

## Capítulo 7: Estudio de los circuitos en régimen transitorio.

### Generalidades

El presente capítulo estudia el comportamiento de los circuitos dinámicos cuando se producen perturbaciones en el mismo, originadas por apertura o cierre de interruptores, o por variaciones súbitas en la forma de onda de alimentación. Sabemos que un circuito es dinámico si incluye capacitores, inductores, o ambos, ideales, cuya particularidad, al no poseer pérdidas, es que la energía no se disipa en forma de calor en los mismos, sino que queda almacenada en el campo eléctrico o magnético, respectivamente. En general, el comportamiento de los circuitos dinámicos queda definido por ecuaciones diferenciales de distinto orden, según el número de inductancias y capacidades presentes, las cuales podrán ser lineales o no según sean las características de los componentes.

Primeramente consideraremos los circuitos denominados “de primer orden”, es decir, cuyo comportamiento en tensión o corriente puede ser descrito por una ecuación diferencial lineal de primer orden, constituidos por un capacitor (o inductor), resistores y fuentes independientes y/o controladas. En segundo lugar analizaremos los circuitos de “segundo orden”, es decir aquellos cuyo comportamiento puede describirse mediante una ecuación diferencial lineal de segundo orden, y en los que encontramos ambos tipos de elementos almacenadores de energía.

La condición impuesta de trabajar con componentes lineales nos permite realizar importantes simplificaciones, y si bien este modelo podría no reproducir exactamente el comportamiento de un circuito real, nos servirá como referencia para tratar casos reales.

### 7.1 Planteo de ecuaciones en el estudio de regímenes transitorios

En lo que respecta al planteo de ecuaciones, hemos visto que cuando los elementos de una red son solo resistencias, las ecuaciones que se obtienen son todas algebraicas. Si, en cambio, la red contiene inductancias o capacidades (elementos a veces llamados almacenadores de energía), las ecuaciones contienen derivadas o integrales de las variables  $v$  o  $i$ , dado que las relaciones VA de estos elementos las involucran, originándose así ecuaciones integro diferenciales.

En el caso de tener, por ejemplo, un circuito R-L serie alimentado con una fuente de tensión, la LKT nos conduce a:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = v_s(t)$$

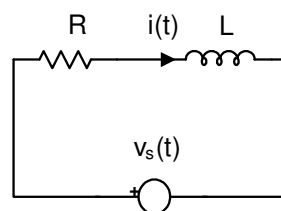


Fig. 1

Esta ecuación, en la cual la variable independiente y sus derivadas aparecen elevadas solo a la primera potencia, y en la cual no hay productos de las derivadas, es una ecuación diferencial lineal. Si además los coeficientes de la variable y sus derivadas son constantes (como ocurre siempre en una red con elementos de valor constante), la ecuación será a coeficientes constantes. Se define orden de la ecuación, al valor  $n$  de la mayor derivada de la variable independiente que aparezca en la ecuación.

El miembro derecho de la ecuación anterior es simplemente la excitación o función forzante de la red. Esta puede ser una constante (DC) o puede representar cualquier función del tiempo, tal como

una onda senoidal (AC), la onda de una señal pulsante de radar, o la onda de la antena de un receptor de radio.

Ahora bien, las ecuaciones diferenciales por sí mismas, no permiten obtener la solución real del problema, sino que deben complementarse con las condiciones iniciales, respetando las leyes de conmutación vistas anteriormente, que son:

$$\mathbf{i}_L(0^-) = \mathbf{i}_L(0^+) \quad \text{(1ra. Ley de Conmutación)}$$

$$\mathbf{u}_c(0^-) = \mathbf{u}_c(0^+) \quad \text{(2da. Ley de Conmutación)}$$

con lo que llegamos a lo que en matemática se denomina problema de condiciones iniciales:

- sistema de ecuaciones diferenciales
- condiciones iniciales.

### ***Régimen transitorio, libre y forzado.***

Como el planteo de las leyes de Kirchoff nos conduce a ecuaciones diferenciales lineales, de un cierto orden de derivación, la solución completa para una variable cualquiera  $\mathbf{x}(t)$  es:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_h(t) + \mathbf{x}_p(t)$$

donde:

$\mathbf{x}_h(t)$ : solución de la ecuación diferencial homogénea asociada.

$\mathbf{x}_p(t)$ : solución particular, impuesta por la fuente, o función forzante.

Puede demostrarse que si los sistemas de ecuaciones que vamos a resolver, así como las ecuaciones (en el caso de haber una malla única) son a coeficientes positivos, su ecuación homogénea asociada no puede tener raíces positivas sino sólo negativas o complejas con parte real negativa, es decir que las soluciones serán del tipo:

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{-kt} \\ e^{-kt} \sin(t + \varphi_0) \\ \text{o sus combinaciones lineales} \end{array} \right.$$

las cuales tienen la particularidad en común de que tienden a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ , por lo que la solución homogénea, que constituye lo que se denomina **régimen libre** tendrá la característica de que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}_h(t) = 0$$

La **respuesta libre** (o **régimen libre**) representa así la solución general de la ecuación homogénea, y por consiguiente debe contener en su expresión las constantes de integración cuyo número es igual al orden de la ecuación diferencial dada. El régimen libre nos da idea de lo que haría el circuito sin fuentes, por lo que vemos que, de no haber un elemento que provea energía, y existiendo un elemento disipativo, se extingue en el transcurso del tiempo.

Denominaremos **respuesta forzada** (o **régimen forzado**) a la asociada con la solución particular de la ecuación diferencial completa. El régimen forzado, producido por la excitación, a veces se denomina "régimen estacionario o permanente". La respuesta forzada constituye una cierta solución particular de una ecuación diferencial no homogénea, que es precisamente aquella que se obtiene de la solución general cuando las constantes de integración son nulas. En otras palabras, la corriente forzada no debe contener sumandos de corriente libre.

El **régimen transitorio** es la suma de ambos, y diremos que existe sólo cuando existe el régimen libre. Si el régimen libre es menor que lo que podemos detectar (poca amplitud o escasa duración) pensaremos que no existe, y analizaremos sólo el régimen forzado.

**Físicamente, sólo existen las corrientes transitorias y las tensiones transitorias, y su descomposición en componentes libres y forzadas es un cómodo artificio que facilita el cálculo de los procesos transitorios en los circuitos lineales.** La descomposición de las corrientes y tensiones transitorias responde a la regla de resolución de ecuaciones diferenciales no homogéneas lineales, cuya solución general es la suma de la solución particular de la no homogénea y la solución general de la homogénea.

Los valores de tensiones en las capacidades y de corrientes en las inductancias en el momento de producirse la perturbación en el circuito, los cuales responden a las leyes de conmutación, nos permiten determinar las **condiciones iniciales independientes**. A diferencia de éstas, los valores de corrientes y tensiones restantes se denominan **condiciones iniciales dependientes**, y se determinan de acuerdo al valor de las condiciones iniciales independientes y la aplicación de las leyes de Kirchhoff en el instante de tiempo  $t = 0^+$ .

## 7.2 Análisis del régimen transitorio en circuitos lineales de primer orden.

En esta parte del capítulo estudiaremos los fenómenos transitorios en los circuitos lineales de **primer orden**, es decir, aquéllos constituidos por **resistencias e inductancias o resistencias y capacitores** (no ambos). Se excluyen la incidencia de la temperatura en los resistores (que modifica su valor óhmico), el arco eléctrico y los inductores con núcleo ferromagnético (ambos de características anómalas), los capacitores con pérdidas, etc. Para eliminar la influencia del arco eléctrico, consideraremos que el interruptor que produce la conmutación se conecta y desconecta instantáneamente, teniendo presente que dicha interrupción instantánea implica siempre una condición irreal de los hechos físicos.

Cualquier circuito de estas características puede dibujarse como se ve en la fig. 2, donde el dipolo N se supone incluye todos el elementos restantes (fuentes independientes, resistores, fuentes controladas).

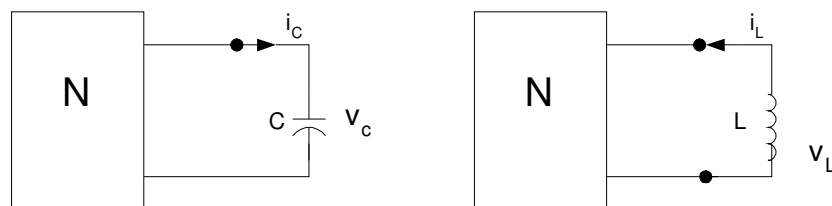


Fig. 2

La aplicación del teorema de Thévenin o el de Norton nos permite reemplazar N por el circuito equivalente mostrado en las figuras 3(a) y 6(b).

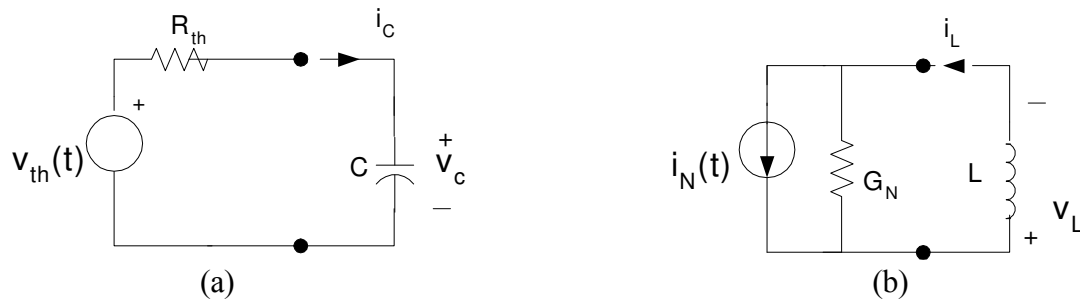


Fig. 3

aplicando LKT tendremos:

$$R_{th} i_c + v_c = v_{oc}(t)$$

Sustituyendo  $i_c = C \, dv_c/dt$  y resolviendo obtendremos:

$$\dot{v}_c = -\frac{v_c}{R_{th} C} + \frac{v_{th}(t)}{R_{th} C} \quad (1)$$

Aplicando LKC tenemos:

$$G_N V_L + i_L = i_N(t)$$

Sustituyendo  $V_L = L di_L/dt$  y resolviendo, tenemos:

$$\dot{i}_L = -\frac{i_L}{G_N L} + \frac{i_N(t)}{G_N L} \quad (2)$$

Cuando se escribe en la forma anterior, la ecuación diferencial lineal de primer orden se denomina ecuación de estado y la variable  $v_c$  (o  $i_L$ ) se denomina variable de estado.

Dada cualquier condición inicial  $v_c(t_0)$  en cualquier instante inicial  $t_0$ , nuestro objetivo es hallar la solución  $v_c(t)$  para todo  $t \geq t_0$ . Demostraremos que  $v_c(t)$  depende solo de la condición inicial  $v_c(t_0)$  y de la forma de onda de  $v_{th}$  en el intervalo  $[t_0, t]$ .

Dada cualquier condición inicial  $i_L(t_0)$  en cualquier instante inicial  $t_0$ , nuestro objetivo es hallar la solución  $i_L(t)$  para todo  $t \geq t_0$ . Demostraremos que  $i_L(t)$  depende solo de la condición inicial  $i_L(t_0)$  y de la forma de onda  $i_N$  en el intervalo  $[t_0, t]$ .

Una vez hallada la solución completa, podemos aplicar el teorema de sustitución y reemplazar el capacitor por una fuente de tensión  $v_c(t)$ .

Una vez hallada la solución, podemos aplicar el teorema de sustitución y reemplazar el inductor por una fuente de corriente de valor  $i_L(t)$ .

El circuito equivalente resultante, que es resistivo puro puede resolverse usando cualquiera de las técnicas vistas anteriormente.

A continuación mostraremos que la solución de cualquier circuito lineal de primer orden puede hallarse por inspección, supuesto que N solo contiene fuentes de corriente continua. Por aplicación repetida de este "método de inspección", se puede hallar la solución para el caso de que la red N contenga fuentes "seccionalmente constantes" (por ejemplo, trenes de pulsos).

### 7.2.1 Circuitos alimentados con fuentes de valor constante. Método de inspección

Cuando la red N de la figura 3 contiene solo fuentes de corriente continua,  $v_{th}(t) = V_{th}$  e  $i_N(t) = i_N$  son constantes, y las ecuaciones 1 y 2 podemos escribirlas genéricamente como:

$$\dot{x} = -\frac{x}{\tau} + \frac{x(t_\infty)}{\tau}$$

la cual se denomina **ecuación de estado**, donde:

$$\begin{aligned}x &= v_c \\x(t_\infty) &= v_{th} \\ \tau &= R_{th} C\end{aligned}$$

para el circuito RC.

$$\begin{aligned}x &= i_L \\x(t_0) &= i_N \\ \tau &= G_N L\end{aligned}$$

para el circuito RL.

En el circuito de la figura 3 (a), dado que todas las fuentes independientes comprendidas dentro de N son de **valor constante**, la expresión de la tensión en el capacitor está dada por:

$$\begin{aligned}v_c(t) &= v_{\text{libre}} + v_{\text{forzada}} \\v_{\text{libre}} &= k_1 e^{-t/\tau} \quad v_{\text{forzada}} = V_{\text{fuente}} \\v_c(t) &= k_1 e^{-t/\tau} + V_{\text{fuente}}\end{aligned}$$

Si tenemos en cuenta que  $V_{\text{forzada}} = V_{\text{fuente}} = V_\infty$ , la ecuación anterior, evaluada en el instante inicial  $t = 0$  nos conduce a:

$$v_c(0) = k_1 + V_{\text{fuente}} = k_1 + V_\infty \Rightarrow k_1 = v(0) - v(\infty)$$

reemplazando en la ecuación de  $v_c(t)$  resulta:

$$v_c(t) = k_1 e^{-t/\tau} + V_{\text{fuente}} = [v(0) - v(\infty)] e^{-t/\tau} + v(\infty)$$

o, lo que es lo mismo:

$$v_c(t) = v(\infty) + [v(0) - v(\infty)] e^{-t/\tau} = V_{\text{final}} + [V_{\text{inicial}} - V_{\text{final}}] e^{-t/\tau}$$

Dado que una onda exponencial queda unívocamente determinado por tres parámetros: estado inicial  $x(t_0)$ , estado final o de equilibrio  $x(t_\infty)$ , y constante de tiempo  $\tau$ , el **método de inspección** puede usarse para hallar la tensión entre cualquier par de nudos  $j$  y  $k$ , o la corriente en cualquier rama  $j$ , en una red **lineal de primer orden alimentada por fuentes de continua**:

**Circuito RC:** conocida la cond. inicial  $v_c(t_0)$

1. Reemplazar el capacitor por una fuente de continua con una tensión en bornes igual a  $v_c(t_0)$ . Designar la tensión entre los nudos  $j$  y  $k$  como  $v_{jk}(t_0)$ , y la corriente  $i_j$  como  $i_j(t_0)$ . Resolver el circuito resistivo resultante para  $v_{jk}(t_0)$  o  $i_j(t_0)$ .
2. Reemplazar el capacitor por un circuito abierto. Designar la tensión entre los nudos  $j$  y  $k$  como  $v_{jk}(t_\infty)$  y la corriente  $i_j(t_\infty)$ . Resolver para  $v_{jk}(t_\infty)$  o  $i_j(t_\infty)$ .
3. Hallar el equivalente de Thévenin de N, Calcular la constante de tiempo  $\tau = R_{th} C$

**Circuito RL:** conocida la cond. inicial  $i_L(t_0)$

1. Reemplazar la inductancia por una fuente de corriente continua de valor igual a  $i_L(t_0)$ . Designar la tensión entre el par de nudos  $j$  y  $k$  como  $v_{jk}(t_0)$ , y la corriente  $i_L$  como  $i_L(t_0)$ . Resolver el circuito resistivo resultante para  $v_{jk}(t_0)$  o  $i_j(t_0)$ .
2. Reemplazar la inductancia por un **cortocircuito**. Designar la tensión entre los nudos  $j$  y  $k$  como  $v_{jk}(t_\infty)$  y la corriente  $i_j$  como  $i_j(t_\infty)$ . Resolver para  $v_{jk}(t_\infty)$  o  $i_j(t_\infty)$ .
3. Hallar el equivalente de Norton de N, calcular la constante de tiempo  $\tau = G_N L$ .

4. Si  $0 < \tau < \infty$ , usar los tres parámetros anteriores para graficar la onda exponencial solución de problema.

4. Si  $0 < \tau < \infty$ , usar los tres parámetros anteriores para graficar la onda exponencial solución del problema.

### Observaciones:

1. El método de inspección que hemos descrito elimina el paso usual de escritura de la ecuación diferencial: reduce cada paso a cálculos en circuitos resistivos.
2. Este método es válido solo si el circuito tiene solución. Por ejemplo, si la red N no tiene equivalente de Thevenin ni de Norton, no tiene solución única.
3. El método supone que el circuito cumple con la condición  $0 < \tau < \infty$ , es decir,  $R_{eq} \neq 0$  y  $G_{eq} \neq 0$ , en los equivalentes de Thevenin y Norton, respectivamente.

**IMPORTANTE:** El método de inspección **sólo** puede usarse en **circuitos lineales de 1er. orden** alimentados con **fuentes de continua**.

Dado que el "método de inspección" depende en gran medida de la habilidad para graficar la forma de onda exponencial, las propiedades siguientes son de gran utilidad.

#### 7.2.2 Propiedades de las ondas exponenciales.

Según que  $\tau$  sea positivo o negativo, la forma de onda exponencial de la ecuación

$$v_c(t) = v(\infty) + [v(0) - v(\infty)]e^{-t/\tau} = V_{final} + [V_{inicial} - V_{final}]e^{-t/\tau}$$

tenderá a un valor constante o a infinito, cuando el tiempo  $t$  tienda a  $\infty$ .

Una red descrita por una ecuación diferencial lineal cuya ecuación característica tiene sólo raíces reales negativas (o, como veremos en el análisis de circuitos de 2do. orden, imaginarias con parte real negativa) se dice que es **estable** si la solución homogénea tiende asintóticamente a cero cuando  $t$  tiende a infinito. Caso contrario, podrá ser **inestable** o **marginalmente estable**. Veremos los distintos casos separadamente.

#### $\tau > 0$ (Caso estable)

Cuando la constante de tiempo es positiva, la ecuación anterior muestra que  $x(t) - x(t_\infty)$ , es decir, la distancia entre el estado inicial y el estado de equilibrio, decrece exponencialmente con una constante de tiempo  $\tau$ . La solución de la ecuación para  $\tau > 0$  se representa en la figura 4 para dos condiciones iniciales:  $\tilde{x}(t_0) < x(t_\infty)$  y  $x(t_0) > x(t_\infty)$ , ambas para  $t \geq t_0$ . Observamos que, debido a que la constante de tiempo  $\tau$  es positiva, en ambos casos  $x(t) \rightarrow x(t_\infty)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Decimos, entonces, que el estado de equilibrio  $x(t_\infty)$  es **estable** porque cualquier desviación inicial  $x(t_0) - x(t_\infty)$  decae exponencialmente y  $x(t) \rightarrow x(t_\infty)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

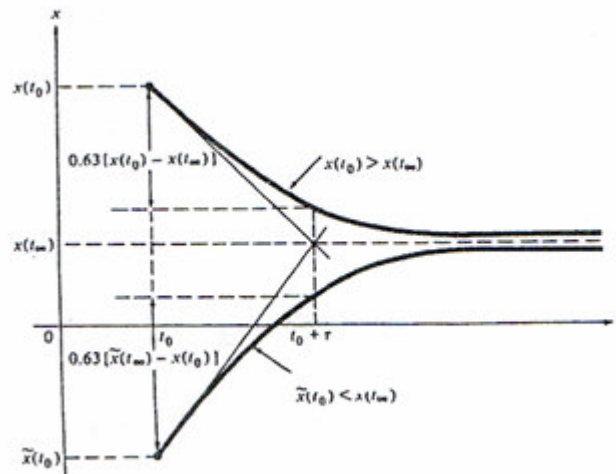


Fig. 4

Las formas de onda exponenciales de la figura 4 pueden graficarse en forma precisa considerando las siguientes observaciones:

1. La tangente en  $t = t_0$  pasa por los puntos  $[t_0, x(t_0)]$  y el punto  $[t_0 + \tau, x(t_\infty)]$ .
2. Luego de transcurrida una constante de tiempo  $\tau$ , la distancia entre  $x(t)$  y  $x(t_\infty)$  disminuye aproximadamente un 63 % de la distancia inicial  $|x(t_0) - x(t_\infty)|$ .
3. Luego de transcurridas cinco constantes de tiempo,  $x(t)$  prácticamente alcanza el valor de **régimen permanente**  $x(t_\infty)$ , dado que  $e^{-5} \approx 0.007$ .

### $\tau < 0$ (Caso inestable)

La posibilidad de aparición de este caso la veremos mediante un ejemplo. En el circuito mostrado en la figura 5,  $i_{L0} = 10$  A. Se desea determinar la evolución temporal de la corriente  $i(t)$  para  $t \geq 0$ .

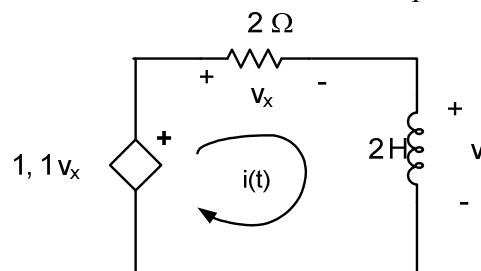


Fig. 5

El planteo de la LKT en la malla nos conduce a:

$$-1,1(2i) + 2i + 2 \frac{di}{dt} = 0$$

La ecuación característica es:

$$\lambda - 0,1 = 0$$

cuya raíz es:

$$\lambda = 0,1$$

8

Vemos que es real y positiva, por lo que el circuito es inestable, con una respuesta natural

$$i_h = A_1 e^{0,1t} \quad t \geq 0$$

Dado que no hay corriente forzada, la respuesta libre coincide con la respuesta completa.

La constante de integración la evaluamos fácilmente haciendo uso de la condición inicial:

$$i(0^+) = 10 = A_1 e^{0,1(0)}$$

lo cual nos conduce a que  $A_1 = 10$ , por lo que la corriente es:

$$i(t) = 10 e^{0,1t} \text{ A} \quad t \geq 0$$

La respuesta obtenida en el ejemplo anterior se muestra en la figura 6, y vemos que la raíz positiva hace que la respuesta se incremente con el tiempo. Físicamente es imposible que la corriente se incremente en forma ilimitada. Prácticamente la corriente aumentara hasta que algún componente salga del rango lineal de operación, o se destruya y cambie el circuito.

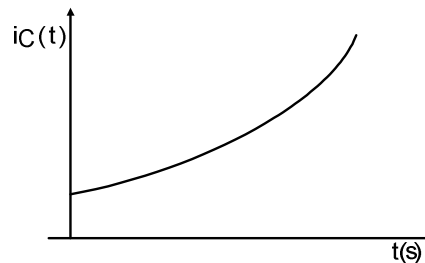


Fig. 6

### Caso marginalmente estable

Trabajamos con el circuito de la figura:

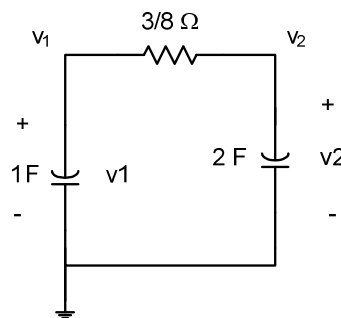


Fig. 7

Las ecuaciones de nudos son:

$$\frac{d}{dt} v_1 + \frac{8}{3} (v_1 - v_2) = 0 \quad t > 0$$

$$\frac{8}{3} (v_2 - v_1) + 2 \frac{d}{dt} v_2 = 0 \quad t > 0$$

La evaluación del determinante nos da la ecuación:

$$(2 \lambda^2 + 8 \lambda) v_1 = 0$$

cuyas raíces son:

$$\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = -4$$

Una de las raíces es cero, por lo que la respuesta libre contiene un término constante, con lo que nos encontramos con un circuito denominado marginalmente estable. La forma de la respuesta libre es:

$$v_{1c}(t) = A_1 + A_2 e^{-4t} \quad t > 0$$

la cual es también la solución completa de  $v_1$ . Para determinar las constantes de integración, utilizamos las condiciones iniciales:

$$v_1(0^+) = 12 \text{ V} \quad v_2(0^+) = 0 \text{ V}$$

con lo que llegamos a que

$$A_1 = 4 \quad A_2 = 8$$

siendo la solución completa

$$v_{1c} = 4 + 8 e^{-4t} \text{ V} \quad t > 0$$

la cual se representa en la figura 8. En este caso, que denominamos marginalmente estable, observamos que la solución libre no va a cero cuando el tiempo tiende a infinito, pero tampoco va a infinito.

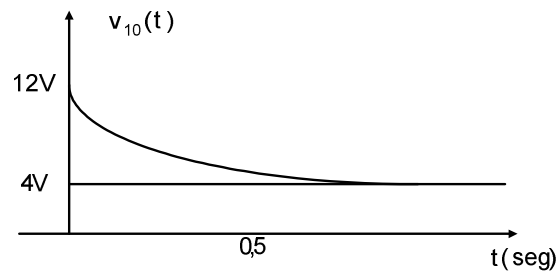


Fig. 8

### Conclusión:

- **Raíces con partes reales negativas** corresponden a un circuito estable. Para este tipo de circuito, la respuesta libre tiende a cero con el tiempo, es decir, cuando todas las fuentes independientes se hacen cero, todas las tensiones y corrientes deben eventualmente tender a cero.
- **Raíces con parte real cero** hacen que el circuito sea marginalmente estable, el cual es a menudo considerado como un caso especial de un circuito inestable. Para un circuito marginalmente estable, la respuesta libre no va a cero con el tiempo, pero tampoco crece exponencialmente. Cuando todos las fuentes se hacen cero en un circuito marginalmente estable, todas las tensiones y corrientes se vuelven asintóticamente constantes, o, como veremos más adelante, oscilan con una amplitud fija.
- **Raíces con parte real positiva** provocan que el circuito sea inestable, por lo que la respuesta se incrementa al transcurrir el tiempo. Luego, aún con todas las fuentes independientes pasivadas, las tensiones y corrientes en un circuito inestable aumentarán, siendo eventualmente limitadas por alinealidades del propio dispositivo físico, o por autodestrucción del circuito.

Ejercicios de aplicación:

1) Determinar los valores de  $A$  para los cuales el circuito de la figura P1 es estable.

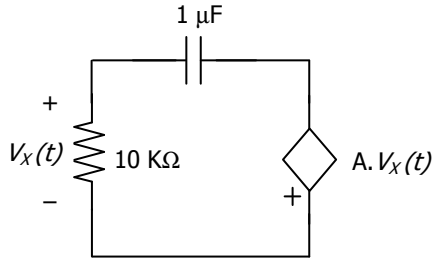


Fig. P1

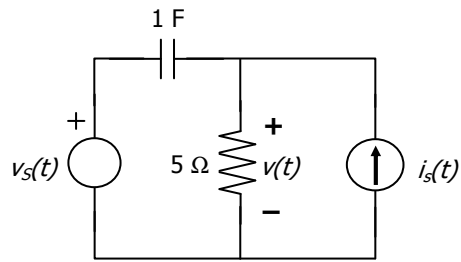


Fig. P2

Rta:  $A > -1$ .

2) Usar el teorema de superposición para obtener la respuesta forzada de la tensión  $v(t)$  en el circuito de la figura P2, si para  $t \geq 0$  son:

$$v_s(t) = 36 \cdot e^{-2t} \text{ V}$$

$$i_s(t) = 2 \text{ A}$$

Rta:  $v(t) = 10 + 40 \cdot e^{-2t} \text{ V } (\forall t \geq 0)$

### 7.2.3 Cálculo del tiempo transcurrido entre dos instantes dados.

A menudo será necesario calcular el intervalo de tiempo transcurrido entre dos estados particulares de una onda exponencial, como podría ser el tiempo que necesita una determinada magnitud, por ejemplo la tensión  $v_o$  para disminuir desde  $v_o = 0$  a  $v_o = -15 \text{ V}$ .

Observando la figura 4, dados dos puntos  $[(t_j, x(t_j))]$ , y  $[(t_k, x(t_k))]$ , vemos que para cada uno de ellos se cumple que:

$$x(t_j) - x(t_\infty) = [x(t_o) - x(t_\infty)] e^{-\frac{(t_j - t_o)}{\tau}} \quad (*)$$

$$x(t_k) - x(t_\infty) = [x(t_o) - x(t_\infty)] e^{-\frac{(t_k - t_o)}{\tau}} \quad (**)$$

Dividiendo la ec. (\*) por la (\*\*) y tomando logaritmo en ambos miembros, obtenemos la expresión del tiempo transcurrido entre  $t_k$  y  $t_j$ , dada por la siguiente ecuación:

$$t_k - t_j = \ln \frac{x(t_j) - x(t_\infty)}{x(t_k) - x(t_\infty)}$$

Importante: la expresión obtenida anteriormente no depende de si  $\tau$  es positiva o negativa.

### 7.2.4 Representación gráfica de la respuesta.

Si aplicamos el método de inspección a una malla simple R-L alimentada por un escalón de tensión, tal como se muestra en la figura 9, obtendremos las siguientes expresiones:

$$i(t) = \frac{E}{R} + (i(0) - \frac{E}{R}) e^{-\frac{R}{L}t}$$

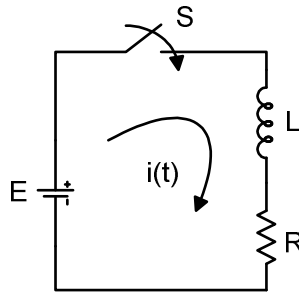


Fig. 9

Si  $i(0) = 0$ , entonces  $i(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-t/\tau})$

$$\therefore u_R = E_f (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \quad u_L = E_f e^{-\frac{R}{L}t}$$

En la ecuación de la corriente observamos que el término  $i(0) e^{-(R/L)t}$  se comporta como un amortiguador, dado que absorbe la discrepancia inicial que pueda existir entre la corriente disponible y la demandada por la respuesta en régimen permanente, disminuyendo gradualmente la misma de forma que la respuesta se aproxime a la de régimen permanente. La representación gráfica de las distintas evoluciones se muestra en la figura 10 para  $i(0) = 0$ .

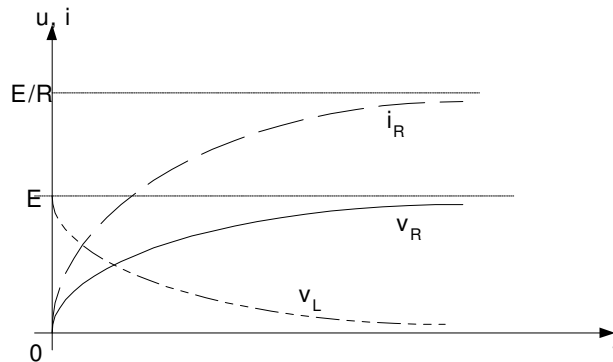


Fig. 10

### 7.2.5 Constante de tiempo.

La magnitud  $\tau = L/R$  se denomina constante de tiempo del circuito, y puede definirse como el tiempo en el transcurso del cual la corriente libre, al amortiguarse, se reduce a un valor igual a  $1/e$  de su valor inicial  $i_{li}(0)$ . En efecto, si existe sólo la corriente libre, será:

$$i(t) = i_{li}(t) = k e^{-t/\tau} \quad i(0) = i_{L0} = k \quad \therefore i_{li}(t) = i_{L0} e^{-t/\tau}$$

de donde:

$$i_{li}(\tau) = i_{li}(0) e^{-1/\tau} = \frac{i_{li}(0)}{e} = \frac{i_{L0}}{e} \approx 0,37 A$$

Como la corriente total en el circuito es  $i(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-t/\tau})$  analizamos con qué pendiente sale:

$$\frac{di}{dt} = \frac{E}{R} \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t}$$

cuando  $t = 0$  vemos que la curva parte con pendiente no nula, dado que

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = \frac{E}{L}$$

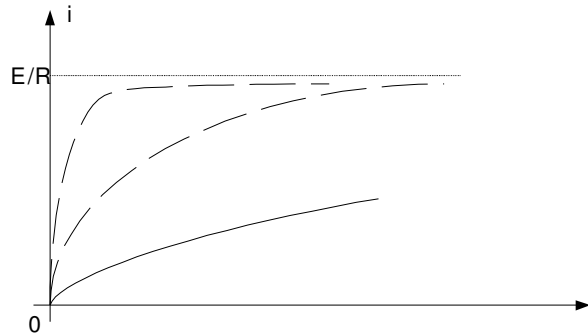


Fig. 11

Vemos que, cuanto más disminuya  $L$  menos tardaremos en alcanzar el valor de régimen. Si por ejemplo, queremos determinar el tiempo necesario para que la corriente difiera en un 1 % del valor final de régimen, para valores de  $R = 0,1 \Omega$  y  $L = 0,1 \text{ H}$ , será:

$$\frac{-i + i_{\text{final}}}{i_{\text{final}}} = \frac{-\frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t}) + \frac{E}{R}}{\frac{E}{R}}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta i}{i_{\text{final}}} = e^{-\frac{R}{L}t} < 0,01$$

$$e^t > 100 \Rightarrow t > \ln 100 \Rightarrow t > 4,6 \text{ s}$$

Por lo que deducimos que, a pesar de que  $L$  no es demasiado grande, la constante de tiempo del circuito es 1 s, por lo que se debe esperar un tiempo relativamente prolongado para que el circuito alcance el régimen permanente.

#### **Determinación gráfica de la constante de tiempo $\tau$**

Analizaremos el caso de una bobina real (circuito R-L), recorrida por una corriente  $i$ , la cual es cortocircuitada por medio de un interruptor.

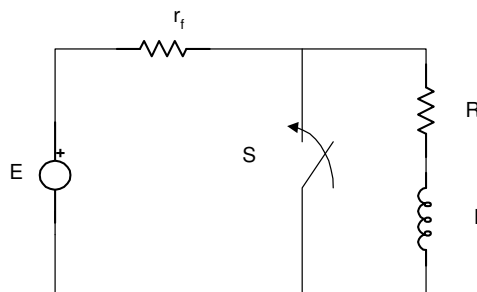


Fig. 12

Aplicando el método de inspección anteriormente estudiado, vemos que:

$$i(0^-) = i(0^+) = \frac{E}{r_f + R} = i_{\text{inicial}}$$

siendo el valor final

$$i_{\text{final}} = 0$$

por lo que la evolución temporal de la corriente en la malla que se cortocircuita será:

$$i = \frac{E}{r_f + R} e^{-\frac{r}{L}t}$$

La evolución de la corriente en régimen libre es la mostrada en la figura 15, y en ella trazamos la tangente a la curva  $i_{li}$  en cualquier punto C.

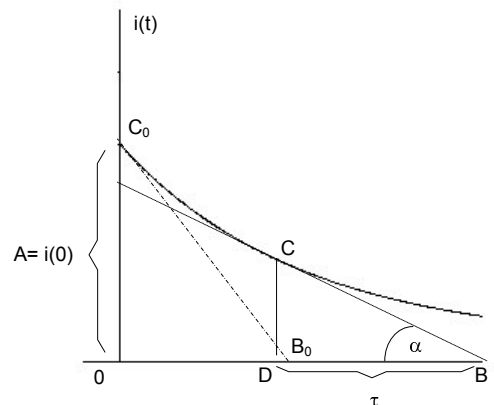


Fig. 13

En el triángulo CBD será:

$$\tan \alpha = \frac{\overline{CD}}{\overline{DB}} \Rightarrow \overline{BD} = \frac{\overline{CD}}{\tan \alpha} = \frac{i_{li}}{\tan \alpha} = \frac{i_{li}}{-\frac{d i_{li}}{d t}}$$

$$\Rightarrow \overline{BD} = \frac{i_{li}}{\frac{E}{r_f + R} \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \frac{i_{li}}{\tau}} = \tau$$

O sea que, numéricamente, la constante de tiempo  $\tau$  es igual a la longitud de cualquier subtangente, siendo, por lo tanto, igual a la subtangente  $OB_0$  determinada por la tangente  $C_0 B_0$  trazada por el punto inicial  $C_0$ .

La magnitud "inversa" de  $\tau$ ,

$$\frac{1}{\tau} = \frac{R}{L} = \frac{1}{GL}$$

se denomina "coeficiente de amortiguamiento del circuito".

Tal como vimos antes, la corriente libre se amortigua tanto más lentamente, y el régimen forzado tarda más en establecerse, cuanto mayor sea la constante de tiempo  $\tau$ , y menor el coeficiente de amortiguamiento.

Volviendo al circuito, la f.e.m. de autoinducción:

$$e_L = -L \frac{d i}{d t} = E \frac{R}{R + r_o} e^{-\frac{t}{\tau}} = -u_L$$

es igual, en  $t = 0$ , a la tensión en la resistencia, y en el momento de la conmutación mantiene el valor de la intensidad en su nivel inicial.

Desde el punto de vista energético, el cortocircuito del circuito RL se caracteriza porque toda la energía del campo magnético acumulada en L antes de la conmutación

$$w_m = L \frac{i^2(0^-)}{2} = \frac{L}{2} i^2(0^-)$$

se transforma en calor en el curso del fenómeno transitorio que arranca en  $t = 0$ :

$$\int_0^\infty i^2 r dt = i^2(0) r \int_0^\infty e^{-\frac{2R}{L}t} dt = i^2(0) r \left(-\frac{L}{2R}\right) e^{-\frac{2R}{L}t} \Big|_0^\infty$$

$$i^2(0) \left(-\frac{L}{2}\right) (0 - 1) = \frac{L}{2} i^2(0)$$

Teóricamente, el desvanecimiento de la corriente en una bobina en cortocircuito se prolonga un tiempo infinito, de allí el límite superior de la integral. Sin embargo, en la práctica se termina bastante rápidamente, estando  $\tau$  comprendido entre varios microsegundos y fracciones de segundos, correspondiendo los valores más altos a las bobinas con núcleos de acero y un número elevado de espiras.

**Ejercicios de aplicación:**

- 1) Aplicar el Teorema de Thevenin para simplificar el circuito P1 siguiente y calcular la constante de tiempo. Escribir una ecuación diferencial y hallar  $i(t)$  para  $t > 0$ , si  $i(0+) = 80 A$ .

Rta:  $\tau = 0,05 s$ ;  $i(t) = 80 \cdot e^{-20t}$

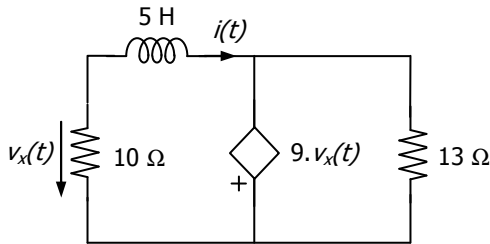


Fig. P1

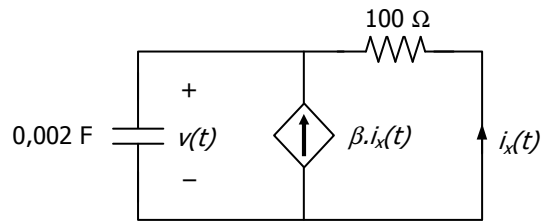
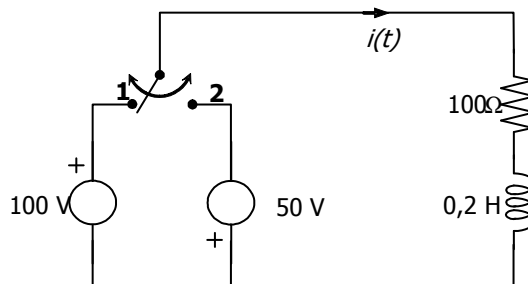


Fig. P2

- 2) Para el circuito sin fuentes de la figura P2, determinar el parámetro  $\beta$  para que resulte una constante de tiempo  $\tau = 0,02 s$ . Usar ese valor de  $\beta$  para calcular  $v(t)$  para  $t \geq 0$ , si  $v(0+) = 40 V$ .

Rta:  $\beta = 9$ ;  $v(t) = 40 \cdot e^{-50t}$

- 3) En el siguiente circuito, la llave se ubica en la posición 1 en  $t = 0$  luego de haber permanecido abierta. En  $t = 500 \mu s$  conmuta a la posición 2. Obtener la evolución de la corriente  $i(t)$  y graficarla.

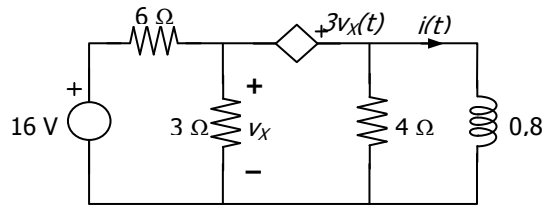


Rta:

$$i(t) = \begin{cases} 1 - e^{-500t} & 0 \leq t \leq 500 \mu s \\ -0,5 + 0,721 \cdot e^{-500(t-500 \mu s)} & t \geq 500 \mu s \end{cases}$$

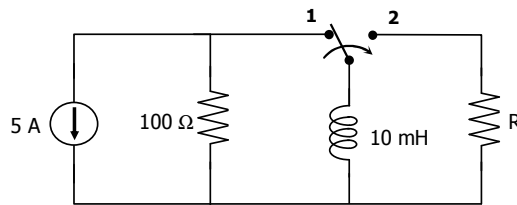
**PROBLEMAS PROPUESTOS:**

1) Determinar la corriente  $i(t)$  y la tensión  $v_x(t)$  para  $t \geq 0$ , si  $i(0^-) = 1$  A.



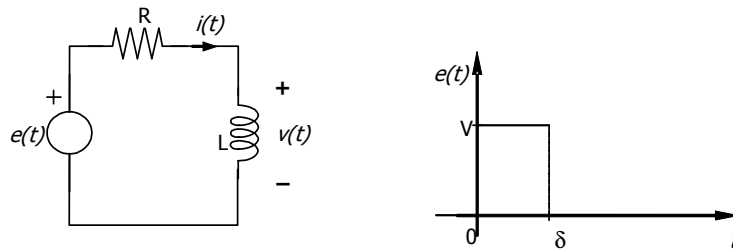
Rta:  $i(t) = 2,667 - 1,667 e^{-t/0,3}$  A ,  $v_x(t) = 1,11 \cdot e^{-3,33t}$  V

2) En el circuito de la figura la llave ha permanecido en la posición 1 por un largo tiempo, y en  $t = 0$  conmuta a la posición 2. Hallar el valor de R que hace que el 10 % de la energía almacenada en el inductor se disipe en 10  $\mu$ s.



2) Para la red mostrada en la figura, graficar  $v(t)$  e  $i(t)$  en función del tiempo para:

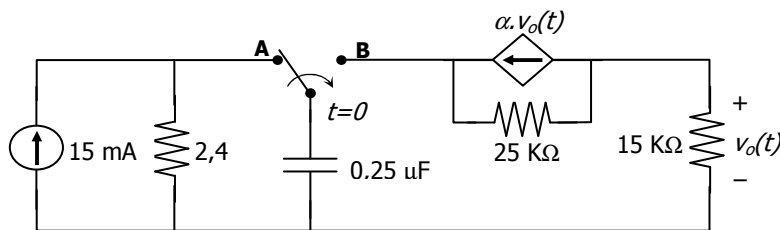
- a)  $\delta \ll L/R$
- b)  $\delta = L/R$
- c)  $\delta \gg L/R$



4) En el circuito de la figura, la llave ha estado en la posición A por un largo tiempo. En  $t = 0$  conmuta instantáneamente a la posición B.

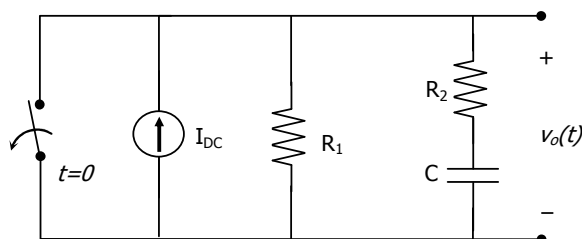
Hallar el valor de  $\alpha$  de modo de obtener una constante de tiempo del circuito,  $\tau = 25$  ms.

Para el valor de  $\alpha$  calculado en (a), hallar la evolución de  $v_0(t)$  para  $t \geq 0$ .



Rta: a)  $\alpha = 1,6 \cdot 10^{-4}$  b)  $v_0(t) = 5,4 \cdot e^{-40t}$  V

5) En el circuito, la llave se abre en  $t = 0$ , excitando la red con un escalón de corriente  $I_{DC}$ . Graficar  $v_0(t)$ .



### 7.3 Análisis del régimen transitorio en circuitos lineales de segundo orden

En esta parte del capítulo discutiremos la respuesta natural y la respuesta forzada de circuitos que contienen ambos tipos de elementos almacenadores de energía: inductores y capacitores.

La determinación de la *respuesta libre o natural* del circuito paralelo mostrado en la figura 14 (a) consistirá en hallar la evolución de la tensión que aparece en bornes de las ramas en paralelo debido a la liberación de energía que ha sido almacenada en la inductancia, en la capacidad o en ambas. La tensión inicial  $v_{C0}$  representa la energía inicial almacenada en el capacitor, mientras que la corriente inicial  $i_{L0}$  representa la energía inicial almacenada en el inductor.

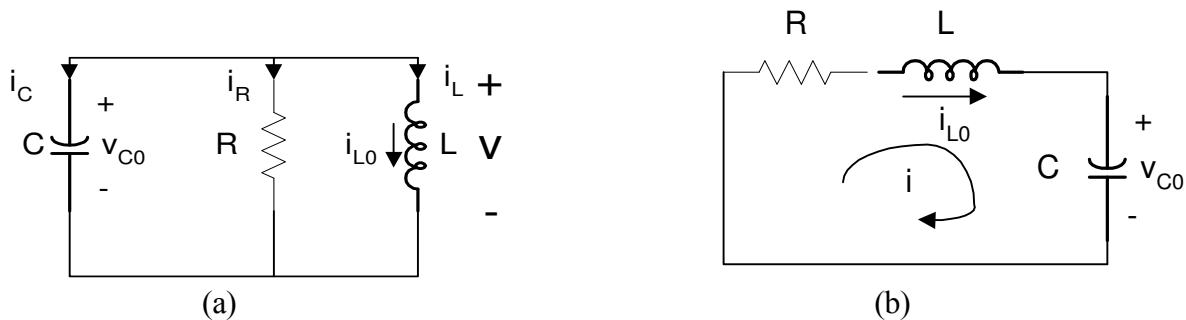


Fig. 14

La determinación de la *respuesta natural* del circuito serie RLC mostrado en la figura 14 (b) consistirá en hallar la evolución de la corriente que circula por los elementos conectados en serie debido a la liberación de la energía almacenada inicialmente ya sea por el capacitor, el inductor, o ambos. Tal como antes, la corriente inicial en la inductancia  $i_0$  y la tensión inicial en el capacitor  $v_0$  representan la energía almacenada inicialmente. Naturalmente, una vez determinada la corriente, se puede hallar la evolución de la tensión en bornes de cualquiera de los elementos.

Los circuitos serie y paralelo que utilizaremos para determinar la *respuesta forzada* a una excitación escalón se muestran en la figura 15, y en ellos será de nuestro interés determinar, por ejemplo, la tensión que aparece en bornes de las ramas luego de aplicación de una fuente de corriente (circuito paralelo) o la corriente que resulta luego de la aplicación de una fuente de tensión en el caso de un circuito serie.

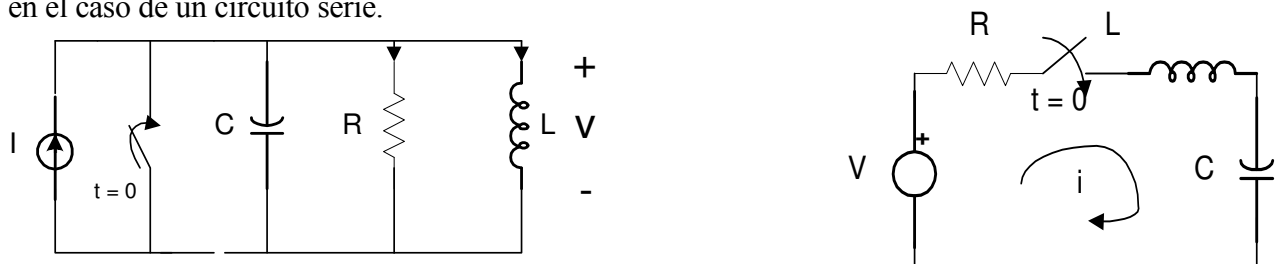


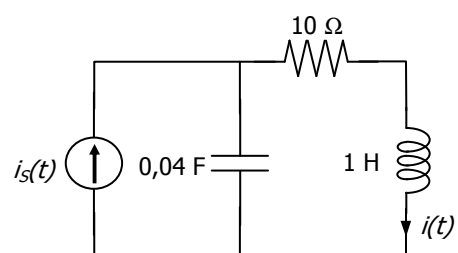
Fig. 15

Iniciaremos nuestro estudio determinando la respuesta en régimen libre (sin fuentes) para luego analizar la respuesta forzada debida a una excitación escalón y una senoidal.

*Ejercicio de aplicación:*

1) Siendo  $i_s(t) = 10 \cdot \mu(t)$ , determinar la componente forzada de la corriente  $i(t)$ .

**Rta:**  $i_p(t) = 10 A$



### 7.3.1 Formulación de ecuaciones

Examinaremos la red RLC serie de la figura 16, recordando las relaciones volt-ampere en cada elemento:

$$i_C = i = C \dot{v}$$

$$v_R = Ri = RC \dot{v}$$

$$v_L = L \frac{di}{dt} = LC \ddot{v}_c$$

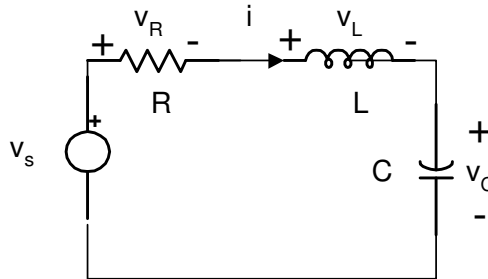


Fig. 16

El planteo de la ley de Kirchhoff de tensión en la malla nos da:

$$u_L + u_R + u_c = v_s(t)$$

$$LC \ddot{v}_C + RC \dot{v}_C + v_C = v_s(t) \quad (1)$$

Esta es una ecuación diferencial lineal ordinaria de 2do. orden a coeficientes constantes. De acuerdo a lo que ya sabemos, es evidente que se deben conocer dos condiciones iniciales para poder encontrar una solución. Dichas condiciones iniciales podrán ser independientes, es decir, la tensión inicial en el condensador y la corriente inicial en la bobina, o las “dependientes”, es decir, todas aquellas que nos sean necesarias y que se obtengan a partir de las c.i. independientes, las relaciones volt-ampere de los elementos y la aplicación de las leyes de Kirchhof en  $t = 0^+$  en el circuito. Por ejemplo si  $i_L(0)$  se puede escribir que:

$$\dot{v}_c(0) = \frac{i_C(0)}{C} = \frac{i_L(0)}{C}$$

### 7.3.2 Cálculo de la respuesta en régimen libre:

El procedimiento es similar al seguido para obtener la respuesta de los circuitos de primer orden RL y RC. La ecuación homogénea asociada a la ecuación (1) es:

$$LC \ddot{v}_{cli}(t) + RC \dot{v}_{cli}(t) + v_{cli}(t) = 0$$

donde  $v_{cli}(t)$  es la repuesta en régimen libre. Si adoptamos  $v_{cli}(t) = K e^{\lambda t}$ , haciendo la sustitución se obtiene:

$$(LC \lambda^2 + RC \lambda + 1) k e^{\lambda t} = 0$$

Para satisfacer esta ecuación para todos los valores de  $t$  es necesario que sea:

$$LC \lambda^2 + RC \lambda + 1 = 0$$

ecuación que se denomina “ecuación característica” del circuito y que tiene dos soluciones para  $\lambda$ , de la forma:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-RC \pm \sqrt{(RC)^2 - 4LC}}{2LC} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

Por lo tanto, la respuesta libre debe incluir términos de la forma  $K_1 e^{\lambda_1 t}$  y  $K_2 e^{\lambda_2 t}$ . Ya que la ecuación diferencial es lineal, se puede escribir que:

$$v_{ch}(t) = K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t}$$

Las raíces de la ecuación característica  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  están determinadas por los parámetros del circuito R, L y C, mientras que las condiciones iniciales permiten determinar los valores de las constantes  $K_1$  y  $K_2$ . La forma de la solución homogénea deberá ser modificada en el caso de que las dos raíces sean iguales, caso que discutiremos oportunamente.

El comportamiento de  $v_{ch}(t)$  depende de las raíces  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , por lo que el primer paso para hallar la respuesta natural es determinar las raíces de la ecuación característica. Para ello, volveremos a la ecuación (5) y la reescribiremos utilizando una notación que es ampliamente usada en la literatura de circuitos:

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}$$

donde 
$$\alpha = -\frac{R}{2L} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

El exponente de  $e$  debe ser adimensional, por lo que  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  deben tener dimensiones de inversa de tiempo, o sea de frecuencia, denominándose frecuencias complejas.  $\alpha$  se denomina constante de amortiguación, o frecuencia neperiana, y  $\omega_0$  se denomina frecuencia natural de oscilación no amortiguada, o frecuencia de resonancia.

La naturaleza de las raíces  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  y por consiguiente de la respuesta, dependerá de los valores de  $\alpha$  y  $\omega_0$ , por lo que según sea el signo de la cantidad subradical, se podrán presentar tres casos:

1. Si  $\alpha > \omega_0 > 0$  ambas raíces son reales y distintas y la respuesta se denomina **sobreamortiguada**, estando representada por la suma de dos exponenciales decrecientes, con constantes de tiempo  $1/\lambda_1$  y  $1/\lambda_2$ . Evidentemente podemos observar que, cuanto mayor sea  $\alpha$ , la amortiguación será mayor y la respuesta llegará a cero más rápidamente.

$$x(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t} \quad \lambda_1, \lambda_2 \text{ reales}$$

2. Si  $\alpha = \omega_0$  ambas raíces serán reales e iguales, y se dice que la respuesta posee **amortiguamiento crítico**.

$$x(t) = (k_1 + k_2 t) e^{\lambda_2 t} \quad \lambda \text{ real}$$

3. Si  $0 < \alpha < \omega_0$  ambas raíces son complejas conjugadas una de otra, y la respuesta se denomina **subamortiguada**, estando representada por una senoide que decae exponencialmente.

$$x(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t} = k e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t - \theta) \quad \lambda_1, \lambda_2 \text{ complejos conjugados}$$

4. Si  $\alpha = 0$  y  $\omega_0 > 0$  la respuesta será **sin pérdidas**, es decir, una senoide pura con una frecuencia angular de oscilación igual a  $\omega_0$ .

$$x(t) = k \cos(\omega_0 t - \theta) \quad \lambda_1 \text{ y } \lambda_2 \text{ imaginarios puros, conjugados}$$

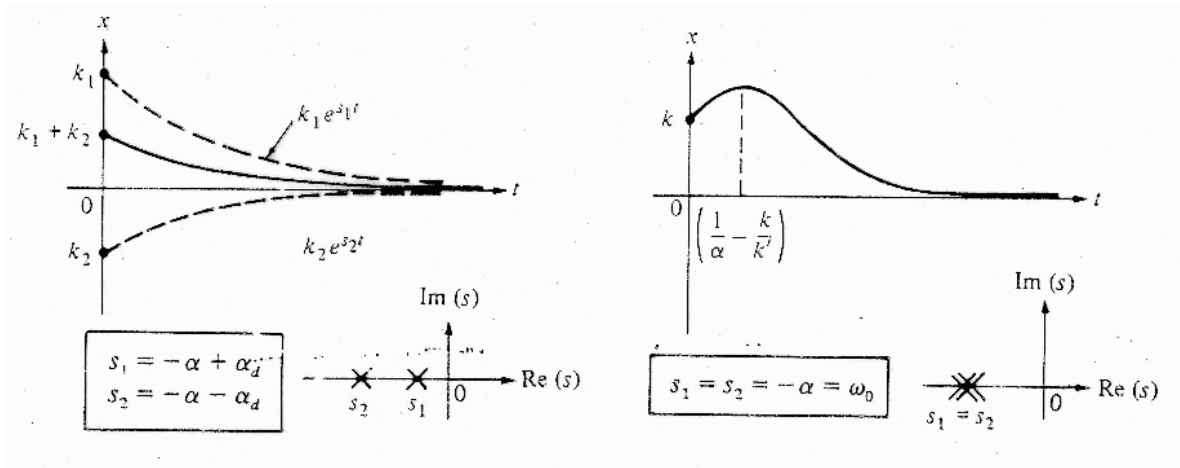


Fig. 17 a

Fig. 17 b

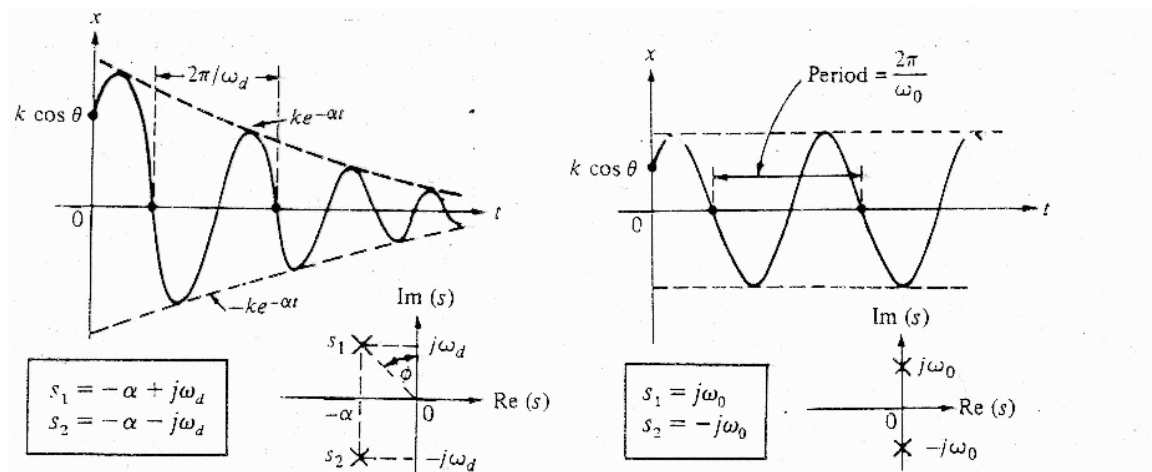


Fig. 17 c

Fig. 17 d

Antes de proseguir con nuestro estudio, vale la pena recordar que la obtención de la solución libre de cualquier circuito de segundo orden, independientemente del tipo de amortiguamiento, involucra la determinación de dos constantes incógnitas,  $K_1$  y  $K_2$ . Para ello debemos utilizar la solución completa y aplicarle las condiciones iniciales del circuito, sean estas independientes o las que surjan de la aplicación de las leyes de conmutación y las leyes de Kirchhoff.

### 7.3.3 Análisis de la solución completa de un circuito serie R-L-C

Tal como vimos en circuitos de primer orden, la solución completa la podemos suponer constituida por la suma de la **respuesta libre**, es decir, la respuesta del circuito **sin fuentes**, lo cual desde el punto de vista de la ecuación diferencial sería la solución homogénea, más la **respuesta forzada**, que matemáticamente correspondería a la solución particular de la ecuación diferencial. Tal como indicamos previamente, la forma de la respuesta libre depende de los valores que tomen las raíces  $\lambda_{1,2}$  de la ecuación característica, las cuales a su vez dependen de los valores de R, L y C.

Por lo tanto, el primer paso consistirá en la determinación de si la respuesta que tiene el circuito es sobreamortiguada, subamortiguada o tiene amortiguamiento crítico. Luego, hallaremos el valor de la respuesta forzada, para finalmente, en la solución completa, determinar el valor de las constantes, mediante la aplicación de las condiciones iniciales y las leyes de Kirchhoff.

Estudiaremos ahora cada uno de los casos posibles por separado, analizando primero un circuito en régimen libre y luego el mismo circuito alimentado con una excitación escalón.

### 7.3.3.1 Régimen sobreamortiguado

Según vimos, se produce cuando  $\alpha > \omega_0$ , lo que hace que  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  sean ambas reales, distintas y negativas. De esta forma, podemos expresar que:

$$\lambda_1 = \alpha_1 + j 0 \quad \lambda_2 = \alpha_2 + j 0$$

donde:

$$\alpha_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

#### a) Análisis de la respuesta libre

La evolución de la corriente libre será:

$$i_{li}(t) = i_h(t) = K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t}$$

A los efectos de poder determinar los valores de las constantes  $K_1$  y  $K_2$ , debemos considerar las condiciones iniciales en la inductancia y el condensador, a las cuales designaremos  $v_c(0)$  e  $i_L(0)$ .

Dado que la evolución temporal de la corriente en el circuito es:

$$i_{li}(t) = K_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t}$$

igualamos la misma al valor de la condición inicial en  $t=0$ :

$$i(0+) = K_1 + K_2$$

La otra ecuación nos la provee el propio circuito, a partir del planteo de la LKT en la malla:

$$0 = v_L(0) + v_c(0) + v_r(0)$$

y sabiendo que

$$v_L = L \frac{di}{dt}$$

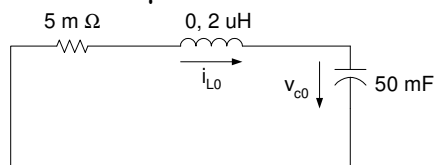
resulta:

$$0 = L(K_1 \lambda_1 + K_2 \lambda_2) + R i(0) + u_c(0)$$

Así, tenemos las dos ecs. que nos permiten determinar el valor de las constantes de integración.

**Ejemplo:** En el circuito de la figura, sabiendo que  $i_{L0} = 12$  A y  $v_{C0} = 30$  mV, determinar:

- i. el valor de la tensión inicial en cada elemento,
- ii. la expresión de  $i(t)$ ,
- iii. Graficar  $i(t)$  en el intervalo  $0 \leq t \leq 250 \mu s$



i) Siendo que la inductancia fija una condición inicial de corriente, la tensión inicial en la resistencia queda determinada por la misma:

$$v_R(0) = R i(0) = 5 \cdot 10^{-3} \cdot 12 = 60 \text{ mV}$$

Dado que el capacitor posee una tensión inicial, la LKT nos permite determinar la tensión inicial en la inductancia:

$$V_L(0) + v_R(0) + v_C(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad V_L(0) = -v_C(0) - v_R(0) = -90 \text{ mV}$$

ii) El próximo paso es determinar las raíces de la ecuación característica, las cuales dependen de R, L y C. La segunda ley de Kirchhoff, tomando como variable independiente a la corriente  $i(t)$ , nos conduce a:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0$$

La siguiente ecuación característica es:

$$\lambda^2 + \frac{R}{L} \lambda + \frac{1}{LC} = 0$$

cuyas raíces son:

$$\lambda_{1,2} = -1,25 \times 10^4 \pm \sqrt{1,5625 \times 10^8 - 10^8} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -5000 \text{ r/s} \quad \lambda_2 = -20000 \text{ r/s}$$

Dado que las raíces son reales y distintas, sabemos que la respuesta es sobreamortiguada, con lo cual podemos determinar el valor de las constantes de integración en la forma vista

$$\begin{aligned} i(0) &= K_1 + K_2 = 12 \\ v_L(0) &= -0,2 \mu [K_1 \lambda_1 + K_2 \lambda_2] = -90 \text{ mV} \end{aligned}$$

A partir de estas ecuaciones, las constantes resultan ser  $K_1 = -14 \text{ A}$  y  $K_2 = 26 \text{ A}$ , que sustituidas en la ecuación nos conducen a:

$$i(t) = -14 e^{-5000 t} + 26 e^{-20000 t} \text{ A} \quad t \geq 0$$

**Verificamos que en  $t=0$  se cumple que  $i(0)=12 \text{ A}$**

iii) la representación de  $i(t)$  se muestra en la figura 18.

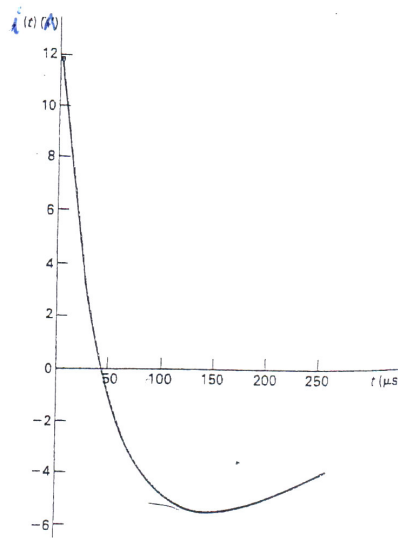


Fig. 18

b) Análisis de la respuesta forzada (respuesta a un escalón de tensión)

Suponemos condiciones iniciales nulas, y un valor de fuente de E voltios. Debido a la presencia del capacitor, la corriente forzada es nula, por lo que la solución completa es:

$$i(t) = i_h(t) = K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t} \quad (1)$$

En  $t = 0$  será:

$$i_{L0} = i(0) = K_1 + K_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad K_1 = -K_2 \quad (2)$$

La segunda ecuación que necesitamos surge de plantear la LKT en la malla en  $t = 0^+$ :

$$v_L(0) = E - R i(0) - v_{c0} = E \quad \text{siendo} \quad v_L = L \frac{di_L}{dt}$$

resulta:

$$v_L(0) = L(K_1 \lambda_1 + K_2 \lambda_2) = E \quad \Rightarrow \quad K_1 = \frac{E}{L(\lambda_1 - \lambda_2)} = \frac{E}{L(2\beta)} \quad (3)$$

Reemplazando (1) y (2) en (3), resulta:

$$i(t) = \frac{E}{2\beta L} (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t})$$

Podemos elaborar esta expresión para visualizar mejor su forma:

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{E}{2\beta L} (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}) = \frac{E}{2\beta L} (e^{(\alpha+\beta)t} - e^{(\alpha-\beta)t}) = \\ &= \frac{E}{\beta L} e^{\alpha t} \frac{e^{\beta t} - e^{-\beta t}}{2} = \frac{E}{\beta L} e^{\alpha t} \sinh \beta t \end{aligned}$$

La representación gráfica de esta evolución se muestra en la figura 19, donde se observa que al principio la corriente es amortiguada por la inductancia y luego por el condensador, que se comporta como un circuito abierto.

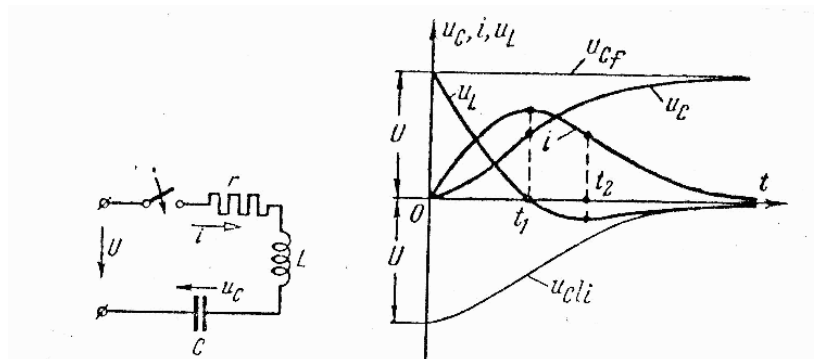


Fig. 19

Dado que para  $t = 0^+$ ,  $i = 0$ , y que para  $t \rightarrow \infty$  también encontramos que  $i = 0$ , esta función presentara un máximo para algún valor de  $t$ , el cual calculamos haciendo:

$$\frac{di}{dt} = \frac{E}{2\beta L} (\lambda_1 e^{\lambda_1 t} - \lambda_2 e^{\lambda_2 t}) = 0 \quad \therefore \quad t = \frac{L}{\lambda_2 - \lambda_1} \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

$$\Rightarrow \quad t_n = \frac{L}{2\beta} \ln \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

El régimen sobreamortiguado también se denomina de descarga aperiódica del condensador, dado que esta situación se da cuando la tensión en el condensador decrece monótonamente de su valor inicial a cero, o sea, no se vuelve a cargar. Desde el punto de vista energético, significa que, al descargarse el condensador, una pequeña fracción de la energía almacenada pasará al campo magnético de la bobina, y su mayor parte se absorberá en la resistencia. Luego de un cierto tiempo se transformará en calor no solo la energía del capacitor, sino la que se acumuló en el campo magnético de la bobina.

En el caso de que la tensión inicial en el condensador fuera no nula, las curvas serían:

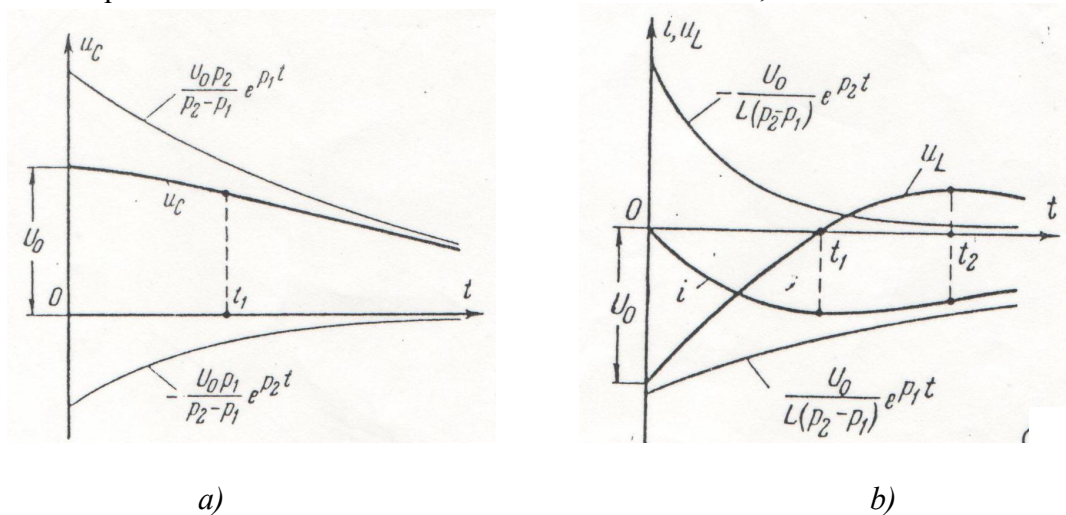


Fig. 20

En base a estas curvas, y analizando la correspondencia entre las mismas, podemos realizar las siguientes observaciones:

- La característica de  $v_c$  arranca con pendiente cero, pues  $i(0^+) = 0$ .
- $u_{c0}^+ = u_{L0}^+$  pues  $i(0^+) = 0$ .
- $u_L$  pasa por cero donde  $i_L$  es máxima.
- el máximo de  $u_L$  y el punto de inflexión de  $i_L$  se dan en  $t_2$ , valor que podemos determinar haciendo  $d u_L / dt = 0$ .
- a partir de  $t_1$ ,  $i_L$  se hace menos negativa, y  $u_L$  se hace positiva.

La evolución mostrada en la figura 20(a) es similar a la del circuito RC o RL, mientras que  $u_L$  o  $i_L$  evidencian una posible "oscilación", con solo un cruce por cero. En efecto, si  $v_c(0)$  e  $i_L(0)$  tienen el mismo signo, inicialmente las dos energías se opondrían, ya que  $i_L(0)$  tendería a descargar el capacitor, pudiendo eventualmente cargarlo en sentido contrario. Luego de transcurrido un cierto tiempo esta situación se revertiría, (fig. 7b), no produciéndose un segundo cruce por cero debido a que la disipación de energía en el elemento resistivo es muy grande, pues  $R$  es elevada.

Ejercicios de aplicación:

1) Hallar  $v(t)$  si la llave se abre en  $t = 0$ , luego de haber alcanzado el régimen permanente.

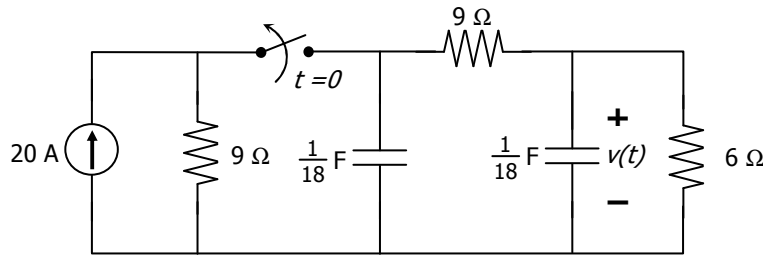


Fig. Ej. 1

**Rta:**  $v(t) = 54 \cdot e^{-t} - 9 \cdot e^{-6t}$

2) Luego de haber permanecido en la posición 1 durante un tiempo suficientemente largo como para alcanzar el régimen permanente, la llave  $L$  conmuta en  $t = 0$  a la posición 2. Hallar y graficar la evolución de  $v_{C1}(t)$  para  $t > 0$ .

**Rta:**  $v_c(t) = 20 - 16,16 \cdot e^{-267,95t} + 1,16 \cdot e^{-37372,05t}$

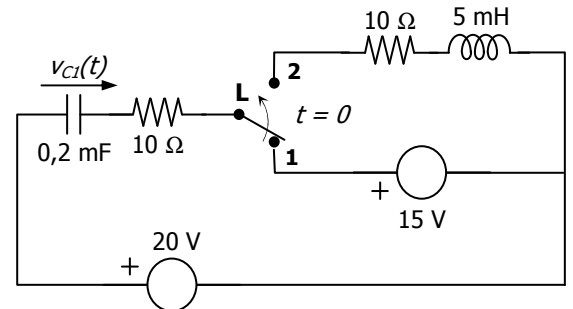


Fig. Ej 2

### 7.3.3.2 Amortiguamiento crítico

Un circuito de segundo orden se dice críticamente amortiguado cuando  $\omega_0 = \alpha_0$ . En estas condiciones, la respuesta libre está en el límite de la oscilación, siendo las dos raíces de la ecuación característica reales e iguales, es decir:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha = -\frac{R}{2L}$$

#### a) Análisis de la respuesta libre.

Cuando las raíces de la ecuación característica son reales e iguales, la respuesta libre cambia su forma respecto de la anteriormente vista, dado que si no estaríamos en la situación de tener

$$i = (K_1 + K_2) e^{-\alpha t} = K_0 e^{-\alpha t}$$

la cual **no puede satisfacer** dos condiciones iniciales independientes ( $v_0$  e  $i_0$ ) con solo una constante arbitraria  $K_0$ . **Por lo tanto, la solución de la ecuación diferencial toma la forma:**

$$i_h(t) = (K_1 + K_2 t) e^{-\alpha t}$$

**Ejemplo:** Para un circuito serie con  $L = 4$  H,  $C = 1$  F,  $v_{C0} = 5$  V e  $i_{L0} = 0$ ,

- Determinar el valor de  $R$  que permitirá obtener amortiguamiento crítico,
- Determinar la evolución de  $i(t)$

a) para que haya amortiguamiento crítico, debe ser

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \Rightarrow \quad R = 4 \Omega$$

b) Mediante la aplicación de la LKT en la malla, y conociendo los valores iniciales de tensión y corriente, podemos determinar el valor de  $\lambda_{1,2}$  y el de las constantes de integración, resultando:

$$K_1 = 0 \quad K_2 = 1,53 \quad \lambda_{1,2} = -0,5 \text{ 1/s}$$

de donde resulta:

$$i(t) = -0,493 t e^{-0,5 t} \text{ A} \quad t \geq 0$$

b) Respuesta del circuito con amortiguamiento crítico a una excitación escalón.

Hemos visto antes la forma de la respuesta libre del circuito. Si alimentamos ahora la malla con un escalón de tensión, tendremos que la corriente forzada es nula. Suponiendo condiciones iniciales nulas de tensión y corriente, será:

$$i(0) = 0 = K_1$$

Para la obtención de la otra constante, planteamos la LKT en la malla en el instante  $t = 0$ , resultando:

$$v_R(0) = R i(0) = 0 \quad v_L(0) = E - v_R(0) - v_C(0) = E$$

de donde  $K_2 = E/L$ , de donde:

$$i(t) = \frac{E}{L} t e^{\lambda t} = \frac{E}{L} t e^{\alpha t}$$

Podemos calcular el valor de  $t$  para el cual se produce el máximo:

$$\frac{d i}{d t} = \frac{E}{L} [ e^{\alpha t} + t e^{\alpha t} ] = 0$$

obteniendo que:

$$t_m = -\frac{1}{\alpha} = \frac{2L}{R}$$

La gráfica de la evolución temporal se indica en la figura 21, notándose la diferencia entre este caso y el sobreamortiguado en el menor tiempo empleado por el amortiguamiento crítico en llegar al valor final

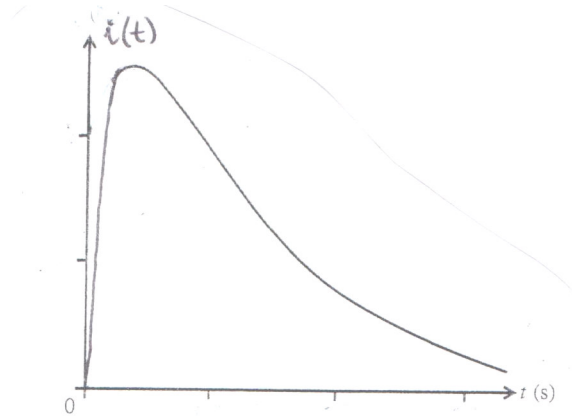


Fig. 21

## Ejercicios de aplicación:

1) La llave estuvo en la posición **A** durante un largo tiempo. En  $t = 0$  conmuta a la posición **B** y permanece allí hasta  $t = 1,5$  s, momento en que pasa a la **C**. Hallar la corriente  $i(t)$  para  $t \geq 0$  y el valor de  $R$  que se necesita para obtener amortiguamiento crítico en esta última situación.

**Rta:**  $i(t) = 0,242 \cdot (t - 1,5) \cdot e^{-(t-1,5)} \cdot \mu(t - 1,5)$  A

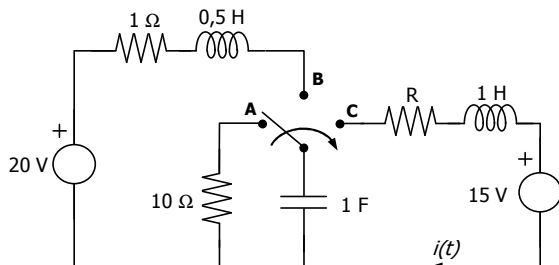


Fig. Ej. 1

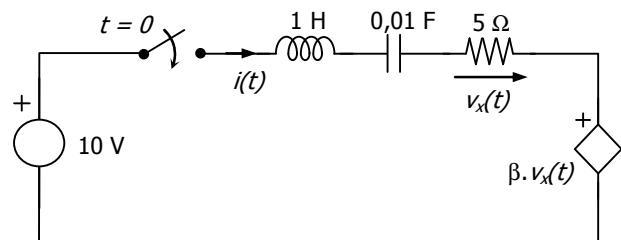


Fig. Ej. 2

2) En el circuito de la figura, el interruptor se cierra en  $t = 0$ . Se pide:

- Calcular el valor de  $\beta$  para el cual se produce amortiguamiento crítico en la evolución de  $i(t)$ .
- Con el valor de  $\beta$  calculado, y considerando que el capacitor está inicialmente descargado, hallar y graficar  $i(t)$ .
- Indicar cuál debería ser el valor de tensión inicial en el capacitor para que no exista régimen transitorio. Justificar.

**Rta:** a)  $\beta = 3$       b)  $i(t) = 10 \cdot t \cdot e^{-10t}$       c)  $v_C(t = 0) = 10$  V

### Forma general de las constantes de integración para el régimen libre

Suponiendo condiciones iniciales no nulas, la forma general de las constantes de integración, para los regímenes sobreamortiguado y subamortiguado es la que se muestra a continuación:

$$k_1 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[ \lambda_2 v_c(0) - \frac{i_L(0)}{C} \right]$$

$$k_2 = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left[ \lambda_1 v_c(0) - \frac{i_L(0)}{C} \right]$$

Su conocimiento nos será de utilidad para obtener la forma real de la evolución temporal de las magnitudes en el régimen subamortiguado, cuyas raíces son complejas conjugadas.

#### 7.3.3.3. Régimen subamortiguado

Este caso se presenta cuando  $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC} < 0$ , lo cual nos conduce a frecuencias naturales complejas conjugadas, las cuales toman la forma siguiente:

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

La respuesta resultante **oscila** por arriba y abajo del eje horizontal, dentro de una envolvente formada por la exponencial decreciente  $e^{-\alpha t}$ . En consecuencia, esta función se denomina senoide decreciente o amortiguada, y la frecuencia  $\omega_d$  recibe el nombre de *frecuencia amortiguada*. Si  $\omega_d$  aumenta, la respuesta será más oscilatoria (por ejemplo, cuando el valor de capacidad C disminuye). Por el contrario, si  $\alpha$  aumenta, la envolvente exponencial decaerá con mayor rapidez.

Analizamos un circuito serie RLC en régimen libre. Las frecuencias naturales, según vimos, son:

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d$$

y las constantes de integración, determinadas a partir de la forma general vista anteriormente, serán complejas conjugadas, de valor:

$$K_1 = a + j b \qquad K_2 = a - j b$$

Por lo tanto, la solución compleja que obtenemos es:

$$v_c(t) = K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t}$$

Dado que una constante de tiempo compleja tiene poco o ningún sentido físico, esta solución no puede reconocerse como una expresión que pertenezca a un sistema físico en donde las respuestas deben ser funciones del tiempo con valores reales. Obtendremos, entonces, la forma real de la solución compleja que acabamos de obtener. Recordemos que, por Euler:

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \operatorname{sen} \theta$$

con lo que la expresión obtenida resulta:

$$v_c(t) = e^{-\alpha t} [k_1 (\cos \omega_d t + j \operatorname{sen} \omega_d t) + k_2 (\cos \omega_d t - j \operatorname{sen} \omega_d t)] = e^{-\alpha t} (A \cos \omega_d t + B \operatorname{sen} \omega_d t)$$

$$\text{donde:} \qquad A = k_1 + k_2 \qquad B = j(k_1 - k_2)$$

Para demostrar que efectivamente A y B son constantes reales, utilizamos las expresiones generales de las constantes de integración para el caso de régimen subamortiguado.

$$k_1 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[ \lambda_2 v_c(0) - \frac{i_L(0)}{C} \right] = \frac{1}{-j2\omega_d} \left[ (-\alpha - j\omega_d) v_c(0) - \frac{i_L(0)}{C} \right] = \frac{v_c(0)}{2} - j \frac{1}{2\omega_d} \left[ \alpha v_c(0) + \frac{i_L(0)}{C} \right]$$

$$k_2 = \frac{v_c(0)}{2} + j \frac{1}{2\omega_d} \left[ \alpha v_c(0) + \frac{i_L(0)}{C} \right] = k_1^*$$

En consecuencia:

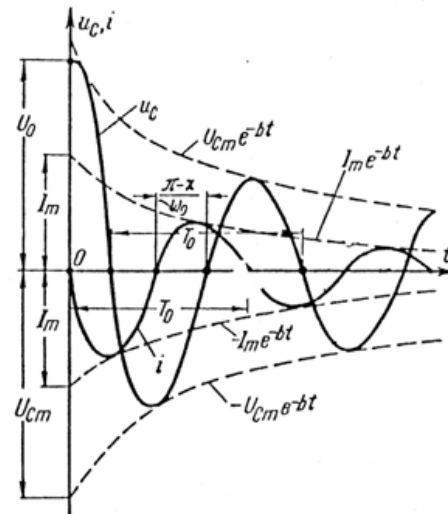
$$A = k_1 + k_2 = v_c(0)$$

$$B = j(k_1 - k_2) = \frac{1}{\omega_d} \left[ \alpha v_c(0) + \frac{i_L(0)}{C} \right]$$

Siendo ambos valores reales. Luego, la solución tiene la forma:

$$v_c(t) = e^{-\alpha t} \left[ v_c(0) \cos \omega_d t + \frac{1}{\omega_d} \left( \alpha v_c(0) + \frac{i_L(0)}{C} \right) \operatorname{sen} \omega_d t \right]$$

En el caso de tener condición inicial de corriente nula, la representación gráfica es:



• *Ejemplo 1: Circuito con condiciones iniciales, sin fuentes*

Analizaremos la evolución de la tensión y la corriente exclusivamente a partir de la energía almacenada en la inductancia y la capacidad:

$$R=1 \quad L=1 \text{ H} \quad C=1 \text{ F} \quad i_L(0)=1 \text{ A} \quad v_C(0)=0 \text{ V}$$

Las raíces son:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm j \frac{\sqrt{3}}{2}$$

por lo que las constantes de integración serán:

$$k_1 = \frac{1}{j\sqrt{3}} \quad k_2 = \frac{1}{-j\sqrt{3}}$$

entonces:

$$v_c(t) = \frac{1}{j\sqrt{3}} e^{\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t} + \frac{1}{-j\sqrt{3}} e^{\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t}$$

Esta expresión no puede reconocerse como perteneciente a un sistema físico cuyas respuestas deben ser funciones del tiempo con valores reales, por lo que hacemos el cálculo para pasar a la forma real:

$$\alpha=1/2 \quad \omega_d=\sqrt{3}/2 \quad A=0 \quad B=2/\sqrt{3}$$

$$v_c(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}t} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2} t$$

$$i_L(t) = C \dot{v}_c(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \sqrt{3} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t - \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2} t \right) e^{-\frac{1}{2}t}$$

• *Ejemplo 2: circuito con condiciones iniciales nulas y excitación escalón:*

$$i_L(0)=0 \quad v_C(0)=0 \quad e_s(t)=E \mu_0(t)$$

$$\left. \begin{aligned} i(t) &= e^{-\alpha t} [A \cos \beta t + B \operatorname{sen} \beta t] \\ i(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = 0$$

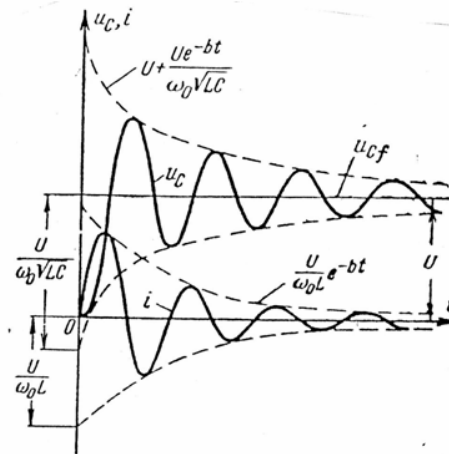
$$\Rightarrow i(t) = e^{-\alpha t} B \operatorname{sen} \beta t$$

$$\left. \begin{aligned} i_c(0) &= 0 \\ u_c(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow u_R(0^+) = 0 \quad u_L(0^+) = E = L \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0^+}$$

$$\Rightarrow \frac{E}{L} = (-\alpha B \operatorname{sen} \beta t e^{-\alpha t} + B \beta e^{-\alpha t} \cos \beta t) \Big|_{t=0^+} \Rightarrow \frac{E}{L} = B \beta \quad \Rightarrow \quad B = \frac{E}{\beta L}$$

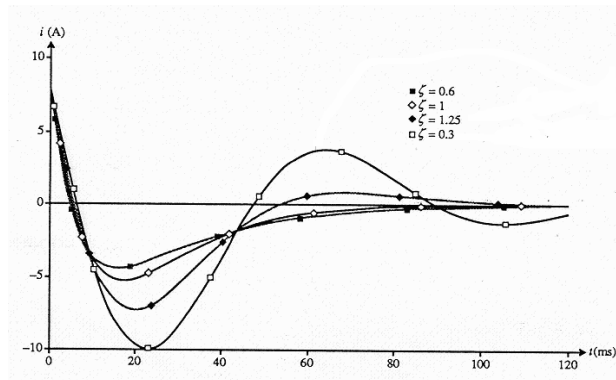
$$\therefore i(t) = \frac{E}{\beta L} e^{-\alpha t} \operatorname{sen} \beta t$$

y la gráfica será:



Hemos obtenido una función senoidal amortiguada, con una frecuencia angular de oscilación  $\beta$  y un coeficiente de amortiguamiento  $\alpha$ , los cuales son sólo función de los parámetros R, L y C del circuito. La fase inicial también dependerá solo de ellos, mientras que el valor máximo será función tanto de los parámetros pasivos como de las condiciones iniciales. Las curvas serán tangentes a las envolventes cuando el seno sea unitario, y en rigor no son senoides, sino que solo se asemejan a ellas. Sus máximos no están a la mitad de los puntos de intersección con el eje de abscisas, y dentro del intervalo de cada semiperíodo, la zona de crecimiento ocupa menos de un cuarto de período, y la zona de decrecimiento más de un cuarto, lo cual se debe a la presencia del factor de amortiguamiento  $e^{-\alpha t}$ .

Según se observa, cuando R aumenta,  $\beta$  disminuye, y cuando  $R=0$ ,  $\alpha = 0$ , correspondiente al caso límite de descarga aperiódica del condensador.



### 7.3.4 Conclusiones a partir de los ejemplos:

Volvamos a la expresión general correspondiente a una onda oscilante amortiguada:

$$v_c(t) = e^{-\alpha t} \left[ v_c(0) \cos \omega_d t + \frac{1}{\omega_d} \left( \alpha v_c(0) + \frac{i_L(0)}{C} \right) \text{sen } \omega_d t \right]$$

Si  $\omega_d$  es pequeño ( $\alpha \approx \omega$ ), no hay cambio notable respecto de las ondas del régimen sobreamortiguado o el crítico.

Para menor disipación (R más pequeña), sí hay diferencia. Sin embargo, el número infinito de cruces por cero dado por la oscilación queda oculto porque la amplitud disminuye, salvo que sea  $\omega_0 \gg \alpha$ . Esto lo vemos en las curvas de la figura 12, con L y C constantes y R variable. En estas condiciones,  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  es fija y sólo varía  $\alpha (= \frac{R}{2L})$ , y por lo tanto  $\omega_d (= \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2})$ .

- *Ejemplo 2:* circuito con condiciones iniciales  $v_C(0^+) = 0$ ,  $i_L(0^+) = -1A$ .

Definimos un parámetro  $\xi$  (factor de amortiguamiento relativo) como la relación  $\xi = \frac{\alpha}{\omega_0}$ .

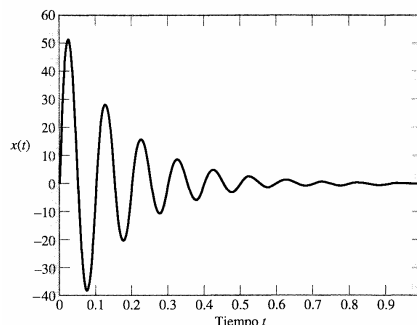
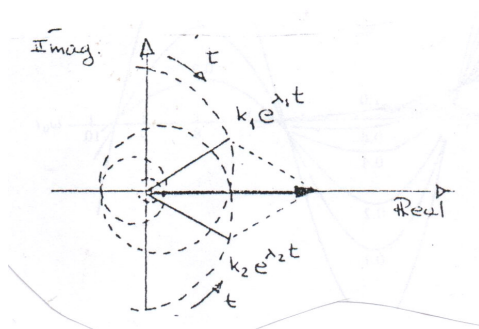
Si  $\xi \approx 1$ , no hay oscilación, pero a medida que  $\xi$  disminuye, aparece la oscilación, siendo máxima para  $\xi=0$  ( $\alpha=0$ , lo cual implica que  $R = 0$ , o sea, no hay disipación de energía), en cuyo caso la onda es un movimiento armónico simple, puramente senoidal.

- *Ejemplo 3:* Se supusieron condiciones iniciales nulas.

En este caso, solo para una relación  $\frac{\omega_0}{\alpha} \gg 1$  serán visibles las oscilaciones. La transición de frecuencias naturales reales a complejas es suave y no notable, sólo cuando la disipación se hace más pequeña  $\alpha \ll \omega_0$ ,  $\xi$  disminuye y vemos respuestas realmente oscilantes.

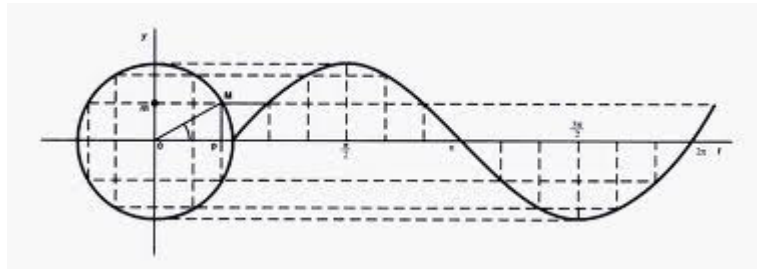
Una vez más se evidencia el carácter común de  $\alpha$ ,  $\omega_d$  y  $\omega_0$ . Todas son dimensionalmente  $s^{-1}$  (o frecuencia). Dado que  $\alpha$  está relacionado con el decaimiento, usualmente se mide en Neper / seg, y como las  $\omega$  se vinculan con la frecuencia en el sentido usual, se expresan en rad/seg.

Los casos interesantes son aquellos en los que  $\omega_d \approx \omega_0$ , o sea  $\alpha \ll \omega_0$ . En esa situación, las frecuencias naturales se ubican cerca del eje imaginario, la oscilación decae lentamente y aparece el fenómeno de resonancia, es decir, se produce un intercambio periódico de energía entre inductor y capacitor, con un muy pequeño amortiguamiento. El significado de las frecuencias naturales complejas queda ahora claro. Tenemos un comportamiento bidimensional: “oscilación” (a frecuencia  $\omega_d$ ) y “amortiguación” (a velocidad logarítmica  $\alpha$ ). Dado que un número complejo es simplemente un número bidimensional, sirve para describir este comportamiento, y la frecuencia natural compleja es, simplemente, una extensión de la frecuencia ordinaria. Gráficamente, será:



donde vemos el lugar geométrico espiral de las componentes, tomando en cuenta que  $k_1$  es imaginaria positiva, y  $k_2$  imaginaria negativa. Las componentes exponenciales complejas son líneas radiales, y su suma es real, tal como se indicó anteriormente. La magnitud en estudio será real, y oscilará a lo largo del eje real.

Si  $\alpha = 0$ , la trayectoria es una circunferencia y obtenemos la onda senoidal pura, que estudiaremos en el capítulo 9 como modo de alimentación de los circuitos:

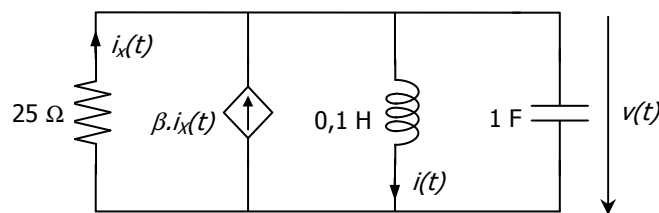


*Ejercicios de aplicación:*

1) En el siguiente circuito, son:  $v(0) = 10 \text{ V}$ ;  $i(0) = 20 \text{ A}$ ;  $\beta = 49$ .

a) Determinar la tensión  $v(t)$  para  $t \geq 0$ .

b) Calcular el valor de  $\beta$  que lleva al circuito al amortiguamiento crítico.



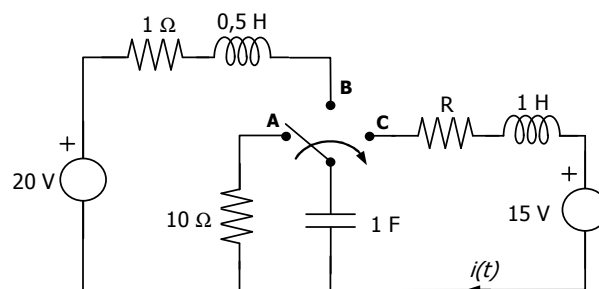
**Rta:** a)  $v(t) = 10.e^{-t} [\cos(3t) - \text{sen}(3t)] \text{ V} = 14,142.e^{-t} [\cos(3t + 45^\circ)] \text{ V}$   
 b)  $\beta = 157,114$

## EJERCICIOS ADICIONALES

1) Con el interruptor en la posición **1** se ha establecido el estado de régimen permanente.

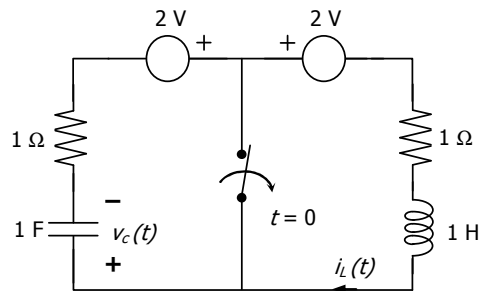
En  $t = 0$ , con el capacitor descargado, se conmuta a la posición **2**.

Determinar la evolución temporal de la corriente por la inductancia  $L_3$  para  $t \geq 0$  y representarla gráficamente.



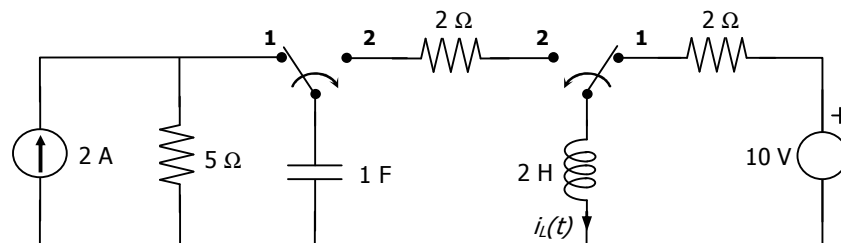
**Rta:**  $i_{L3}(t) = 1,18 \text{ sen}(100t) \text{ A}$ .

2) La llave en el siguiente circuito se abre en  $t = 0$ , luego de haber permanecido cerrada durante un tiempo suficiente para que se alcanzara el régimen permanente. Calcular  $i_L(t)$  para  $t \geq 0$ .



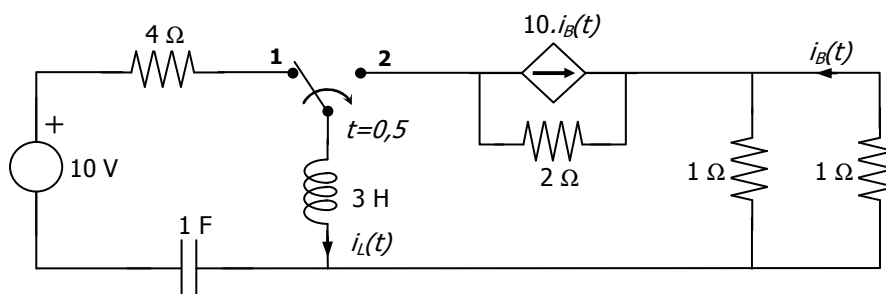
**Rta:**  $i_L(t) = -2 \cdot e^{-t}$  A.

3) Hallar la evolución de  $i_L(t) \forall t \geq 0$ . El circuito se encuentra en régimen permanente y en  $t = 0$  ambas llaves conmutan de la posición 1 a la 2.



**Rta:**  $i_L(t) = 7,071 \cdot e^{-0,5 \cdot t} (\cos 0,5 \cdot t - 45^\circ)$

4) En  $t = 0$  los almacenadores están descargados y la llave en la posición 1. A partir de allí el sistema evoluciona hasta que en  $t = 0,5$  s conmuta a la posición 2. Calcular y graficar la corriente  $i_L(t)$  a partir de  $t = 0$ , simplificando el circuito mediante la aplicación del teorema de Thevenin.



**Rta:**  $i_L(t) = [4,93 \cdot (e^{-0,33t} - e^{-t})] \cdot [\mu(t) - \mu(t - 0,5)] + 1,189 \cdot e^{-4,17(t - 0,5)} \cdot \mu(t - 0,5)$