. 9b.

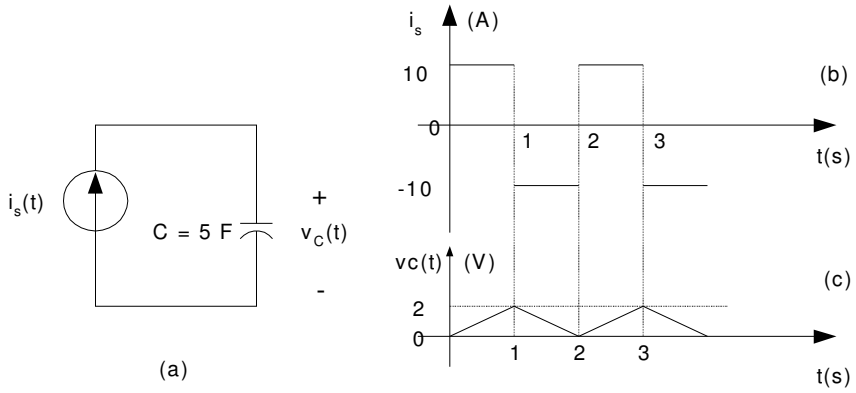


Fig. 9

Suponiendo que $v_c(0) = 0$ y a partir de la relación volt-ampere del capacitor obtenemos la forma de onda de tensión, que resulta unidireccional y continua, tal como se muestra en la fig. 8c. Este fenómeno de "alisado" resulta ser una propiedad general mostrada tanto por las tensiones en los capacitores como por las corrientes en las inductancias y en forma más precisa, podemos plantearla como sigue:

a) Si la forma de onda de corriente $i_c(t)$ en un capacitor lineal invariante en el tiempo permanece acotada en un intervalo cerrado $[t_a, t_b]$, entonces la forma de onda de la tensión $v_c(t)$ en el capacitor es una función continua en el intervalo abierto (t_a, t_b). En particular, para cualquier instante R que satisfaga que $t_a < T < t_b$, $v_c(T^-) = v_c(T^+)$.

b) Si la forma de onda de la tensión $v_L(t)$ en un inductor lineal invariante en el tiempo permanece acotada en un intervalo cerrado $[t_a, t_b]$, luego, la forma de onda de la corriente $i_L(t)$ a través del inductor es una

función continua en el intervalo abierto (t_a, t_b). En particular, para cualquier tiempo T que satisface que $t_a < T < t_b$, $i_L(T^-) = i_L(T^+)$. En otras palabras, los límites por izquierda y derecha de la función son iguales.

- **Energía almacenada en un capacitor o un inductor invariante en el tiempo.**

Consideremos un capacitor lineal de C Faradios que tiene como tensión inicial $v(t_1) = V$, y una carga inicial $q(t_1) = Q = CV$ en un instante $t = t_1$. Supongamos que en el instante $t = t_1$ el capacitor se conecta a un circuito externo, tal como se muestra en la figura10:

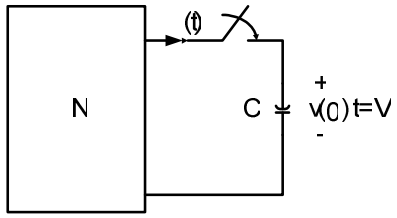


Fig. 10

La energía que ingresa al capacitor en el intervalo (t_1 ,t_2) está dada por la ecuación:

$$W_c(t_1,t_2) = \int_{t_1}^{t_2} p\,dt = \int_{t_1}^{t_2} v\,i\,dt = \int_{t_1}^{t_2} v\,C\,\frac{dv(t)}{dt} = \int_{v_1(t)}^{v_2(t)} C\,v\,dv = \frac{1}{2}\,C\,[\,v^2(t_2) - V^2\,] \qquad (4)$$

Nótese que toda vez que $v(t_2) < \mathbf{V}$, entonces $\mathbf{w_c}(t_1, t_2) < 0$ y que la energía sea negativa solo significa que la misma es drenada del capacitor y retornada al circuito externo **N**.

Por el carácter dual de ambos elementos, podemos decir que una energía igual a:

$$W_L(t_1,t_2) = = \frac{1}{2} L\left[i^2(t_2) - I^2\right]$$

es almacenada en un inductor lineal L que posee una corriente inicial $i(t_1) = I$ o un flujo inicial $\Phi(t_1) = \Phi = LI$.

6.5 Elementos acoplados sin vínculo galvánico. Inductancia mutua

Faraday estableció experimentalmente que la variación de flujo magnético debido a la variación de corriente en un conductor induce una tensión en otro conductor que enlaza al mismo flujo. Se dice entonces que tales conductores se encuentran acoplados inductivamente. Esto constituye un efecto indeseable cuando, por ejemplo, una línea de alta tensión se acopla con líneas telefónicas adyacentes. Sin embargo, el efecto de inducción mutua tiene un amplio uso tanto en los sistemas electrónicos como en los de potencia, dado que constituye la base de los transformadores.

Dos bobinas de alambre ubicadas de manera que las espiras de cada una de ellas enlacen las líneas de campo de la otra conforman un par de inductores acoplados. A menudo se ubica una bobina dentro de la otra de manera que la mayor cantidad de flujo enlazado por una sea también enlazado por la otra.

En la fig. 11 se muestra un esquema de dos bobinas ubicadas una al lado de la otra. Observemos que se ha asignado una marca a los finales de las bobinas en los bornes **a** y **c**. Esto se debe a que si las corrientes ingresan por el borne marcado en cada bobina el flujo creado por las mismas atraviesa a ambas bobinas en la misma dirección.

$\Phi_{\ell\,1,2:}$ flujo que enlaza sólo espiras de las bobinas 1 ó 2.

Φ_{21}: flujo debido a i_{ab} que enlaza espiras de L_2

Φ_{12}: flujo debido a i_{cd} que enlaza espiras de L_1

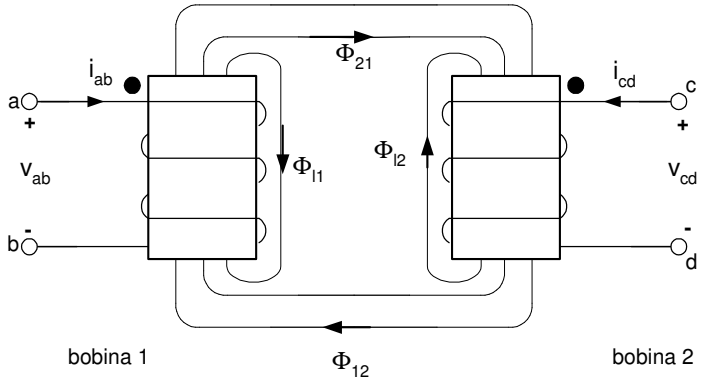


Fig. 11

No todo el flujo que enlaza una espira de una bobina enlazará necesariamente las otras, por lo que los flujos mostrados son los flujos medios por espira. Despreciando la resistencia de los bobinados, la ley de Faraday nos da la tensión v_{ab} en bornes de la bobina con N_1 espiras:

$$v_{ab} = N_1 \frac{d}{dt}\phi_1 = N_1 \frac{d}{dt}\phi_{11} + N_1 \frac{d}{dt}\phi_{12}$$

Para un material magnético lineal, la relación entre flujo y corriente es constante, lo cual implica que la **autoinductancia** de la bobina 1,

$$L_1 = N_1\, \phi_{11} / i_{ab}$$

y la **inductancia mutua** entre las bobinas 1 y 2,

$$M_{12} = N_1\, \phi_{12} / i_{cd}$$

son constantes.

Estas definiciones nos permiten escribir la tensión v_{ab} en función de la corriente:

$$v_{ab} = L_1 \frac{d}{dt} i_{ab} + M_{12} \frac{d}{dt} i_{cd} \qquad (2)$$

En forma similar podemos mostrar que:

$$v_{cd} = L_2 \frac{d}{dt} i_{cd} + M_{21} \frac{d}{dt} i_{ab} \qquad (3)$$

donde la autoinductancia de la bobina 2 y la inductancia mutua entre las bobinas 2 y 1 son constantes. En el capítulo en el cual estudiaremos los circuitos con acoplamiento inductivo veremos que $M_{12} = M_{21} = M$, por lo que podemos prescindir de los subíndices. Ahora estamos en condición de definir un nuevo componente de redes eléctricas denominado inductancia mutua de la siguiente forma:

A modo de síntesis, podemos decir que:

Inductancia mutua es el componente de redes que origina una d.d.p. en bornes de una inductancia L_1 de valor proporcional a la derivada de la corriente a través de una segunda inductancia L_2. Se dice entonces que las inductancias están **acopladas**, y la constante de proporcionalidad **M** se denomina **inductancia mutua**. Su unidad es el Henry (H).

El símbolo con el que se representan se muestra en la fig. 12. Utilizando el concepto de fuentes controladas, podemos dibujar un modelo equivalente que represente a las ecuaciones (1) y (2), el cual se muestra en la figura 13.

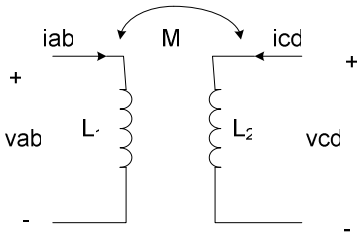


Fig. 12

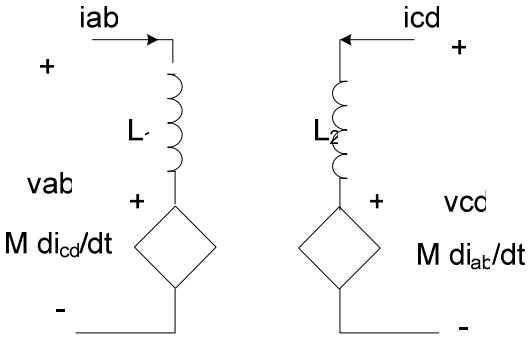


Fig. 13

El signo positivo en el segundo sumando de las ecuaciones (2) y (3) implica que las corrientes i_{ab} e i_{cd} producen flujos autoinducidos y de inducción mutua en las bobinas de igual dirección (flujos aditivos), tal como se muestra en la fig.11, dado que las corrientes ingresan a cada bobina por el terminal marcado haciendo que el flujo pase por la mismas en igual dirección.

Los bornes que provocan flujos aditivos al ingresar la corriente por ellos reciben el nombre de bornes homólogos, y se indican con algún tipo de símbolo (*, • ,▲).
En el caso de que una corriente no ingresara por el borne homólogo, los flujos serían sustractivos y en la ecuación aparecerá un signo menos (-) en el término mutuo.

A modo de resumen, podemos decir que la **inductancia mutua** es un modelo que tiene en cuenta la transferencia de energía eléctrica desde una inductancia a otra por medio del acoplamiento magnético, y toma en cuenta la tensión inducida en una bobina como resultado de la variación de corriente a través de otra.

6.5.1 Procedimiento para determinar los bornes homólogos.

A continuación describiremos un método para determinar los bornes homólogos, suponiendo que conocemos el sentido de arrollamiento de las bobinas acopladas. Cada uno de los pasos que se describen a continuación se indican en la figura siguiente:

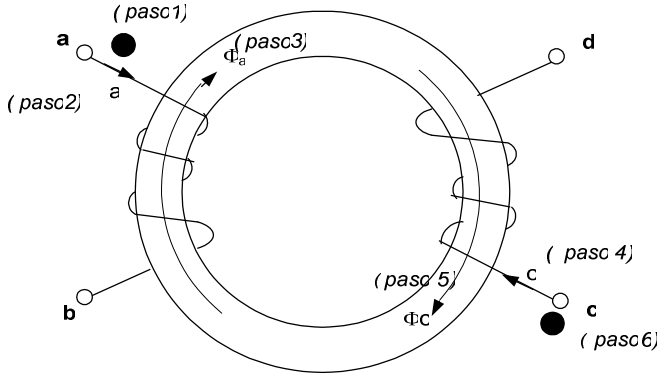


Fig. 14

- *Paso 1*: Elegir arbitrariamente un borne de una bobina, y asignarle una marca (borne **a**, •).
- *Paso 2*: Asignar una corriente al borne marcado, y darle nombre (i_a).
- *Paso 3*: Usar la regla de la mano derecha para determinar la direccion del campo magnético creado por i_a dentro del núcleo (Φ_a).
- *Paso 4*: Elegir arbitrariamente un borne de la segunda bobina (por ejemplo el **c**) y asignarle una corriente, la cual se muestra como i_c
- *Paso 5*: Usar la regla de la mano derecha para determinar la dirección del flujo creado por i_c dentro del núcleo (Φ_c).
- *Paso 6*: Comparar los sentidos de los flujos Φ_a y Φ_c. Si tienen el mismo sentido, ubicar la misma marca • en el borne de la segunda bobina por el cual entra la corriente i_c. En la figura, los flujos tienen el mismo sentido, por lo que la marca va en el borne **c**. Si los flujos tuvieran sentidos diferentes, ubicaríamos la marca en el borne de la bobina por el cual sale la corriente.

Las polaridades relativas de las bobinas acopladas pueden también determinarse experimentalmente, por ejemplo utilizando un osciloscopio.

6.5.2 Energía en circuitos acoplados inductivamente. Coeficiente de acoplamiento k.

Analizaremos a continuación la energía total almacenada en bobinas acopladas, para lo cual utilizaremos el circuito mostrado en la figura 15:

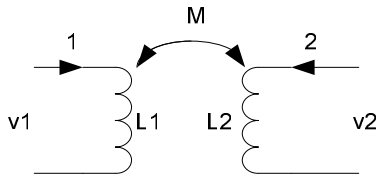


Fig. 15

Comenzaremos suponiendo que las corrientes i_1 e i_2 y que no hay energía almacenada en las bobinas. Hacemos que i_1 aumente desde cero hasta un valor arbitrario I_1 y calculamos la energía almacenada cuando $i_1=I_1$. Dado que $i_2=0$, la potencia total entregada al par de bobinas acopladas es $v_1\ i_1$, y la energía almacenada es:

$$\int_0^{w_1} dw = L_1 \int_0^{I_1} i_1\ di_1 \qquad \Rightarrow \qquad W_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2$$

Ahora mantendremos i_1 constante en el valor I_1 e incrementaremos i_2 desde o a algún valor arbitrario I_2. Durante este intervalo de tiempo la tensión inducida en la bobina 2 por i_1 es cero porque I_1 es constante. La tensión inducida en la bobina 1 por i_2 es $M_{12}\frac{di_2}{dt}$, por lo que la potencia entregada al par de bobinas acopladas es:

$$p(t) = I_1 M_{12} \frac{di_2}{dt} + i_2 v_2$$

La energía total almacenada en el par de bobinas cuando $i_2=I_2$ es:

$$\int_{w_1}^{w_{22}} dw = \int_0^{I_2} I_1 M_{12}\ di_2 + \int_0^{I_2} L_2 i_2\ di_2$$

O, lo que es lo mismo:

$$W_2 = W_1 + I_1 I_2 M_{12} + \frac{1}{2} L_2 {I_2}^2 =$$
$$= \frac{1}{2} L_1 {I_1}^2 + \frac{1}{2} L_2 {I_2}^2 + I_1 I_2 M_{12}$$

Si invertimos el procedimiento, o sea, incrementamos primero i_2 desde 0 hasta I_2 y luego incrementamos i_1 desde 0 hasta I_1, la energía total almacenada es

$$W = \frac{1}{2} L_1 {I_1}^2 + \frac{1}{2} L_2 {I_2}^2 + I_1 I_2 M_{21}$$

Tanto esta ecuación como la anteriormente obtenida expresan la energía total almacenada en un par de bobinas acopladas en función de la corriente por las autoinductancias L_1 y L_2 y por la inductancia mutua M_{12}, siendo la única diferencia entre ambas el coeficiente del producto $I_1 I_2$.

Cuando el medio es lineal, la energía almacenada total es la misma independientemente del orden usado para establecer I_1 e I_2, dado que en este tipo de medios el flujo magnético resultante depende solo de los valores finales de i_1 e i_2, no de la forma como las corrientes alcanzan estos valores. Si el flujo resultante es el mismo, la energía almacenada es la misma, por lo que $M_{12}=M_{21}$. Además, dado que I_1 e I_2 son valores arbitrarios de i_1 e i_2, podemos representar las corrientes por sus valores instantáneos, por lo que la energía total almacenada en las bobinas acopladas es:

$$w(t) = \frac{1}{2} L_1 {I_1}^2 + \frac{1}{2} L_2 {I_2}^2 + I_1 I_2 M$$

Cabe comentar que cuando las corrientes no entran a las bobinas por los bornes homólogos, el signo de $Mi_1 i_2$ se invierte, por lo que en general será:

$$w(t) = \frac{1}{2} L_1 {I_1}^2 + \frac{1}{2} L_2 {I_2}^2 \pm I_1 I_2 M_{12}$$

Utilizaremos esta última ecuación para demostrar que M no puede exceder el valor $\sqrt{L_1 L_2}$. Dado que las bobinas acopladas son elementos pasivos, la energía almacenada total nunca puede ser negativa, por lo que la ecuación anterior indica que la cantidad

$$\frac{1}{2} L_1 {I_1}^2 + \frac{1}{2} L_2 {I_2}^2 - I_1 I_2 M_{12}$$

debe ser mayor o igual a cero cuando i_1 e i_2 son ambos positivos o ambos negativos, correspondiendo el valor límite a hacer esta cantidad igual a cero:

$$\frac{1}{2} L_1 {I_1}^2 + \frac{1}{2} L_2 {I_2}^2 - I_1 I_2 M_{12} = 0$$

para hallar el valor de M sumamos y restamos el término $i_1 i_2 \sqrt{L_1 L_2}$ al primer miembro de la ecuación anterior, lo cual nos genera un cuadrado perfecto:

$$\left[\sqrt{\frac{L_1}{2}} i_1 - \sqrt{\frac{L_1}{2}} i_2 \right]^2 + i_1 i_2 \left(\sqrt{L_1 L_2} - M \right) = 0 \Big)$$

El término elevado al cuadrado nunca puede ser negativo, pero puede ser cero, por lo que $w(t) \geq 0$ solo si

$$\sqrt{L_1 L_2} \geq M$$

O, lo que es lo mismo,

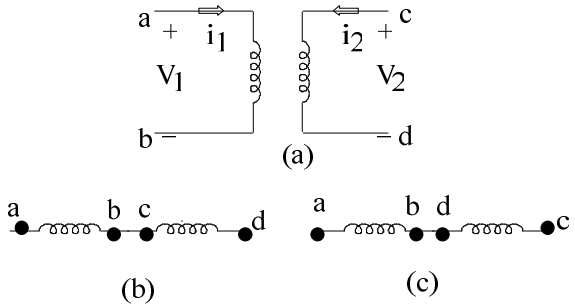
$$M = k\sqrt{L_1 L_2} \qquad (0 \leq k \leq 1)$$

Denominándose a k **coeficiente de acoplamiento**.

Ejercicios de aplicación:
Un par de inductancias acopladas tiene, para los sentidos de referencia indicados en la figura (a), la siguiente matriz inductancia:

$$L = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$

Hallar la inductancia equivalente para las conexiones mostradas en las figuras (b) y (c).



<u>Rta</u>: *b) L = 4* *c) L = 16*

6.6 Modelos de señal y caracterización de las mismas.

Habitualmente se utiliza el término **señal** para designar una tensión v(t) o una corriente i(t) que interesa en un circuito físico y, en la misma forma en que existe un modelo matemático para el circuito físico que se esta estudiando, existen modelos matemáticos para las señales (tensiones y corrientes) en dicho circuito. La <u>señal de entrada</u> a cualquier sistema es una "fuerza" a la cual el sistema puede responder. En un circuito o sistema eléctrico, esta "fuerza" será una tensión o una corriente. La <u>señal de salida</u> es la respuesta del circuito a la señal de entrada. Podrá ser similar a la entrada o completamente diferente, por ejemplo, la señal de entrada podrá ser una tensión y la señal de salida una velocidad (caso de un motor).
Una señal es generalmente una función del tiempo. Podrá haber señales simples y muy conocidas, tales como senoides o exponenciales, o algunas muy complicadas y casi desconocidas, como la voz humana o un ruido aleatorio. En cualquier caso, es necesario ser capaz de representarla matemáticamente.

Podemos desarrollar la idea de señales tipo, o de prueba, siendo interesante calcular la respuesta de los circuitos a las mismas. A pesar de que una señal tipo raramente existe como señal real, la respuesta a la misma nos dirá lo suficiente acerca del sistema como para comenzar a entenderlo y, por consiguiente, poder modelizarlo correctamente. Dicha señal debe ser simple e informativa, en el sentido de que tipifica a las señales que existen en el sistema real. Una importante propiedad de las redes es que la respuesta a determinada señal, una vez hallada, puede usarse para encontrar la respuesta a otra, como ocurre con la función impulso y la respuesta a la misma.

Como ejemplo de lo antes mencionado analicemos el modelo de circuito de la fig. 16(a), compuesto por una fuente de señal de valor E_0, un interruptor (o llave) “S” y una resistencia R. Al cerrar el interruptor en el instante t_o, la tensión $v_1(t)$ idealmente toma la forma mostrada en la fig. 16(b). Matemáticamente, $v_1(t)$ es una función con valor 0 para $t < t_o$, y con valor E_o para $t > t_o$, pero indefinida para $t = t_o$.

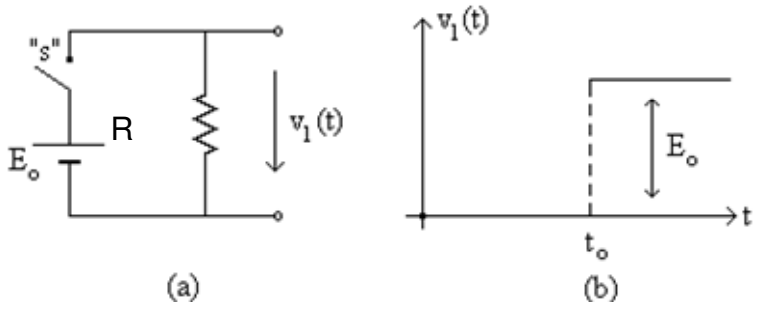


Fig. 16

Físicamente es una onda visible en un ORC. Si observamos las curvas reales, vemos que el "escalón" no es instantáneo, sino que el extremo superior es redondeado y el inferior no es un ángulo recto. Es decir, la figura 16 muestra una idealización de lo que ocurre en la realidad, donde observamos que se requiere un cierto tiempo para llegar de 0 a V_o, como se muestra en la fig. 17. Este tiempo de crecimiento t_r tiene dos características importantes: no es definible en forma precisa, y cambia de uno a otro dispositivo. En consecuencia, podemos definir arbitrariamente a t_r como el tiempo que la magnitud tarda en llegar desde el 5 o 10 % al 90 % o 95 % de su valor final.

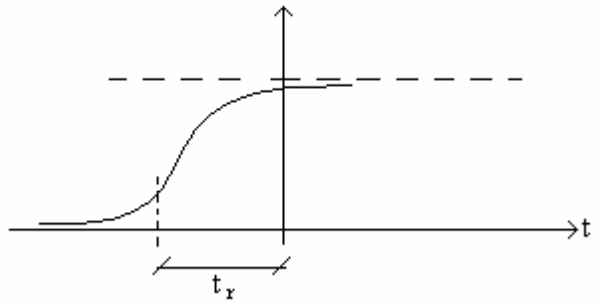


Fig. 17

Es importante reconocer que cualquier representación cuantitativa de una señal real es necesariamente una aproximación, dado que la variación real de su amplitud en el tiempo es sumamente compleja. Si la forma de onda es simple (senoidal, exponencial), la aproximación será buena, pero, en casos mas generales, la aproximación llevará implícito un error.

6.6.1 Excitación continua y similar.

Estudiaremos dos funciones, el **pulso** y el **escalón**, las cuales son muy útiles dado que numerosas funciones excitación pueden representarse a través de ellas. Quizás el escalón sea la más conocida, dado que se la ha estudiado en la literatura sobre Teoría de Circuitos desde hace largo tiempo, habiendo sido introducida por Heaviside (1850-1925) a fines del siglo XIX.

a) Escalón unitario. Interpretación física. Expresión matemática.

Como ejemplo para una función escalón consideremos el circuito físico mostrado en la fig. 18 (a), donde se supone que una red pasiva se conecta a una fuente de valor constante E volts (una batería) mediante el cierre del interruptor S en un instante de tiempo t, y cuyo modelo con una fuente genérica e(t) se muestra en la fig. 18 (b).

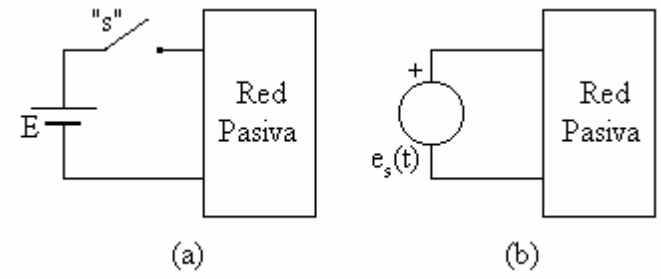


Fig. 18

Si nuestro interés se centra en el estudio de la respuesta mucho tiempo después del cierre del interruptor, la función excitación puede considerarse una tensión constante de valor E. Sin embargo, si queremos ver qué ocurre inmediatamente luego de cerrar la llave, obviamente no es correcto ver la excitación como una constante, dado que la característica sobresaliente de la misma es la discontinuidad que presenta en el instante de la conmutación Es decir, el cambio súbito en la excitación desde un valor cero antes de la conmutación a un valor no-cero luego de la misma (como se muestra en la fig. 18) caracterizará la naturaleza de la respuesta del circuito en ese instante.
Nuestro objetivo es obtener una caracterización de la naturaleza discontinua de la excitación en el instante $t = t_0$, es decir, lograr que la función $e_s(t)$ de la figura 18 (b) represente a la descripta gráficamente en la fig. 19.

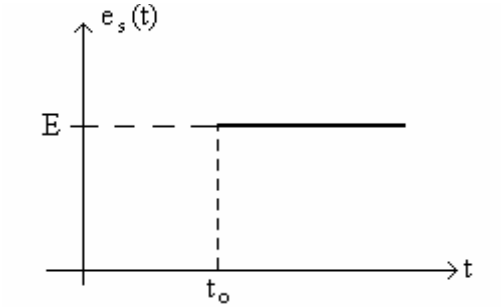


Fig. 19

Hasta el momento, la razón por la cual necesitamos presentar a $e_s(t)$ gráficamente es porque no tenemos una función matemática analítica que indique dicho salto, dado que las funciones que "saltan" no son analíticas. Heaviside solucionó el problema inventando una función que representa por definición a dicho salto. Normalizando el valor E en 1 V, y el tiempo en que se produce la discontinuidad t_o en 0 seg. , llamó a la función **escalón unitario**, y lo indicó con el símbolo $\mu(t)$.

$$\mu(t) = \begin{cases} 1 & \forall t > 0 \\ 0 & \forall t < 0 \end{cases}$$

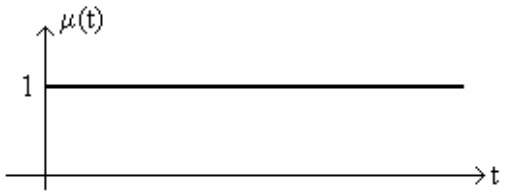


Fig. 20 (a)

Esta función tiene un valor cero para todo tiempo **t** menor que cero, y un valor uno para todo tiempo **t** mayor que cero. Hay un cambio abrupto, o discontinuidad, en t = 0, es decir, cuando el argumento de la función cambia de negativo a positivo. Más adelante veremos que otra utilidad fundamental de esta función es interpretar simplemente la derivada de una función en un punto de discontinuidad.

Un escalón que esté desplazado en el tiempo, tal como se muestra en la fig. 20(b), se representa por la función escalón unitario desplazada $\mu(t - t_o)$:

$$\mu(t - t_o) = \begin{cases} 1 & t - t_o > 0 \quad o\ sea\ \ t > t_o \\ 0 & t - t_o < 0 \quad o\ sea\ \ t < t_o \end{cases}$$

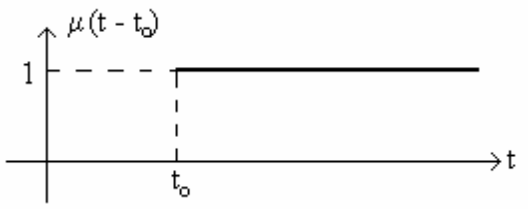


Fig. 20 (b)

Vemos así que el escalón unitario desplazado $\mu(t-t_o)$ tiene un valor igual a 0 mientras su argumento $(t-t_o)$ es menor que cero, y un valor uno siempre que su argumento es mayor que cero.
Así, la función definida como:

$$v(t) = \begin{cases} 0 & t < t_o \\ V_o & t > t_o \end{cases}$$

expresada en función del escalón unitario resulta:

$$v(t) = V_o\, \mu(t - t_o)$$

pudiendo observarse nuevamente que el escalón aparece donde el argumento es cero (punto de discontinuidad).

Una sucesión de escalones unitarios puede usarse para representar matemáticamente una gran variedad de funciones, como veremos a continuación.

b) Función pulso unitario.

Un pulso cuadrado de altura unitaria y ancho T, como el de la fig. 21 (a), puede representarse por los escalones unitarios de la fig. 21 (b).

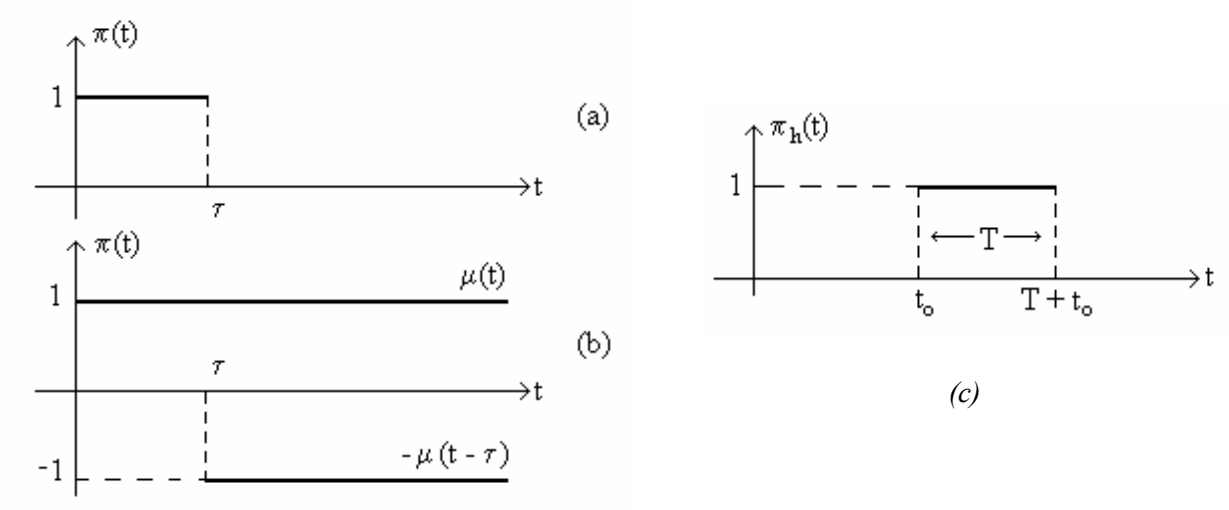


Fig. 21

Simbólicamente, podemos escribir:

$$\pi(t) = \mu(t) - \mu(t - T)$$

El pulso desplazado mostrado en la fig. 21 (c) puede expresarse como:

$$\pi_h(t) = \pi(t - t_o) = \mu(t - t_o) - \mu(t - t_o - T)$$

Ejemplo 1:

La tensión en bornes de una inductancia de valor L H está dada por:

$$v(t) = \begin{cases} 0\ Volt & t < 0\ s \\ V_o\ Volts & t \geq 0\ s \end{cases}$$

Se desea obtener la evolución de $\mathbf{i_L(t)}$ en función del escalón unitario, respetando la convención de signos pasiva.

Solución: Escribimos **v(t)** en función del escalón unitario: $v(t) = V_0\, \mu(t)$ y luego, aplicando la relación V-A: $v_L(t) = L\, di / dt$ obtenemos i(t):

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t} v_L(\tau)\, d\tau = \frac{V_o}{L} \int_{0}^{t} \mu_o(\tau)\, d\tau = \frac{V_o}{L}\, t\ \ \mu_o(t) \quad A$$

Hemos obtenido así una nueva función denominada función **rampa**, que veremos más adelante.

Ejemplo 2:
Obtener la expresión temporal de la onda f(t) mostrada en la fig. 22 (a).

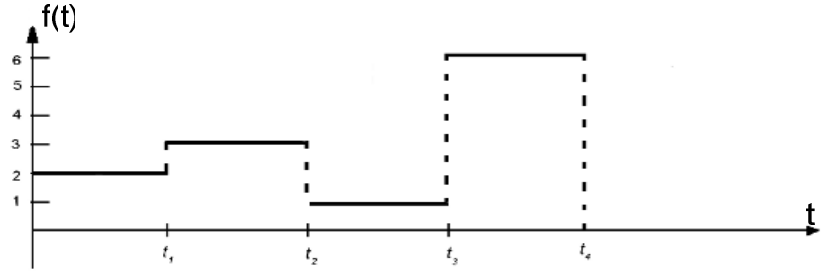


Fig. 22 (a)

Vemos que esta onda puede representarse por la serie de funciones escalón mostradas en la fig. 22(b).

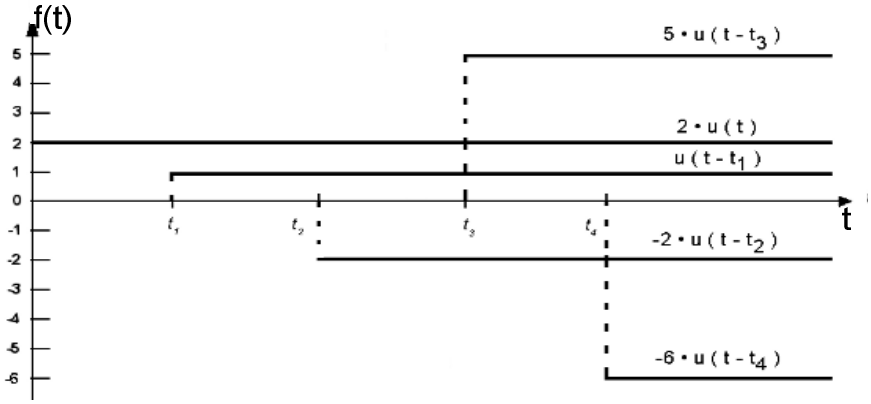


Fig. 22(b)

Con lo que podemos escribir la evolución temporal pedida:

$$f(t) = 2\,\mu(t) + \mu(t - t_1) - 2\,\mu(t - t_2) + 5\,\mu(t - t_3) - 6\,\mu(t - t_4)$$

Vemos así que la multiplicación por μ (t) obvia la necesidad de la definir una función en varias partes, constituyendo una notación más manejable.

Un ejemplo práctico de aplicación sería el siguiente: queremos transmitir información utilizando pulsos de distinta duración (código Morse). Para ello podemos operar la llave de la fig. 18(a) en distintos instantes de tiempo, conectando y desconectando la tensión $e_s(t)$, de manera de producir los pulsos deseados. Los pulsos de la fig. 23 (a), por ejemplo, representan la letra A en dicho código. Una vez más las subidas y bajadas están idealizadas, en la práctica (fig. 23 b) las esquinas están redondeadas y los tiempos de crecimiento y decaimiento no son cero.:

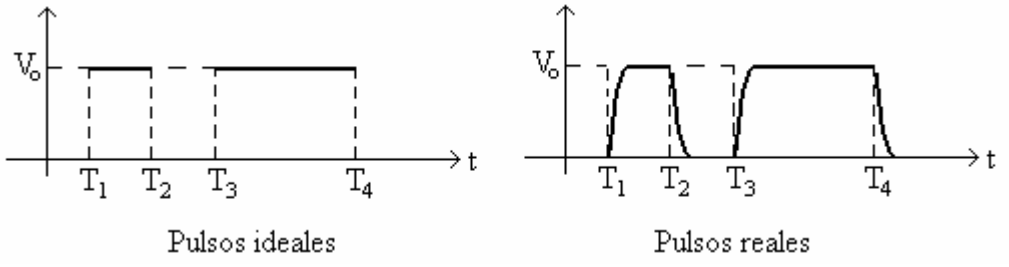
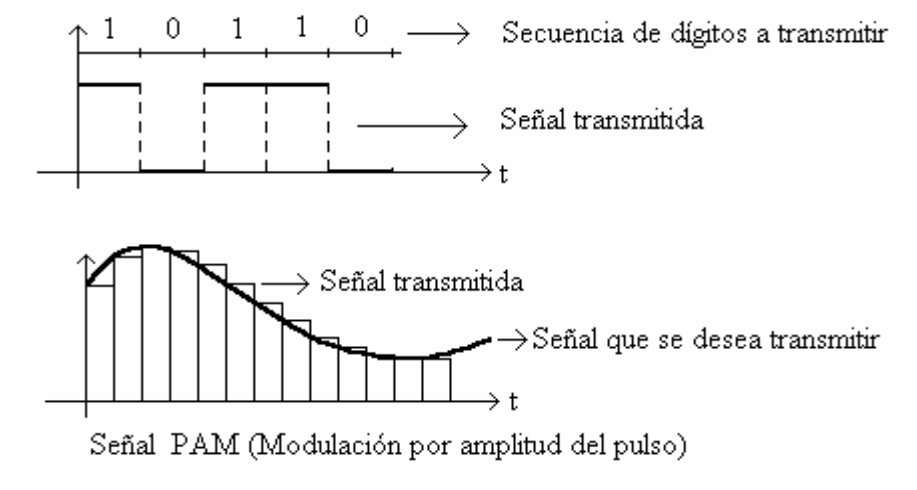


Fig. 23

En función del escalón unitario, esta señal resulta:

$$v(t) = V_o\,[\mu(t - T_1) - \mu(t - T_2) + \mu(t - T_3) - \mu(t - T_4)]$$

La posibilidad de transmisión de información por medio de un tren de pulsos es obvia. Pueden por ejemplo, ser de distintas alturas y duraciones para representar muestras de una onda más compleja que lleva información. O pueden ser idénticos en duración y tamaño, y su sola presencia o ausencia en tiempos predefinidos representar los dígitos 1 o 0 de un código binario. Una secuencia de dichos dígitos puede representar cualquier mensaje que se desee, constituyendo una forma muy práctica de transmisión. Ejemplos:

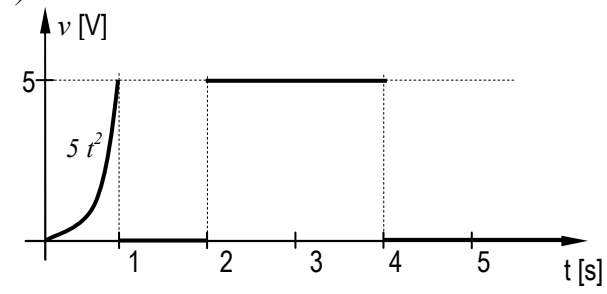


Señal PAM (Modulación por amplitud del pulso)

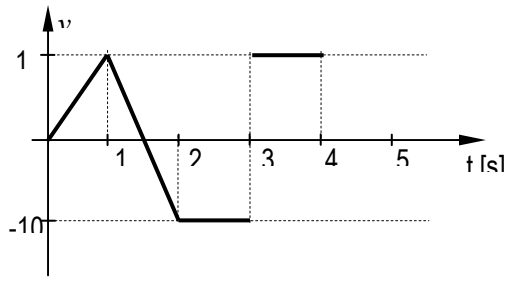
Ejercicio de aplicación:

Expresar las señales mostradas en función del escalón unitario.

a)



b)



Rtas: a) $v(t) = 10t.[\mu(t) - \mu(t-1)] + (30 - 20t).[\mu(t-1) - \mu(t-2)] + (-10).[\mu(t-2) - \mu(t-3)] + (10).[\mu(t-3) - \mu(t-4)]$

b) $v(t) = 5t^2\mu(t) - 5t^2\mu(t-1) + 5\mu(t-2) - 5\mu(t-4)$

6.6.2 Función rampa unitaria y función rampa parabólica

Dado que la función escalón unitario se puede utilizar para generar una amplia serie de funciones por integraciones sucesivas, se suele indicar al escalón con el subíndice 0 como $\mu_o(t)$. La función que obtuvimos en el último ejemplo integrando el escalón unitario se denomina **rampa unitaria** y se designa mediante $\mu_{-1}(t)$:

$$\mu_{-1}(t) = \int_{-\infty}^{t} \mu_o(\tau)\, d\tau$$

es decir:

$$\mu_{-1}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t > 0 \end{cases}$$

Si bien el escalón no esta definido en cero, en ese punto crece infinitamente rápido, desde 0 a +1, de forma que su integral tiene el valor anteriormente expresado.

Nótese que $\mu_o(t)$ es adimensional. La función obtenida por integración, llamada **rampa**, tiene dimensiones de tiempo, salvo que se modifique por la multiplicación por una constante adecuada. En efecto, la función obtenida a partir del escalón de tensión de la figura 2:

$$v(t) = V_o \frac{t}{T_o} \mu(t) = \int_0^t \frac{V_o}{T_o} \mu(\tau)\, d\tau$$

tiene forma de rampa y dimensiones de tensión.

Análogamente, la **rampa parabólica** se designa con $\mu_{-2}(t)$, y se obtiene integrando la rampa unitaria:

$$\mu_{-2}(t) = \int_{-\infty}^{t} \mu_{-1}(\tau)\, d\tau$$

la cual es igual a:

$$\mu_{-2} = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \dfrac{1}{2} t^2 & t > 0 \end{cases}$$

Estas funciones se ilustran en la figura 24:

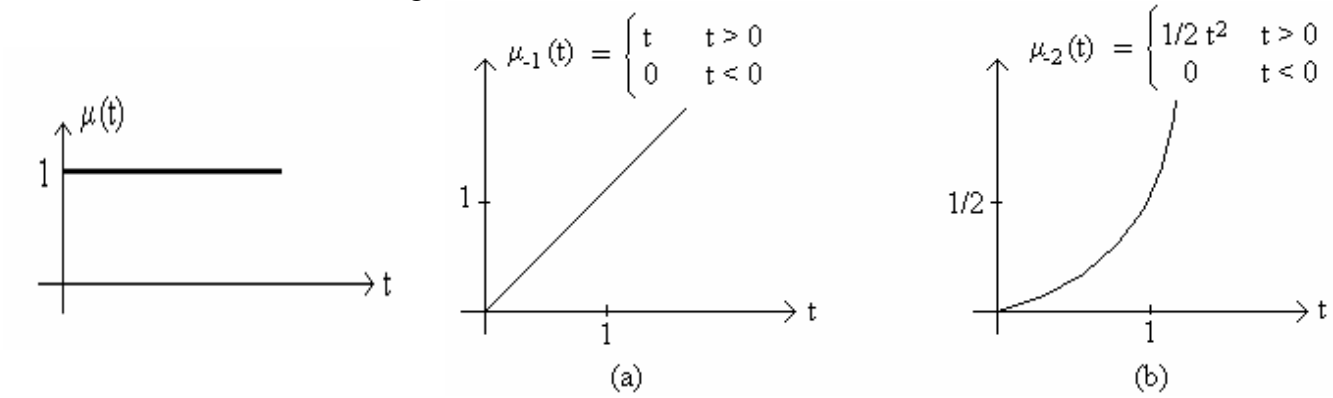
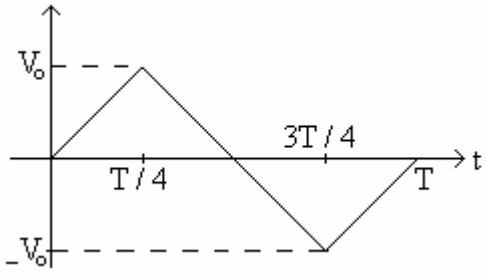


Fig. 24

Este proceso puede repetirse indefinidamente, y las funciones obtenidas pueden utilizarse para describir formas de onda más complicadas, como por ejemplo la de la figura siguiente.



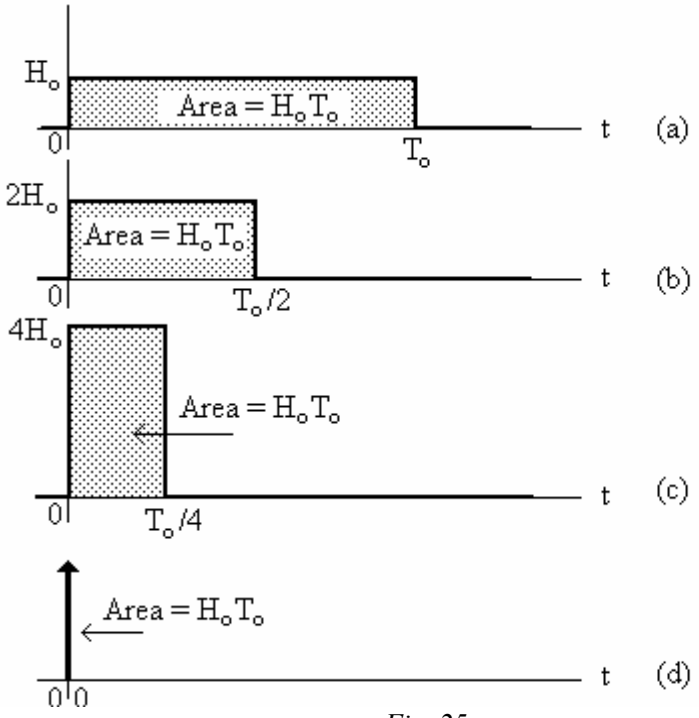
6.6.3 Función impulso unitario o delta de Dirac (δ).

a) Relación entre la función δ y la función escalón

Hemos definido la función pulso, que resulta ser una función simple, cuya característica puede resumirse diciendo que su escalón de encendido debe energizar el circuito, y su escalón de apagado debe desenergizarlo. La duración del pulso puede ser larga en comparación con la constante de tiempo del

circuito, o puede ser muy corta, caso que puede ser interesante en cuanto a que inyecta una magnitud (tensión o corriente) en el circuito pero desaparece antes de que puedan producirse muchas modificaciones en el mismo.

A fin de demostrar la relación existente entre la función escalón y el impulso, partiremos de un pulso de ancho (duración) conocida, tal como se muestra en la figura 25 a.
Supongamos ahora reducir a la mitad la duración del pulso, pero doblar su altura (figura 25 b). Esto lo hace más agudo, pero el área encerrada por el mismo se mantiene, pudiendo nosotros, de alguna manera, tomarla para representar el efecto del pulso. Repetimos varias veces la reducción del ancho del pulso, hasta que el mismo sea muy angosto y muy alto (figura 25 c).



Obtención de un impulso

Fig. 25

La representación matemática del caso extremo (Fig. 25d) en que la duración es infinitesimal y la altura aumenta sin límite nos conduce a una nueva función, a la que se denomina impulso unitario, cuya altura es infinita pero encierra un área igual a la unidad. Esta función también se denomina delta de Dirac, se indica en forma abreviada con la letra **δ,** y matemáticamente se define a partir del área que encierra:

$$\int_{t=0^-}^{t=0^+} \delta(t)\, dt = 1$$

siendo:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ & \\ 0 & t > 0 \end{cases}$$

Sus dimensiones son t^{-1}, de forma que el área sea adimensional. Es cero cuando su argumento no es cero, y su integral desde cualquier punto a la izquierda a cualquier punto a la derecha es unitaria.
Nota: Si vemos el impulso como un pulso de ancho cero y área unitaria, se deduce fácilmente que:

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ & \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

lo que no es mas que el escalón unitario.

En base a esto, podemos afirmar que **el impulso unitario es la derivada del escalón unitario**, lo cual formalmente podemos escribir como:

$$\mu_1(t) = \frac{d}{d\,t}\,\mu_o(t)$$

en forma similar a como concluimos que la **rampa unitaria es la derivada de la rampa parabólica**, y **el escalón unitario es la derivada de la rampa unitaria**

b) Función δ desplazada a una distancia t_o del origen.

Es la función δ(t) trasladada un tiempo t_o hacia la derecha, según se ve en la figura 26, y se la designa δ(t – t_o). Esta función es ≠ 0 sólo para t = t_o. En forma breve la definiremos como:

$$\delta(t - t_o) = 0 \qquad t \neq t_o$$

$$\int_0^{\infty} \delta(t - t_o)\,d\,t = 1 \qquad \int_{t0-}^{t0+} \delta(t - t_o)\,d\,t = 1$$

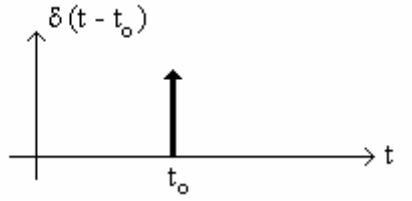


Fig. 26

c) Propiedades de la función δ

- *Producto por una constante*

Siendo k una constante, el valor de las áreas limitadas por las funciones k δ(t) y k δ(t – t_o) será:

$$k\,\delta(t) \Rightarrow \int_0^{\infty} k\,\delta(t)\,dt = k$$

$$k\,\delta(t - t_o) \Rightarrow \int_0^{\infty} k\,\delta(t - t_o)\,dt = k$$

- *Propiedad de muestreo*

Es una propiedad sumamente importante, y surge de hacer:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta\,(t - t_o)\,dt = f\,(t_o)$$

donde la función f(t) se supone continua en t_o, es decir, en el punto de aplicación del impulso. Esta ecuación muestra que el impulso borra todo valor de la función, "mostrando" solo el valor que f(t) toma en t = t_o, y su validez surge de recordar que δ(t – t_o) es siempre cero excepto en t = to.

Si muestreamos una función genérica f(t) con un impulso aplicado en cero y con un impulso aplicado en t = t_0 tendremos:

$$\int_0^{\infty} f(t)\,\delta(t)\,d\,t = f(0)$$

$$\int_0^{\infty} f(t)\,\delta(t - t_o)\,d\,t = f(t_o)$$

- *Paridad:* Recordando que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta(t)\,d\,t = f\,(0)$$

con f(t) continua, podemos demostrar que la función δ es una función par:

$$\delta(t_o - t) = \delta(t - t_o)$$

Ejercicio de aplicación:
Evaluar las siguientes funciones:

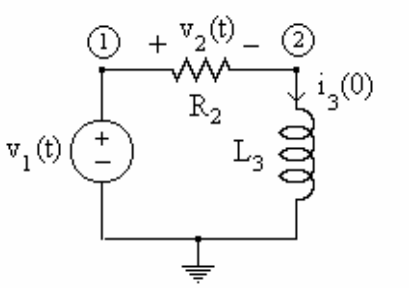
a) $\int_0^{\infty} [(t-1).\mu(t-1) - (t-2).\mu(t-2)].dt$

b) $\frac{d[\mu(t) - \mu(t-1)]}{dt}$

c) $\frac{d[e^{-\alpha t}\mu(t-\tau)]}{dt}$

Rtas: *a) ∞ b) δ(t) — δ(t—1) c)* $(-\alpha).e^{-\alpha t}\mu(t-\tau) + e^{-\alpha t}\delta(t-\tau)$

Aplicación: Consideremos el siguiente circuito:



Tal como vimos en el capítulo 3, podemos escribir el potencial φ_2 y la corriente i_3, pero lo hacemos en el dominio temporal:

$$\varphi_2 = L_3 \frac{d\,i_3}{d\,t} \quad y\ a\ d\ e\ m\ a\ s \quad i_3 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_2}$$

$$\Rightarrow \frac{d\,\varphi_2}{d\,t} = \frac{d\,\varphi_1}{d\,t} - \frac{R_2}{L_3}\varphi_2$$

Supongamos ahora que la entrada es el escalón unitario, es decir:

$$v_1(t) = \varphi_1(t) = \mu(t)$$

Así, la respuesta $\varphi_2(t)$ dependerá de la derivada del escalón, debiendo resolver la ecuación diferencial

$$\frac{d\,\varphi_2}{d\,t} = \frac{d\,\mu(t)}{d\,t} - \frac{R_2}{L_3}\varphi_2$$

La dificultad con esta expresión estriba en que μ(t) es una función **discontinua**, por lo que su derivada no existe de la manera ordinaria, viéndonos obligados a recurrir a la función impulso para resolver esta situación.
En consecuencia, analizaremos ahora el comportamiento de los capacitores e inductancias cuando en el circuito aparece la función escalón, por lo que la propiedad de continuidad no se cumple, es decir, la corriente por la bobina o la tensión en bornes del capacitor presenta una discontinuidad finita.

6.7 Comportamiento de capacitores e inductancias frente a excitaciones discontinuas

6.7.1 Análisis en un capacitor.

Supongamos que conectamos una fuente de tensión ideal en bornes de un capacitor lineal de 1 F, cuya forma de onda se muestra en la fig. 27 (c). Esta forma de onda contradice la exigencia impuesta al capacitor de que la tensión en sus bornes variara con continuidad, por lo que, en principio, sería una situación que no podríamos resolver.

Para comenzar el análisis, supondremos que la evolución de la fuente es la mostrada en la figura 27(b). A partir de la relación volt-ampere del capacitor, $i(t) = C\, dv / dt$, vemos que la corriente $i_c(t)$ es un pulso rectangular de altura $1/\Delta$ y ancho igual a Δ, como se muestra en la fig. 27 (c). Si ahora hacemos que el tiempo de subida de la rampa de la fuente Δ disminuya, el alto del pulso que representa la corriente aumenta. Es importante notar que el área de este pulso es 1, independientemente del valor de Δ.

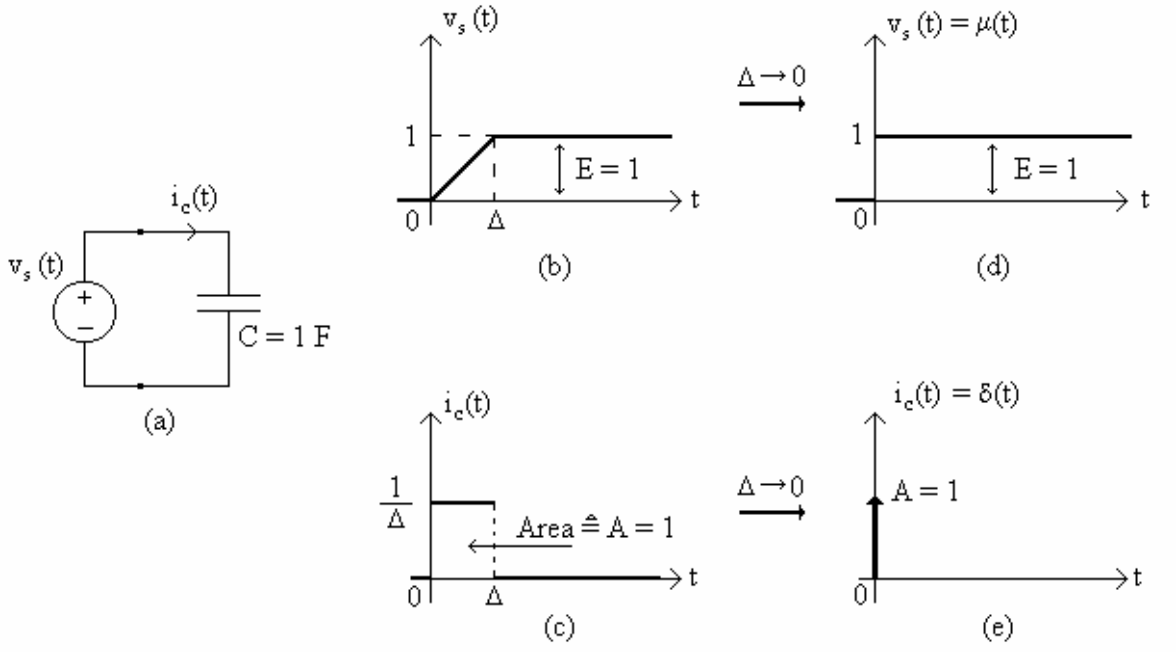


Fig. 27

En el límite, si hacemos que el tiempo de subida Δ de la rampa tienda a cero ($\Delta \to 0$), la evolución temporal de la fuente $v_s(t)$ tiende a la función discontinua escalón unitario, tal como se ve en la fig. 27 (d) y matemáticamente se indica a continuación:

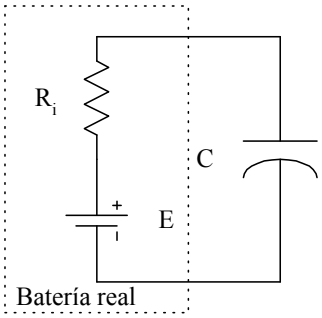
$$\lim_{\Delta \to 0} v_s(t) = \mu(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

La misma consideración ($\Delta \to 0$) aplicada a la corriente de la figura 13© nos conduce al impulso de corriente mostrado en la figura 27(e). En consecuencia, podemos decir que si la **tensión en bornes de un capacitor varía en forma discontinua (escalón), la corriente con que responde el capacitor no estará acotada, sino que será un impulso,** es decir:

$$\lim_{\Delta \to 0} i_c(t) = \infty \quad en\ t = 0$$

Si en el ejemplo anterior fueran E ≠ 1 V y C ≠ 1 F la discusión seguiría siendo válida, pues el área bajo el impulso cambiará de A = 1 a A = C x E. Esta situación se puede simular conectando una batería de E voltios en paralelo con un capacitor de C Faradios en el instante t = 0. La corriente resultante será, entonces, un impulso de área A = C x E amperes.

Nota: en la práctica sólo se notará un valor de corriente grande pero finito, dado que todas las baterías físicas tienen una resistencia interna no nula. A continuación vemos el modelo del circuito teniendo en cuenta la resistencia interna de la batería:



Si al mismo circuito de la fig. 27 lo alimentamos con un impulso de corriente de área A = 10 aplicada en t = 5 s (figura 28 a)

$$i_s(t) = A\ \delta(t - 5)$$

la respuesta en tensión será la mostrada en la fig. 28 (b):

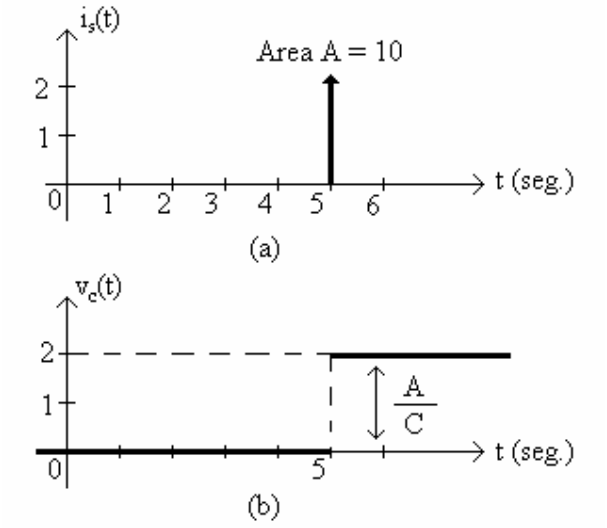


Fig. 28

Matemáticamente, sustituimos la expresión de $i_s(t)$ en la relación V-A del capacitor, y suponiendo que el capacitor se halla inicialmente descargado (v(0) = 0 V) y su capacidad es C = 5 F, tendremos que:

$$v_c(t) = \frac{1}{5}\int_0^t A\,\delta(\tau - 5)\,d\tau \qquad t \geq 0$$

Haciendo un cambio de variables $\lambda = \tau - 5$ será:

$$v_c(t) = \frac{A}{5}\int_{-5}^{t-5} \delta(\lambda)\,d\lambda = \frac{A}{5}[\,\mu(t - 5) - \mu(-5)\,]$$

$$v_c(t) = \frac{A}{5}\mu(t - 5) \qquad t \geq 0$$

$$v_c(t) = \begin{cases} 0 & t < 5 \\ 2 & t > 5 \end{cases}$$

es decir, posee una discontinuidad en t = 5 s., como se observa en la fig. 28 (b).

6.7.2 Análisis en una inductancia.

En el apartado anterior hemos considerado la situación de una fuente de tensión ideal conectada a una capacidad. Supongamos ahora que conectamos una fuente de corriente ideal en bornes de una inductancia, y queremos saber como es la evolución de la tensión en bornes de la misma. La respuesta surgirá a partir de la correspondiente relación volt-ampere, la cual plantea que la tensión es proporcional a la derivada de la corriente, siendo la autoinductancia del elemento la constante de proporcionalidad.

$$v_L = L\frac{d\,i(t)}{d\,t}$$

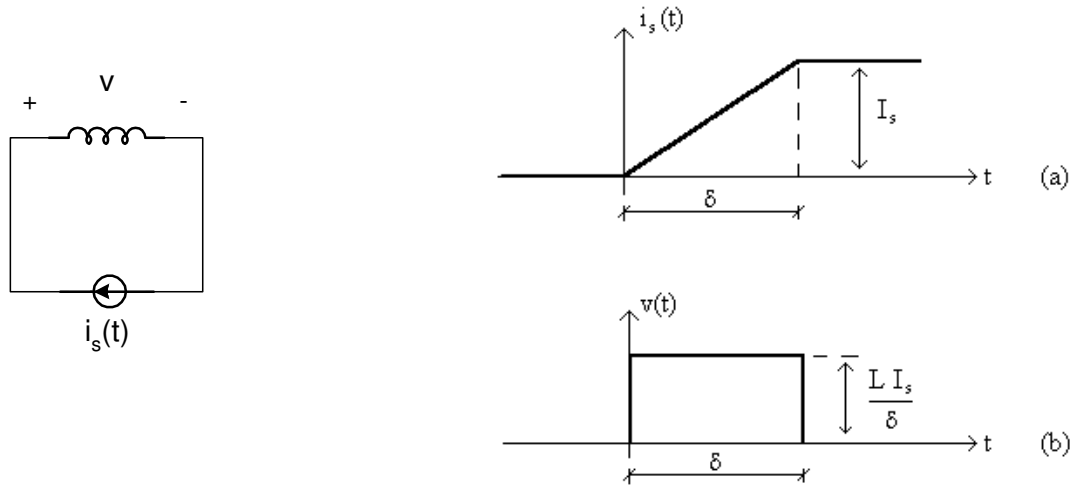


Fig. 29

Supongamos, primero, que la corriente is(t) que alimenta a la inductancia es una rampa, como la de la fig. 29 (a). Está claro que la tensión v(t) que aparece en bornes de la misma tiene la forma del pulso rectangular de la fig. 29 (b). Si la rampa is(t) tiene valor final Is y un tiempo de crecimiento δ, luego el pulso de tensión v(t) tiene una altura L Is/ δ y una duración δ. Esto surge por inspección de la geometría del circuito y la noción básica de que la derivada, en forma gráfica, es la pendiente de la curva que representa la función. La pendiente de la rampa lineal es una constante no nula durante el tiempo de crecimiento, y cero durante cualquier otro intervalo de tiempo. Notamos también que el área bajo el pulso rectangular v(t) es (altura).(duración) = (Lis/ δ) x δ = L Is, un valor independiente de δ. Por lo tanto, si ahora hacemos el límite cuando $\delta \to 0$, la corriente is(t) se aproxima a un escalón de valor Is y v(t) se aproxima a un impulso de valor L Is.

Para llegar a este resultado hemos supuesto que la corriente es la magnitud aplicada ("causa") y la tensión es la respuesta de la red ("efecto"). Matemáticamente, la relación volt-ampere determinada por la inductancia es cierta independientemente de qué valor, v o i, sea la causa y cuál el efecto. Podemos concluir, por lo tanto, que un impulso de tensión aplicado a una inductancia produce como respuesta un escalón de corriente. En las consideraciones anteriores, el impulso de tensión tiene el valor L I_s, y el escalón de corriente asociado tiene el valor I_s. Si ambos valores se multiplican por la misma constante, la relación entre tensión y corriente (o causa y efecto) permanece invariable. Tal operación es siempre posible en un sistema lineal, y por lo tanto podemos plantear que si un impulso unitario (considerado como una fuente) se aplica a una inductancia L, la respuesta es un escalón unitario de corriente de valor 1/L amperes.

Ahora tenemos dos resultados interesantes que podemos comparar. Un impulso unitario de corriente aplicado a una capacidad, instantáneamente ubica una carga de 1 Cb en la misma, y un impulso unitario de tensión aplicado a una inductancia crea instantáneamente una corriente finita en la misma. El paralelismo entre estos dos planteos puede completarse a través de consideraciones físicas. Si la inductancia se ve como una bobina, luego la tensión en sus bornes puede pensarse como la velocidad de cambio del flujo, o sea v(t) = n dΦ/dt , siendo n el número de vueltas en la bobina y Φ el flujo

enlazado. Dado que, por definición, L = n Φ/i, vemos que una corriente de valor 1/L corresponde a un flujo n Φ = 1. Podemos entonces decir que un impulso unitario de corriente aplicado a una capacidad ubica instantáneamente una carga de 1 Cb en la misma, y que un impulso unitario de tensión aplicado a una inductancia crea un flujo instantáneo de 1 Weber en la misma.

La introducción de una carga en la capacidad representa la adición súbita de una cantidad finita de energía al sistema del cual es parte la capacidad. Una carga de Q Cb en C Faradios representa una energía de Q^2 / 2C Joules, . Análogamente, la introducción de un flujo en una inductancia representa un agregado de energía a la red de valor $L\ I_L^2/2$.

En conclusión, un impulso unitario de corriente en una capacidad establece instantáneamente una carga de 1 Cb e inserta 1/2C joules de energía, mientras que un impulso unitario de tensión aplicado a una inductancia de L Henrios establece instantáneamente un flujo de 1 Wb (y una corriente de 1/L amperes), e inserta una energía de 1/2L Joules.

En resumen:
Existe una clase de señales elementales que poseen formas matemáticas simples pero que son discontinuas o tienen derivadas discontinuas. Debido a que estas señales no tienen derivadas finitas de todos los órdenes, se suelen denominar funciones singulares o singularidad. Dos de las más comunes son la función rampa unitaria y la función escalón unitario.

A pesar de que son idealizaciones matemáticas y no ocurren realmente en sistemas físicos, son muy útiles para realizar el análisis de los mismos. En primer lugar, sirven como buena aproximación a señales que surgen en los circuitos cuando se producen conmutaciones. En segundo lugar, sus formas matemáticas simples hacen posible realizar el análisis de un sistema, o de un circuito, más fácilmente que con señales complejas. Más aun, las señales complejas pueden representarse como la suma de estas señales elementales.

Por último, se pueden aproximar fácilmente en el laboratorio, lo cual permite determinar experimentalmente si un sistema se comporta o no como el análisis matemático dice que debería hacerlo.

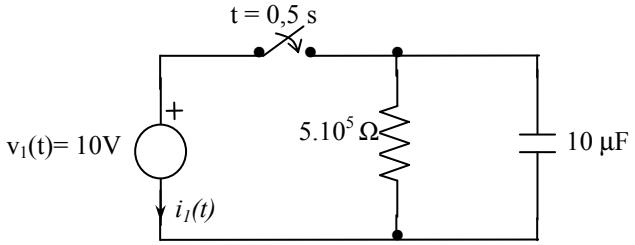
Ejercicios de aplicación

1) *a) La siguiente función representa la corriente a través de un capacitor de 1/3 F en función del tiempo:*

$$i(t) = 2.t^2[\mu(t) - \mu(t-1)] + 2[\mu(t-1) - \mu(t-2)] + (4-t)[\mu(t-2) - \mu(t-4)]$$

Se pide:
i) Obtener la gráfica de i(t).
ii) Calcular y expresar en función del escalón la d.d.p. en bornes del capacitor ∀ t, considerando v(t=0⁻) = 2V.
Rta*. ii)* $v_c(t) = (2t^3 + 2).[\mu(t) - \mu(t-1)] + (6t+2).[\mu(t-1) - \mu(t-2)] + (-1{,}5t^2 + 12t - 8)[\mu(t-2) - \mu(t-4)]$

2) *En el circuito de la figura, la llave se cierra en t = 0,5 s, habiendo permanecido abierta un largo tiempo. Hallar la expresión de* $i_1(t)$.



Rta: $i(t) = \left[-20.\mu(t-0,5) - 100.\delta(t-0,5)\right]\mu A$

3) *La siguiente es la tensión aplicada a una inductancia de valor L = 0,1 H. Determinar la corriente por la misma en función del tiempo, si i(-∞) =0, y graficarla.*

$$v_L(t) = e^{-2t}.[\mu(t) - \mu(t-2)]$$

4) Dadas las siguientes expresiones de fuentes de corriente o de tensión y los resultados que ellas producen en un elemento simple de circuito, deducir de qué tipo de elemento se trata y el valor en H, F u Ω que le corresponde.

Fuente de Corriente o Tensión	*Tensión o corriente producida*
$i_S(t) = 5.\mu_0(t)$ *A*	$10.\mu_{-1}(t)$ *V*
$i_S(t) = 5.\mu_{-1}(t)$ *A*	$3.\mu_0(t)$ *V*
$e_S(t) = 10.\mu_{-1}(t)$ *V*	$5.\mu_0(t)$ *A*
$i_S(t) = (3/2).\mu_0(t)$ *A*	$(9/4).\mu_0(t)$ *V*
$e_S(t) = (1/3).\mu_0(t)$ *V*	$3.\mu_{-1}(t)$ *A*

Rtas:

a) *C=1/2 F b)L=3/5 H c) C=1/2 F d) R=3/2 Ω e) L=1/9 H*

6.8 Caracterización de señales.

Hasta ahora hemos visto algunos métodos para representación de señales. Sin embargo, el método para representar una señal depende, en gran medida, del tipo de señal a ser considerada. Si bien existen numerosas clasificaciones de las señales, a continuación mencionaremos solo algunas que pueden resultarnos aplicables en nuestro curso. Las formas de onda a las que haremos referencia son las representadas en la fig. 30.

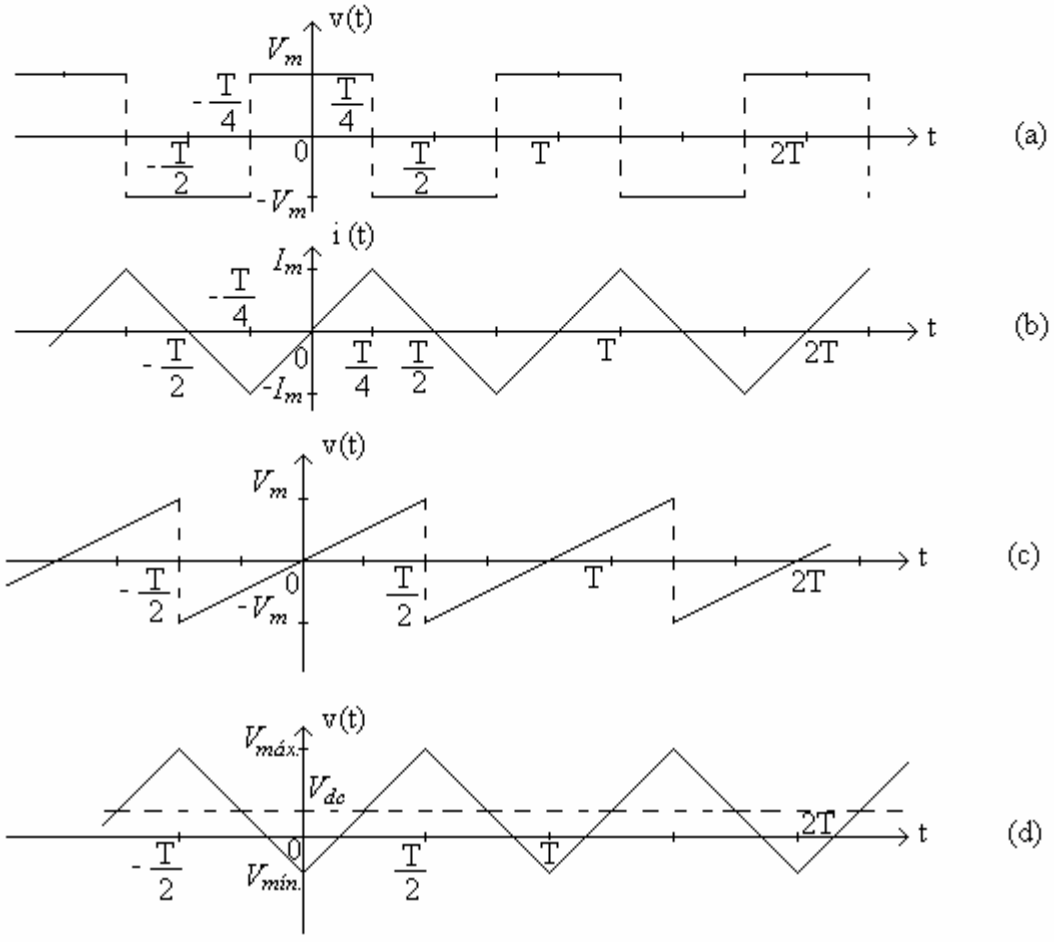


Fig 30

6.8.1Continuas - No continuas

Decimos que una señal es continua cuando no posee saltos bruscos (discontinuidades). Por ejemplo, en la fig. 30, las señales (b) y (d) son continuas en los intervalos de tiempo mostrados. Las señales (a) y (c) , en cambio, son discontinuas para mas de un instante de tiempo. En efecto, la señal (c) tiene una discontinuidad en instante t = T/2, y la señal (a) en el instante T/4.
Para introducir formalmente el concepto de continuidad, definimos el límite por izquierda y por derecha:

$$x(t_0^-) = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t<t_0}} x(t)$$

$$x(t_o^+) = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t>t_0}} x(t)$$

Los valores $x(t_o^+)$ y $x(t_o^-)$ son, respectivamente, los valores de x(t) un instante después y un instante antes de $t = t_o$. El concepto de continuidad puede, entonces, expresarse como sigue:

Una señal es **continua** en $t = t_o$ si y solo si: $x(t_o^+) = x(t_o) = x(t_o^-)$

Una señal que no es continua en $t = t_o$ se dice que es discontinua en dicho punto.

6.8.2 Periódicas - No periódicas:

Una señal periódica es aquella que repite la secuencia de valores exactamente luego de un tiempo fijo conocido como **período**, T. Mas precisamente, una señal x(t) es periódica si y solo si existe T > 0 tal que, para todo t:

$$x(t + T) = x(t)$$

El menor valor de T que verifica esto se llama período, y define la duración de un ciclo completo. La frecuencia fundamenta; de una señal periódica es:

$$f = 1 / T$$

Una señal no periódica, o aperiódica, es aquella para la que no existe t, y constituye una clase muy importante de señales.

Todas las señales de la fig. 30 son periódicas. Otro ejemplo de una señal periódica es la función $\cos(\omega t + \theta)$ la cual es periódica de período $T = 2\pi/\omega$. En la práctica, ejemplos de señales periódicas son las secuencias de pulsos rectangulares usadas en radar, y la onda diente de sierra usada como base de tiempo en los osciloscopios. En casi todos los casos es posible escribir una expresión matemática explícita para la señal periódica involucrada.
Señales no periódicas típicas son las formas de onda de la voz, los transitorios debidos a conmutación, y las señales aleatorias debidas a perturbaciones impredecibles de cualquier índole. A veces será posible escribir expresiones matemáticas explícitas para señales no periódicas, y otras veces no.

Otra clase de señales representan el caso límite entre señales periódicas y no periódicas. Estas señales cuasi-periódicas son realmente la suma de dos o más señales periódicas con períodos no con-mensurables. La señal resultante es no periódica, dado que no existe T que satisfaga la ecuación antes vista, pero tienen muchas de las propiedades de las señales periódicas, y pueden representarse por un numero finito de señales periódicas. Estas señales surgen en el análisis de distintos tipos de sistemas de comunicaciones.

6.8.3 Aleatorias - no aleatorias

Para esta clasificación plantearemos que una señal aleatoria es aquella de la que se tiene cierto grado de incertidumbre antes de que ocurra. En general se refiere a señales que son aleatorias en el sentido que su magnitud varia en forma errática e impredecible. Por ejemplo, la salida de un receptor de radio respondiendo a perturbaciones atmosféricas, fuentes de ruido interno, etc.
Si los valores futuros de la señal no pueden predecirse aún luego de observar los valores pasados, luego no es posible explicitar una expresión matemática para la señal.

Una señal no aleatoria es aquella respecto de la cual no hay incertidumbre antes de que ocurra, y para la cual puede escribirse una expresión matemática explícita.

6.9 Ortogonalidad de señales

La ortogonalidad de señales es una generalización del concepto de vectores ortogonales, el cual es, a su vez, una generalización de la definición de líneas perpendiculares.

Por definición, se dice que dos señales reales $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son **ortogonales** en un intervalo t_o a t_o+T si y solo si

$$\int_{t_o}^{t_o+T} x_1(t)\, x_2(t)\, dt = 0$$

Operando con funciones senoidales, arribamos a los siguientes resultados:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{t/2} \cos\omega_1 t \; sen\, \omega_2 t \; dt = 0 \quad \forall\, \omega_1 \, y \, \omega_2$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos\omega_1 t \cos\omega_2 t \; dt = \begin{cases} 0 & \omega_1 \neq \pm\omega_2 \\ 1 & \omega_1 = \omega_2 = 0 \\ 1/2 & \omega_1 = \pm\omega_2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} sen\, \omega_1 t \; sen\, \omega_2 t \; dt = \begin{cases} 0 & \omega_1 \neq \pm\, \omega_2 \\ 0 & \omega_1 = \omega_2 = 0 \\ 1/2 & \omega_1 = \omega_2 \neq 0 \\ -1/2 & \omega_1 = -\, \omega_2 \neq 0 \end{cases}$$

que nos permiten obtener las siguientes conclusiones:

1) *En el intervalo infinito, los senos y los cosenos son ortogonales entre sí, ya sea que tengan iguales o diferentes frecuencias. Si ambos tienen la misma frecuencia no nula, los senos y los cosenos deben tener el mismo desfasaje. Si ambos tiene frecuencia cero, el desfasaje de una debe ser tal que dicha sinusoide tenga valor cero.*

2) *Los cosenos son ortogonales a los cosenos de distintas frecuencias.*

3) *Los senos son ortogonales a los senos de distintas frecuencias.*

6.10 Valores característicos de las señales

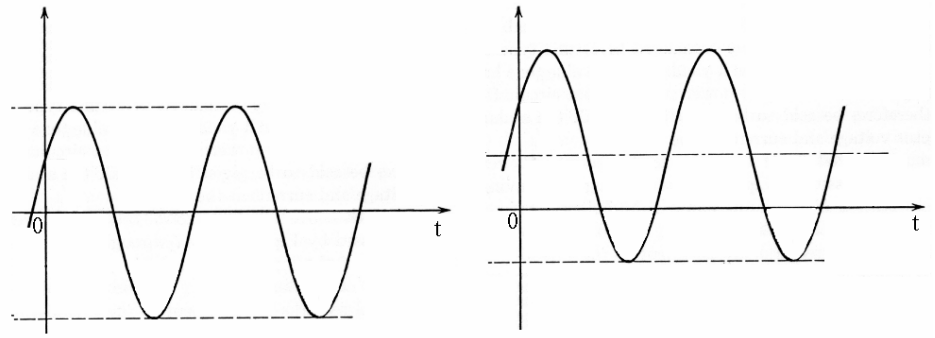
6.10.1 Valor medio o componente de continua

Se denomina *valor medio o componente de continua* de una señal en el intervalo t_o a t_o+T al definido por la siguiente expresión:

$$X_{cc} = \frac{1}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} x(t)\, d\, t$$

Para una señal periódica de período T, el valor medio en el intervalo de tiempo infinito es igual al valor medio en cualquier período.

Vemos que en esta expresión, si el área total entre x(t) y el eje t es cero (el área por sobre el eje es positiva, el área abajo del eje es negativa), la $X_{cc} = 0$. Luego, *la componente de continua de una función seno o coseno es cero*, así como las de las señales a, b y c anteriormente vistas (fig. 16). En la fig. 16(d) se muestra una onda periódica con componente de continua no nula, que esta representada por la línea de puntos.



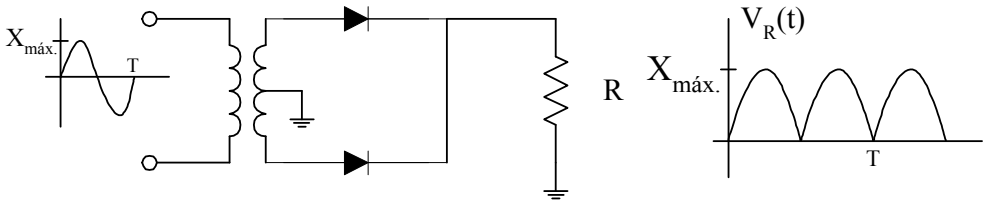
señal senoidal con $X_{cc} = 0$ señal senoidal con $X_{cc} \neq 0$

6.10.2 Valor medio de módulo

El valor medio de módulo de una señal en el intervalo t_o a t_o + T se define como:

$$X_{med\,\mathrm{mod}} = \frac{1}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} |x(t)|\, d\, t$$

Para una señal con período T, el valor medio de módulo en el intervalo infinito es igual al calculado en cualquier período. Físicamente, correspondería al valor de tensión medido en bornes de la resistencia de carga R del circuito rectificador de onda completa mostrado en la figura siguiente:



obtenido como sigue:

$$X_{med.mód.} = \frac{2\,X_{máx.}}{T} \int_{0}^{T/2} sen\,\omega t\, dt = \frac{2}{T}\,\frac{X_{máx.}}{\omega}\,(\,1 - \cos\frac{\omega T}{2}\,) = \frac{2\,X_{máx.}}{\pi}$$

6.10.3 Valor eficaz (RMS)

El valor eficaz de una señal se define como:

$$X = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_o}^{t_o+T} x^2(t)\, d\, t}$$

y también se denomina valor cuadrático medio o valor RMS (Root Mean Square).

Se lo determina a partir de la potencia media entregada a una carga resistiva. En efecto, suponiendo la circulación de una corriente arbitraria i(t) por una resistencia R, la potencia media absorbida por la misma en el intervalo t_o a t_{o+T} es, según vimos en el capitulo 1:

$$P = \frac{1}{T}\int_{t_o}^{t_o+T} p(t)\, d\, t = \frac{1}{T}\int_{t_o}^{t_o+T} Ri^2(t)\, dt = R\frac{1}{T}\int_{t_o}^{t_o+T} i^2(t)\, d$$

Al promedio de la integral del valor instantáneo cuadrático de la corriente se lo denomina valor eficaz al cuadrado I^2 de la corriente i(t):

$$I^2 = \frac{1}{T}\int_{t_o}^{t_o+T} i^2(t)\, dt$$

de donde vemos que la potencia toma la forma:

$$P = I^2 R$$

Vemos que si ahora hacemos circular por la resistencia una corriente continua de valor numéricamente igual al valor eficaz de la corriente variable en el tiempo, la potencia disipada en ambos casos será la misma.

Un desarrollo similar nos conduce a:

$$V^2 = \frac{1}{T}\int_{t_o}^{t_o+T} v^2(t)\, dt \quad \Rightarrow \quad P = \frac{V^2}{R}$$

Nota: Para una señal periódica, el valor eficaz en el intervalo infinito iguala al calculado en un período.

Se pueden sumar los valores eficaces?

El concepto visto anteriormente sobre ortogonalidad nos permitirá resolver una importante cuestión: ¿se pueden sumar los valores eficaces de las tensiones y las corrientes? Para averiguarlo, consideremos la tensión v(t) definida, para todo t, como sigue:

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) + ... + v_N(t) = \sum_{n=1}^{N} v_n(t)$$

El valor eficaz de la tensión v(t) es, aplicando la definición:

$$V_{ef}^2 = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} v^2(t)\, dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left[\sum_{n=1}^{N} v_n(t)\right]^2 dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left[\sum_{n=1}^{N} v_n(t)\right]\left[\sum_{m=1}^{N} v_m(t)\right] dt$$

$$= \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} v_n(t)\, v_m(t)\, dt$$

En general no será posible hacer simplificaciones, pero, para el caso especial de *señales ortogonales*, las integrales de la ecuación anterior son cero para $n \neq m$ dado que son senos o cosenos de distinta frecuencia, de manera que la ecuación anterior resulta ser:

$$V_{ef}^2 = \sum_{n=1}^{N} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} v_n^2(t) = \sum_{n=1}^{N} V_{ef_n}^2$$

lo que nos permite llegar a las siguientes conclusiones **:**

- **Para *señales ortogonales* , el valor eficaz total es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los valores eficaces:**

$$V_{ef} = \sqrt{\sum_{n=1}^{N} V_{ef_n}^2}$$

- **Para sinusoides de diferentes frecuencias, ($\omega_n \neq 0$), con amplitudes V_{mn}, la ecuación anterior toma la forma:**

$$V_{ef} = \sqrt{\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2} V_{m_n}^2}$$

En síntesis: Los valores eficaces NO se suman

Nota: Las conclusiones obtenidas nos serán de suma utilidad en el estudio de circuitos que operan en régimen permanente no senoidal, tema que veremos en el capítulo 13 de la materia.

6.10.4 Factor de amplitud

Se define como la relación entre el valor máximo y el valor eficaz de una magnitud.

$$k_a = \frac{V_{max}}{V_{eficaz}}$$

6.10.5 Factor de forma

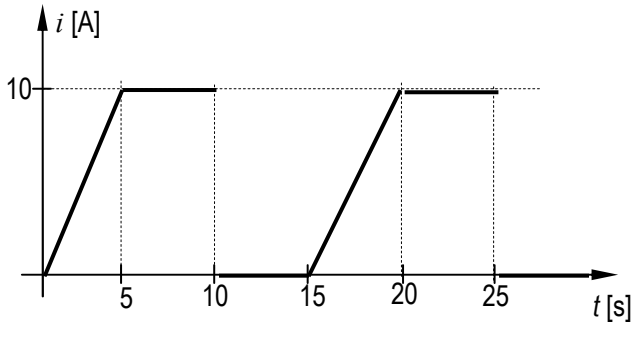
Se define como la relación entre el valor eficaz y el valor medio de una magnitud. En el caso de ondas senoidales, su valor es 1,11, y, dado que el valor medio de las mismas es cero, se calcula tomando el valor medio de módulo.

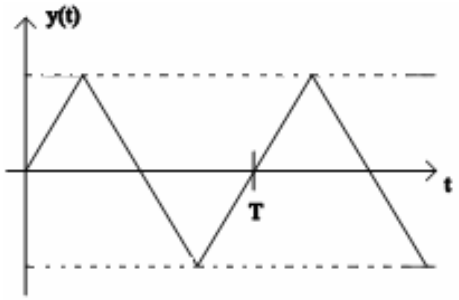
$$k_f = \frac{V_{eficaz}}{V_{medio}}$$

Ejercicio de aplicación

Dadas las siguientes funciones del tiempo determinar:

- *factor de forma y factor de amplitud.*
- *Sus amplitudes para que todas disipen igual potencia sobre una resistencia de valor R=5Ω.*





6.11 Señales exponenciales y senoidales.

Las señales exponenciales (tensiones o corrientes) de la forma:

$$v(t) = V_o\, e^{s\,t} \qquad o \qquad i(t) = I_o\, e^{s\,t}$$

son de particular interés en la teoría de circuitos, pudiéndose encontrar tres casos, según como sea el exponente:

a) $s = \sigma$ con σ constante real
b) $s = j\,\omega$ constante imaginaria
c) $s = \sigma + j\,\omega$ constante compleja con parte real e imaginaria

Si s es real ($s = \sigma$) la señal tendrá alguna de las formas mostradas en la figura siguiente:

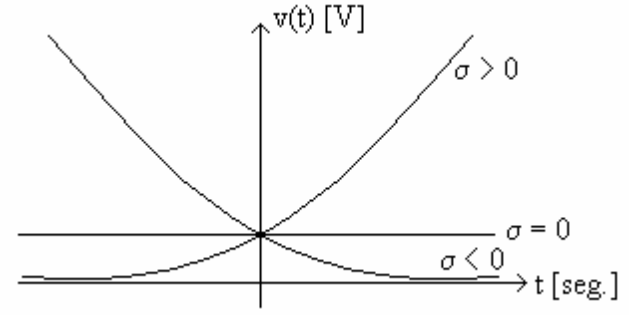


Fig. 31

6.11.1 La exponencial decreciente (con $\sigma < 0$)

Más adelante, en el capítulo de Análisis de circuitos en régimen transitorio, veremos que la respuesta natural (es decir, en ausencia de excitación) de un circuito RC o RL sigue una ley exponencial decreciente, que podemos escribir como:

$$v(t) = V_o\, e^{-t/\tau}$$

donde τ se denomina constante de tiempo del circuito. Esta señal exponencial real puede representarse como una serie de potencias alrededor de t = 0:

$$v(t) = V_o \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{-t}{\tau}\right)^n$$

En las proximidades de t = 0, la señal puede aproximarse considerando solo los dos primeros sumandos de su desarrollo en serie de potencias, con lo que llegamos a que:

$$v(t) = V_o\left(1 - \frac{t}{\tau}\right) \qquad |t| \ll \tau$$

Esta expresión es la ecuación de una recta que aproximará linealmente a la función en las proximidades de t = 0. Vemos que la misma intercepta al eje vertical en V_o y al eje horizontal en $t = \tau$.

El valor de la exponencial en el instante $n\tau$ es:

$$v(n\tau) = e^{-n} V_o \qquad para \;\; n = 1, 2, \ldots$$

Luego, deducimos que estas señales decaen a 0,368 (= 1/e) de su valor original en una intervalo de tiempo igual a una constante de tiempo (τ), y al 0,0067 ($=1/e^5$) de su valor inicial luego de cinco constantes de tiempo (5τ). Por esta razón decimos que una señal decreciente exponencialmente es despreciable comparada con su valor original, luego de transcurrido un tiempo igual a $5\,\tau$.

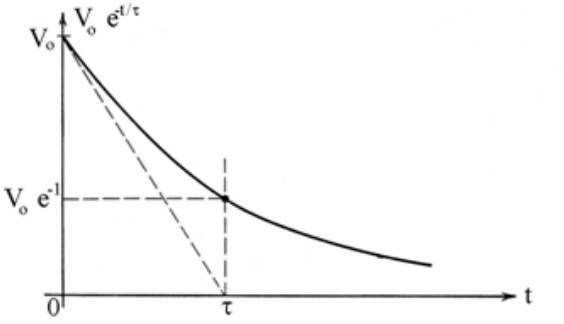
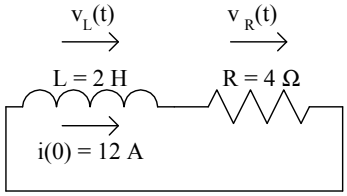


Fig. 32

Más adelante veremos que la constante de tiempo de un circuito nos dice cuán rápidamente se modifican la corriente o la tensión asociadas a una perturbación acontecida en el circuito.

Ejemplo de aplicación:
Una inductancia de 2 H con una corriente inicial de 12 A y una resistencia de 4 Ω se conectan en serie tal como se muestra en la figura y se dejan evolucionar libremente,



con lo que la corriente a través de los mismos resulta ser:

$$i(t) = 12\, e^{-2t}\ A \quad t \geq 0$$

Hallar $v_L(t)$ y $v_R(t)$ para t>0. Cuál es la constante de tiempo para las tensiones y la corriente?

Solución: De acuerdo a la relación volt-ampere, la tensión en la inductancia es:

$$v_L = L\, di/dt = -48\, e^{-2t}\ V$$

y la tensión en la resistencia es:

$$v_R(t) = i(t) \cdot R = 48\, e^{-2t} \qquad t > 0$$

Se denomina constante de tiempo a la inversa del exponente de e, la cual, como solo depende de los parámetros pasivos del circuito será la misma para todas las tensiones y la corriente y resulta ser gual a:

$$\tau = 1/2\ s = 500\ ms$$

6.11.2 La exponencial con exponente imaginario puro

Las tensiones y corrientes que varían senoidalmente en el tiempo (es decir, son funciones seno o coseno), revisten gran importancia en la ingeniería eléctrica por diversos motivos:

1) La respuesta natural de los circuitos puede tener términos senoidales.
2) Casi la totalidad de la potencia se genera con forma de onda senoidal.
3) Los circuitos lineales con fuentes senoidales se analizan fácilmente mediante el método simbólico.
4) Los circuitos lineales con fuentes no senoidales se analizan mediante la descomposición por Fourier de las fuentes en una suma de fuentes senoidales de distinta frecuencia, o mediante una transformación de Fourier.

La exponencial con exponente imaginario (s = j ω) se puede expresar mediante una serie de potencias:

$$e^{j\omega t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (j\omega t)^n$$

Dado que en los circuitos físicos no puede haber señales complejas, debemos expresarla en forma de senos y cosenos trigonométricos, es decir haciendo uso de la identidad de Euler:

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j\, sen\ \omega t$$

Esta identidad es de fundamental importancia en el análisis de los circuitos lineales, y la representación en el plano complejo es la mostrada en la fig. 33.

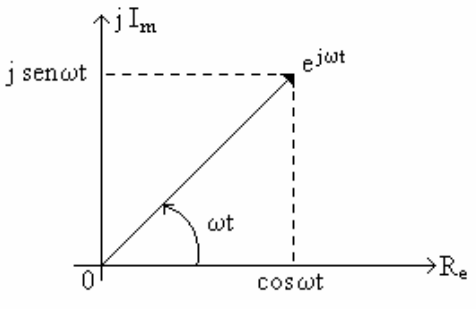


Fig. 33

6.11.3 Senoides amortiguadas.

Un tipo de señal muy próxima a la senoide es la senoide amortiguada, la cual aparece naturalmente como respuesta en muchos circuitos cuando en los mismos se produce alguna perturbación.

Una función coseno amortiguado con desplazamiento de fase puede escribirse como:

$$V_m\ e^{\sigma t} \cos(\omega t + \theta) = \Re e\{V_m\ e^{\sigma t + j(\omega t + \theta)}\} = \Re e\{V_m\ e^{j\theta}\ e^{(\sigma + j\omega)t}\}$$

La senoide no amortiguada es un caso especial que se da cuando $\sigma = 0$.

Físicamente, tendremos una respuesta senoidal amortiguada en sistemas mecánicos cuando por ejemplo un peso sostenido por un resorte sea apartado de su posición de equilibrio, y luego se lo deje evolucionar libremente. En la figura 34se muestran las distintas evoluciones que se obtienen al variar σ: fig. (a) para $\sigma > 0$, fig. (b) para $\sigma = 0$ y fig. (c) para $\sigma < 0$.

Una señal exponencial real decae a 1/e = 0,37 de su calor de partida en un tiempo igual a una constante de tiempo y a $1/e^5 = 0{,}0067$ en cinco constantes de tiempo (5τ). La identidad de Euler nos permite escribir una exponencial compleja en función de senos y cosenos trigonométricos. La parte real de la exponencial compleja es un coseno, la parte imaginaria es un seno. Podemos entonces escribir un seno o un coseno en función de exponenciales complejas. Por ejemplo:

$$\cos(0{,}1t + \pi/6) = \mathrm{Re}\ \left[e^{j(0{,}1t + \pi/6)}\right]$$

$$sen\,(0{,}1t + \pi/6) = \mathrm{Im}\ \left[e^{j(0{,}1t + \pi/6)}\right]$$

$$e^{j0{,}1t} = \cos 0{,}1\, t + j sen\ 0{,}1\, t$$

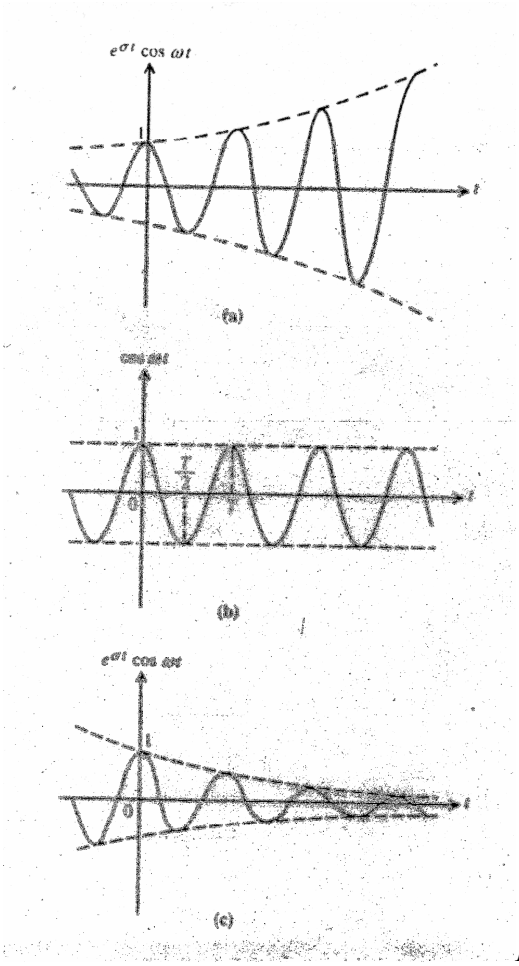
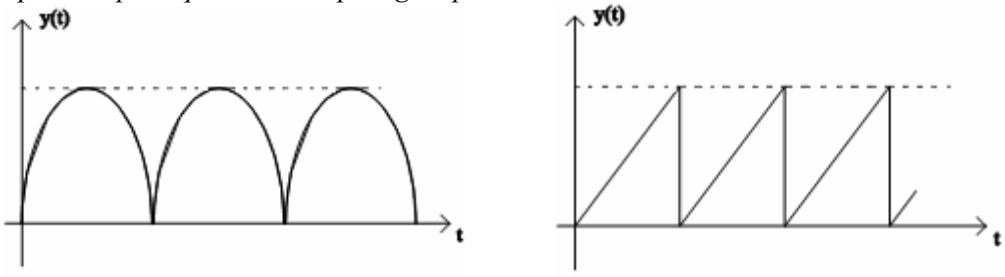


Fig. 34

Problemas de aplicación:

1) Dadas las siguientes funciones del tiempo determinar:

- *factor de forma y factor de amplitud.*
- *Sus amplitudes para que todas disipen igual potencia sobre una resistencia de valor R=5Ω.*



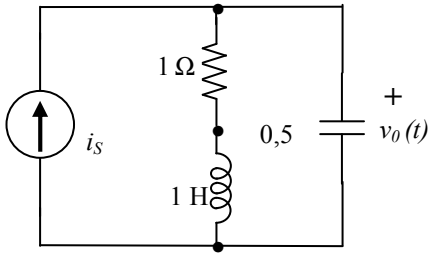
T

2) *En el circuito de la figura, es $i_S(t) = \cos(t + 45°)$.*

a) Escribir la relación V-A de cada rama.

b) Plantear LKC en el nudo superior.

c) Escribir una ecuación diferencial de segundo orden en función de v_0.



Rta: $0{,}5\,\ddot{v}_0 + 0{,}5\,\dot{v}_0 + v_o = i_s + i_s'$

3) *Indicar cuál es el número entero de constantes de tiempo requerido por una señal exponencial para decaer a menos del 10% de su valor inicial. ¿Qué porcentaje de su valor inicial tiene en ese instante?*

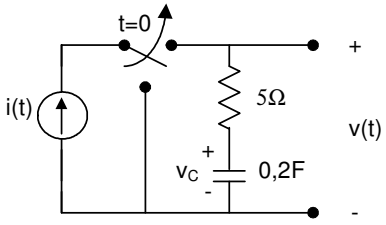
PROBLEMAS PROPUESTOS

1) Hallar la tensión de un capacitor de 12μF si v_{ab}= 6V para t=0$^-$, y la corriente en amperes es, para t≥0:
   a) 0,36 e^{-8000t}
   b) 0,48 cos 200t

Rta*: a) v(t)=9,75-3,75 e^{-8000t}* *b) v(t)=6+20 sen 2000t V*

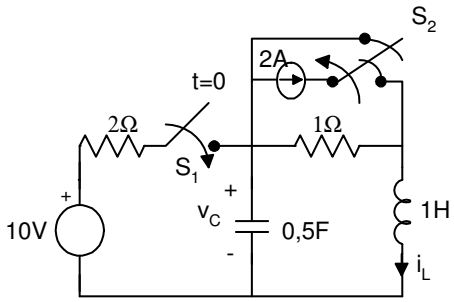
3) El voltaje inicial del capacitor en el circuito de la figura es $v_c(0^-)$=3V. Determinar:
   a) el voltaje v(t)
   b) la energía almacenada en el capacitor en t=0,2 seg y t = 0,8 seg cuando:

$$i(t)=\begin{cases} 3e^{-5t}\ A & 0<t<1 \\ 0 & t\geq 1 seg \end{cases}$$



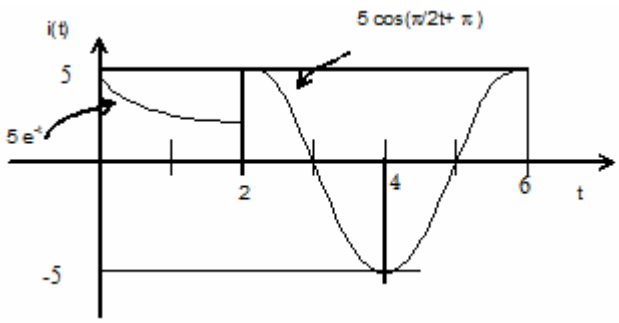
Rta*: a) v(t) = 6 + 12 e^{-5t} V 0≤t<1 v(t) = 6 V t ≥ 1 seg*
b) w(0,2) = 2,4 J w(0,8) = 3,5 J

4) a) Calcule $i_L(0^+)$, $v_C(0^+)$, $dv_C/dt(0^+)$ y $di_L/dt(0^+)$ en el circuito de la figura. Suponer que el interruptor 1 ha estado abierto y el interruptor 2 cerrado durante largo tiempo y que en t=0$^+$ prevalecen las condiciones de estado estable.
   b) Con qué magnitud está vinculada $dv_C/dt(0^+)$ y $di_L/dt(0^+)$.
   c) Justifique los resultados obtenidos.



Rta: *$i_L(0^+)= i_L(0^-)= 0$ A* *$v_C(0^+)= v_C(0^-)= -2$V* *$di_L/dt(0^+) = -2$ A/seg* *$dv_C/dt(0^+) = 12$ V/seg*

5) La evolución temporal de la corriente en una inductancia L = 1 H es:



Se pide:

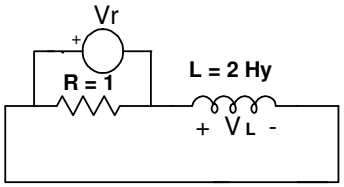
i) Expresar i (t) en función del escalón.
ii) Hallar y graficar la tensión en bornes de la inductancia.

Rtas:

i) $v(t) = 5.e^{-t}.[\mu(t) - \mu(t-2)] + \left(5\cos(\frac{\pi}{2}.t + \pi)\right).[\mu(t-2) - \mu(t-6)]$

ii) $v_L(t) = -5.e^{-t}.[\mu(t) - \mu(t-2)] + 5.\delta(t) + 5(1-e^{-2}).\delta(t-2) - 5\frac{\pi}{2}.\text{sen}(\frac{\pi}{2}t + \pi)[\mu(t-2) - \mu(t-6)]$

6) a) En el circuito siguiente, si $v_r(t) = t \cdot \mu(t-1) + (2-t) \cdot \mu(t-2) - 2 \cdot \mu(t-3)$:

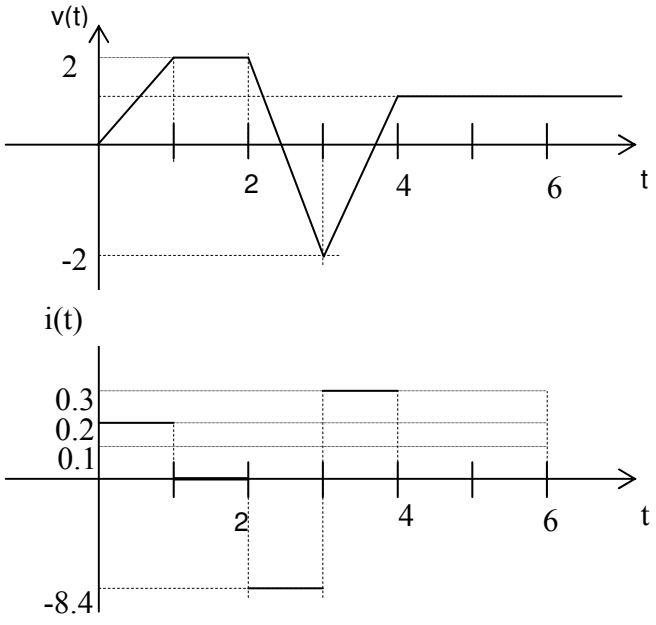


i) Graficar $v_r(t)$

ii) Hallar la corriente que entrega la fuente $I_F(t)$ y graficar su evolución.

7) Las siguientes gráficas representan la tensión y la corriente en bornes de un dipolo pasivo en función del tiempo. Se pide:

a) Graficar la potencia instantánea en función del tiempo.
b) Explicar de qué tipo de dipolo se trata y cuál es su valor.
c) Expresar v(t) en función del escalón.



Rtas:

d) $v(t) = (2t).[\mu(t) - \mu(t-1)] + (2).[\mu(t-1) - \mu(t-2)] + (-4.t + 10).[\mu(t-2) - \mu(t-3)] + (3t - 11).[\mu(t-3) - \mu(t-4)] + \mu(t-4)$