A 2.14.2 TEORÍA DE CIRCUITOS I

CAPÍTULO 12

RESOLUCIÓN DE CIRCUITOS APLICANDO TRANSFORMADA DE LAPLACE

Cátedra de Teoría de Circuitos I

Edición 2013

RESOLUCION DE CIRCUITOS APLICANDO TRANSFORMADA DE LAPLACE.

12.1 Introducción

El cálculo de tensiones y corrientes en una red resistiva a la cual se aplica una cierta excitación es un procedimiento muy sencillo. Ya no lo es tanto en redes que también contienen elementos almacenadores de energía, como C y L, cuyas características volt-ampere están definidas mediante derivadas (v = L di/dt, i = C dv/dt). Las ecuaciones resultantes son integro-diferenciales, y su solución requiere un esfuerzo mayor, pudiéndose resolverlas por el denominado método clásico, o por aplicación de la transformada de Laplace, cuya utilización es más simple. En este capítulo veremos la transformación de Laplace y su aplicación a la resolución de circuitos con elementos R, L y C.

La aplicación de la transformada de Laplace nos permitirá también generalizar la excitación de los circuitos, y hallar propiedades que son muy útiles para la solución de numerosos problemas de ingeniería. Veremos que la transformación de Laplace es una generalización del concepto de fasor: el fasor $\dot{A}$ es el número complejo asociado a la senoide A cos (ω t + φ_A), mientras que la transformada de Laplace asocia una función compleja de la variable **s**, llamada F(s), con una función dada del tiempo, f(t), definida en el intervalo [0,∞}. La transformada de Laplace juega un papel muy importante relacionando el comportamiento temporal con el comportamiento frecuencial de los circuitos lineales invariantes en el tiempo.

12.2 La transformada de Laplace

Las variables v(t) e i(t) son "variables temporales', es decir, se miden en el dominio temporal, en un instante de tiempo particular, usando voltímetros y amperímetros, o pueden visualizarse en un osciloscopio. Podemos así obtener información sobre las mismas a partir de un trabajo experimental. Por lo tanto, independientemente del método que usemos para resolver un problema, veremos o interpretaremos mejor el resultado final en función de lo que ocurra en el dominio temporal. Para llegar a la solución podremos, sin embargo, dejar el dominio temporal por un tiempo, y retornar luego a él para interpretar los resultados.

La transformada de Laplace de la función f(t) definida en [0, ∞) esta dada por:

$$\mathcal{L}\left\{f\,(t)\right\} = \int_{0^-}^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt = F(s) \qquad (1)$$

Debido a que los límites de integración son t = 0 y t = ∞, la L-transformada de f(t) no es una función del tiempo sino de s, la cual se introduce a través del factor e^{-st}. La variable **s** se denomina variable frecuencia compleja. La función transformada, **F(s)**, es una función en el dominio de la frecuencia compleja, o, más brevemente, en el dominio frecuencial. Designaremos las funciones en el dominio temporal con minúscula, **f** y en el dominio frecuencial con mayúscula **F**.

Siendo que s es una variable compleja, sus partes real e imaginaria se designarán con σ y ω, respectivamente, de donde:

$$s = \sigma + j\,\omega \qquad \sigma \text{ real} \qquad y \qquad \omega \text{ real}$$

Podemos visualizar <u>s</u> como un punto en el plano complejo, siendo <u>σ</u> la abscisa y <u>ω</u> la ordenada.

En la integral de (1), t es la variable de integración, y se tomó como límite inferior 0^- de forma que, si f(t) incluye un impulso en el origen, quede dentro del intervalo de integración.

En el caso de que f(t) fuera una función de variable compleja (por ejemplo, $e^{(\alpha + j\beta)t}$), por Euler puede reducirse a una combinación de funciones de variable real.

También se sobreentiende que σ es lo suficientemente grande y positivo como para que $e^{-\sigma t}$ decaiga rápidamente y la integral converja, es decir, para que el área bajo la curva $|f(t)|\,e^{-\sigma t}$ sea finita.

Para que sea transformable, una función debe ser <u>seccionalmente continua</u> y de <u>orden exponencial</u>. Si f(t) contiene solo un número finito de discontinuidades finitas aisladas, es seccionalmente continua. Si, para M constante positiva y γ nº real, $|f(t)| < M\,e^{\gamma t}$ cuando $t \to \infty$, f(t) es de orden exponencial. Si bien la mayoría de las funciones asociadas con los circuitos reales son L-transformables, podemos sin embargo, generar una función que no lo sea. En efecto,

$$f(t) = e^{t2}$$

no puede transformarse porque no es exponencial, dado que no existen M y γ tales que $|f(t)| < M\,e^{\gamma t}$ cuando $t \to \infty$.

Luego de la transformación, las dos variables eléctricas v(t) e i(t) se vuelven V(s) e I(s), y están dadas por:

$$V(s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}\, v(t)\, dt \qquad I(s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}\, i(t)\, dt$$

con lo cual resultan funciones de <u>s</u>, y no podemos visualizarlas en un osciloscopio. Sin embargo, podemos trabajar con ellas en el dominio frecuencia, y aprender a usarlas y aun relacionar sus propiedades en el dominio frecuencial con las del dominio temporal.

Una función excitación muy frecuente es e^{st} . Si s = σ es real, según su signo representará un decaimiento exponencial (σ <0), una constante (σ = 0) o un crecimiento (σ >0).

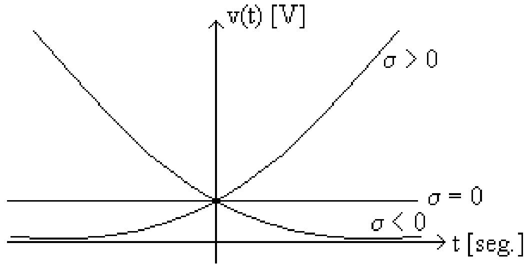
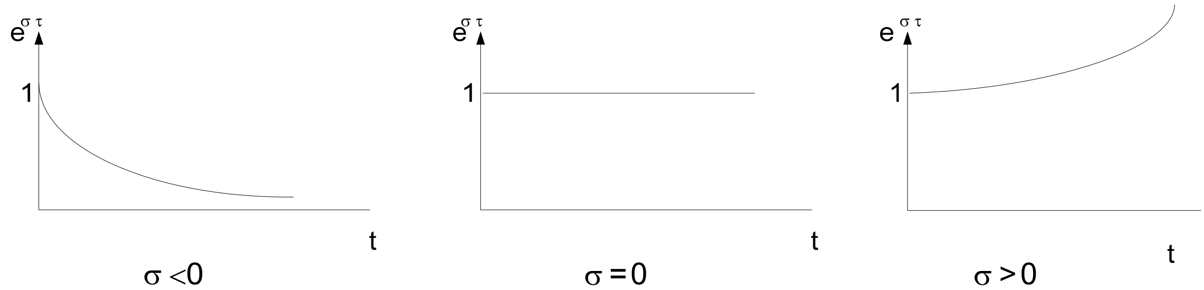


Fig. 1

Suponiendo que la excitación es $v(t) = e^{\sigma t}\ \mu(t)$, podrá representarse como sigue:



(a) (b) (c)

Fig. 2

Si aceptamos que s sea un n° complejo, es posible generar senoides amortiguadas exponencialmente, senoides puras, o senoides crecientes exponencialmente:

$$\text{a)}\ \frac{1}{2\,j}\,e^{(-\alpha + j\beta)\,t} - \frac{1}{2\,j}\,e^{(-\alpha - j\beta)\,t} = e^{-\alpha\,t}\,\text{sen}\,\beta\,t$$

$$\text{b)}\ \frac{1}{2\,j}\,e^{j\beta\,t} - \frac{1}{2\,j}\,e^{-j\beta\,t} = \text{sen}\,\beta\,t$$

$$\text{c)}\ \frac{1}{2\,j}\,e^{\alpha + j\beta)t} - \frac{1}{2\,j}\,e^{(\alpha - j\beta)\,t} = e^{\alpha\,t}\,\text{sen}\,\beta\,t$$

las cuales se grafican en la fig. 3:

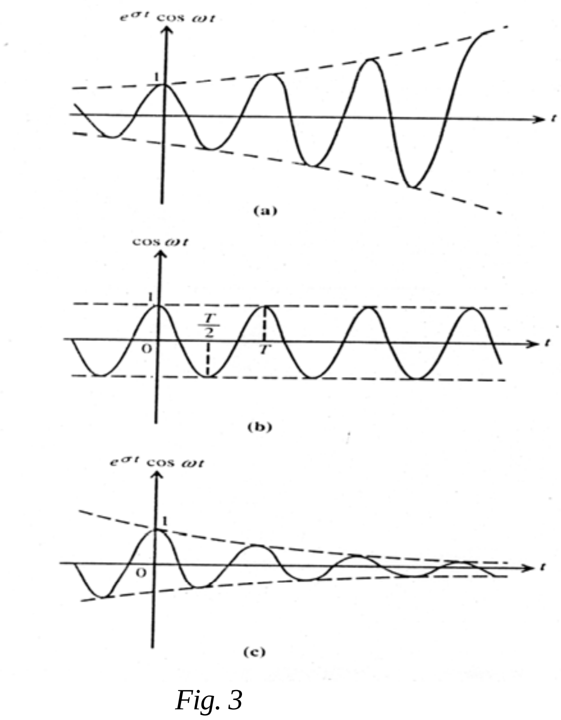


Fig. 3

La transformada de Laplace de la función excitación se obtiene por aplicación de la ec. (1).

$$e^{kt} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} e^{kt} dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{(k-s)t} dt = \frac{e^{(k-s)t}}{k-s} \Big|_0^{\infty} \qquad (2)$$

El exponente (k-s) es complejo. Sin embargo, pedimos que $\mathcal{R}e\{k\text{-}s\}$ sea < 0. Como resultado,

$$e^{(k-s)\,t} \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

En el límite inferior:

$$e^{(k-s)t}/k\text{-}s = 1 / k\text{-}s$$

por lo que la ecuación (2) se simplifica a:

$$\mathcal{L}[\, e^{k\,t}\,] = \frac{1}{s - k} \qquad (3)$$

Si k = 0, la ecuación (3) se reduce a:

$$\mathcal{L}\,[\,1\,] = \frac{1}{s} \qquad (4)$$

resultado importante y muy usado, dado que representa <u>la transformada de Laplace de la función escalón unitario</u> de la fig. 2b, la cual, tal como vimos en el capítulo 6, representa la aplicación a un circuito de una tensión continua de 1 Volt o de una corriente continua de 1 A en un tiempo t = 0.

Consideremos la ecuación (2). Si vemos ambos miembros como funciones de <u>k</u>, podemos derivarla respecto a k para obtener sucesivamente:

$$\mathcal{L}\left[t\, e^{k\,t}\right] = \frac{1}{(\,s - k\,)^2}$$

$$\mathcal{L}\,[\,t^2\, e^{k\,t}\,] = \frac{2}{(\,s - k\,)^3}$$

Por inducción se puede demostrar que, para cualquier entero positivo <u>n</u> es:

$$\mathcal{L}\;[\,t^n\, e^{k\,t}\,] = \frac{n!}{(\,s - k\,)^{n+1}}$$

Otra función ampliamente usada es la senoide. Dado que podemos expresar tanto el seno como el coseno en función de exponenciales, resulta:

$$\mathcal{L}\,[sen\,\omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}\,[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

Otro ejemplo que podemos ver es el de la función f(t) = δ(t) (impulso en el origen) de la cual queremos hallar la L-transformada.

Aproximamos el impulso por el pulso rectangular de área unitaria:

$$p_{\Delta}(t) = \begin{cases} 1/\Delta & 0 \le t \le \Delta \\ 0 & \textit{en cualquier otro punto} \end{cases}$$

Usando $p_{\Delta}(t)$ en la definición de L-transformada, obtenemos:

$$\int_0^{\infty} p_{\Delta}(t) e^{-st}\, dt = \int_0^{\Delta} \frac{1}{\Delta} e^{-st}\, dt = -\frac{1}{\Delta s} e^{-st} \Big|_0^{\Delta} = \frac{1 - e^{-s\Delta}}{\Delta s}$$

Ahora hacemos $\Delta \to 0$, entonces $p_{\Delta}(t) \to \delta(t)$ y $\mathcal{L}\{p_{\Delta}(t)\} \to \mathcal{L}\{\delta(t)\}$:

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \lim_{\Delta\to 0} (1 - e^{-s\Delta})/ \Delta s = \lim_{\Delta\to 0} (1 - 1 + s\Delta - s^2\Delta^2 + ...)/ \Delta s = 1$$

Otra forma de verlo es mediante la aplicación de la definición:

$$F(s) = \int_{0-}^{\infty} \delta(t)\, e^{-st}\, dt = \int_{0-}^{0+} \delta(t)\, e^{-st}\, dt = e^{-s(0)} = 1 \qquad (5)$$

12.3 Propiedades y reglas operacionales.

Al usar la transformación definida por la ecuación 1 podemos desarrollar cinco reglas operativas necesarias para obtener la solución en el dominio frecuencial de ecuaciones diferenciales lineales a coeficientes constantes. Se supone que la función en estudio es L-transformable.

- ***Propiedad 1: Unicidad***

La $\mathcal{L}$-transformada establece una correspondencia uno a uno entre la función temporal f(t) definida en el intervalo [0, ∞) y su $\mathcal{L}$ -transformada F(s). Esto es un teorema importante de Análisis Matemático, el cual no probaremos, pero que es extremadamente útil, ya que nos permite transformar un problema en el dominio temporal en uno en el dominio frecuencial, resolverlo en el dominio frecuencial y volver al temporal. La unicidad garantiza que el procedimiento conduce a <u>la</u> solución del problema original.

<u>Regla 1:</u> Si $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son funciones del tiempo, luego:

$$\mathcal{L}\{f_1(t) + f_2(t)\} = F_1(s) + F_2(s)$$

Es decir, la L-transformada de la suma de dos funciones es igual a la suma de las L-transformadas de cada una de ellas.

Regla 2: Si a no es una función de t, entonces:

$$\mathscr{L}\{a\, f(t)\} = a\, \mathscr{L}\{f(t)\} = a\, F(s)$$

Las reglas 1 y 2 nos permiten enunciar la siguiente propiedad:

- ***Propiedad 2: Linealidad***

$$\mathscr{L}\ \{c_1\, f_1(t) + c_2\, f_2(t)\} = c_1\, \mathscr{L}\ \{f_1 t\} + c_2\, \mathscr{L}\ \{f_2(t)\} = c_1F_1(s) + c_2F_2(s)$$

con c_1, c_2 constantes reales o complejas cualesquiera. Su demostración se basa en las propiedades de linealidad de la integral.

Regla 3:

$$\mathscr{L}\ \frac{d\ f(t)}{dt} = s\,F(s) - f(\,0\,) \tag{6}$$

supuesto que d f(t)/ dt es L-transformable, y, en forma implícita, que f(t) es derivable. En particular, si f(t) posee una discontinuidad en t=0, no posee derivada en t=0. Sin embargo, podemos usar la ecuación 6 si se toma la derivada por izquierda:

$$\frac{d\ f(\,t\,)}{d\,t}\Big| \quad t \to 0^-$$

en cuyo caso f(0) se toma como $f(0^-)$.

Si no hay condiciones iniciales, $f(0^-) = 0$, entonces la ecuación 6 se reduce a:

$$\mathscr{L}\ \frac{d\ f(\,t\,)}{d\,t} = s\,F(\,s\,) \tag{7}$$

con lo que la derivación respecto de t en el dominio temporal significa multiplicar por s en el dominio frecuencial.

Regla 4:

$$\mathscr{L}\ \frac{d^2\ f(\,t\,)}{d\,t^2} = s^2\,F(\,s\,) - s\ f\,(\,0^-) - f\,(\,0^-\,) \tag{8}$$

donde $f'(0^-)$ es la derivada de f(t) respecto a t evaluada en $t = 0^-$. Este resultado supone que $d^2f(t)/dt^2$ es L-transformable, y se obtiene fácilmente aplicando la ecuación (6) a f ´ (t).

Regla 5:

$$\mathscr{L} \int_0^t f(\tau)\,d\tau = \frac{1}{s}\,F(s) \tag{9}$$

Es decir, la integración respecto a t en el dominio temporal se traduce en una división por s en el dominio frecuencial.

Ejercicio: *Demostrar que:*

a) $\mathcal{L}\ \frac{d\ f(t)}{dt} = s\ F(s) - f(0)$ b) $\mathcal{L} \int_0^t f(\tau)\, d\tau = \frac{1}{s} F(s)$

12.4 Transformación de ecuaciones diferenciales

Consideremos la ecuación diferencial de 2º orden lineal a coeficientes constantes:

$$a_2 \frac{d^2 f(t)}{dt^2} + a_1 \frac{df(t)}{dt} + a_o\, f(t) = g(t) \tag{10}$$

Los factores a y g (t) son conocidos, y el problema consiste en hallar la solución de la ecuación, o sea f(t). Suponemos que g(t) y f(t) son L-transformables, con G(s) y F(s) sus transformadas. Mediante las reglas dadas anteriormente, transformaremos la ecuación anterior:

$$\mathrm{L}\{ a_2 \frac{d^2\ f(t)}{dt^2} + a_1 \frac{df(t)}{dt} + a_{of}\,(t)\} = L\{g(t)\}$$

$$\mathrm{L}\{ a_2 \frac{d^2\ f(t)}{dt} \} + L\{ a_1 \frac{df(t)}{dt} \} + L\{ a_{of}\,(t)\} = L\{g(t)\} \tag{11}$$

$$a_2\, \mathrm{L}\{ \frac{d^2\ f(t)}{dt^2} \} + a_1\, \mathrm{L}\{ \frac{df(t)}{dt} \} + a_o\, \mathrm{L}\{f(t)\} = \mathrm{L}\{g(t)\}$$

$$a_2\,[\, s^2 F(s) - s\ f(0) - f'(0)] + a_1\,[s\, F(s) - f(0)] + a_o\, F(s) = G(s)$$

Luego, la ecuación diferencial 10 se ha transformado en la ecuación algebraica (11), que puede resolverse para la transformada de la solución deseada.

$$F(s) = \frac{G(s) + a_2\,[sf(0) + f'(0)] + a_1\ f(0)}{a_2 s^2 + a_1 s + a_o} \tag{12}$$

Si todas las condiciones iniciales son nulas, o sea f(0) = f'´(0) = 0, entonces la ecuación se reduce a:

$$F(s) = \frac{G(s)}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

que es la solución en el dominio frecuencial de la ecuación diferencial con condiciones iniciales nulas. Para volver al dominio temporal debemos hallar la transformada inversa de F(s), o sea:

$$f(t) = \mathrm{L}^{-1}\{F(s)\} = L^{-1}\{ \frac{G(s)}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \}$$

Por el momento, nos limitaremos a obtener la L-transformada de la solución deseada, y posteriormente veremos cómo obtener la transformada inversa.

Ejercicios de aplicación:

1) *Hallar la Transformada de Laplace de las siguientes funciones:*
   a) $f_a(t) = (3.e^{-2t} + e^{-t}).\mu(t)$
   b) $f_b(t) = (t^3 + t^2 + t + 1).\ \mu(t)$
   c) $f_c(t) = [1 - 2.e^{-2t} + 4.e^{-t}.\cos(3t)].\mu(t)$
   d) $f_d(t) = (8.e^{-1000t} - 5.e^{-2000.t}).\mu(t)$
   e) $f_e(t) = \cosh(t).\mu(t)$

Rta:

a) $F_a(S) = \dfrac{3}{S+2} + \dfrac{1}{S+1}$ ***b)*** $F_b(S) = \dfrac{6}{S^4} + \dfrac{2}{S^3} + \dfrac{1}{S^2} + \dfrac{1}{S}$

c) $F_c(S) = \dfrac{1}{S} - \dfrac{2}{S+2} + \dfrac{4(S+1)}{(S+1)^2 + 9}$ ***d)*** $F_d(S) = \dfrac{8}{S+1000} - \dfrac{5}{S+2000}$

e) $Fe(S) = \dfrac{S}{S^2 - 1^2}$

2) *Hallar la transformada de Laplace de las siguientes ecuaciones diferenciales:*

a) $2\dfrac{d}{dt}v(t) + 3v(t) = e^{-3t}\mu(t) \quad ; \quad v(0) = 2$

b) $5\dfrac{d^2}{dt^2}v(t) + 3\dfrac{d}{dt}v(t) - 2v(t) = sen(6t).\mu(t) \quad ; \quad v(0) = 2\ ;\ \dot{v}(0) = 3$

c) y de la siguiente función: $f(t) = t.[\mu(t) - \mu(t-2)]$

Rta:

a) $V(S) = \dfrac{2(s+13/4)}{(s+3).(s+3/2)}$ b) $V(S) = \dfrac{1}{5}.\dfrac{10.s^3 + 21.s^2 + 360.s + 762}{(s^2 + 36)(s - 0,4)(s+1)}$ c)

$$F(S) = \frac{1}{s^2}e^{-2S}\ \frac{1}{s^2} - 2e^{-2S}\ \frac{1}{s}$$

12.5 Transformación de las leyes de Kirchhoff y relaciones volt-ampere.

En el dominio temporal, las leyes de Kirchhoff de tensión y de corriente son:

Σ i(t) = 0 en cada uno de los nudos del circuito

Σ v(t) = 0 para cada camino cerrado del circuito

En el dominio transformado resultan:

Σ I(s) = 0 Σ V(s) = 0

Si analizamos los elementos simples, R, L y C, vemos que:

- en una **resistencia**, la ley de Ohm en el dominio temporal es:

v(t) = R i(t)

y en el dominio <u>s</u>: $V(s) = R\, I(s)$

- en un **capacitor**, es:

$$i(t) = C\, dv(t)/dt \qquad \text{ó} \qquad v(t) = \gamma + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\, d\tau$$

donde γ representa la condición inicial de tensión, o sea $\gamma = v(0)$. Transformando, resulta:

$$\begin{aligned} I(s) &= C\,[\, s\, V(s) - v(0^-)\,] \\ I(s) &= C\,[\, s\, V(s) - \gamma\,] \end{aligned} \quad (13) \qquad \text{ó} \qquad V(s) = \frac{\gamma}{s} + \frac{1}{Cs} I(s) \quad (14)$$

Las ecuaciones (13) y (14) son equivalentes. En particular, si $v(0) = 0$, entonces la ecuación (14) se reduce a:

$$V(s) = \frac{1}{sC} I(s) \qquad (15)$$

expresión de la tensión en un capacitor con condiciones iniciales nulas, siendo $\frac{1}{sC}$ la <u>reactancia del capacitor en el dominio transformado</u>.

- en una **inductancia** será:

$$v(t) = L\frac{di}{dt} \qquad i = \frac{1}{L}\int_0^t v(\tau)\, d\tau + i(0) \qquad (16)$$

Transformando obtendremos:

$$V(s) = Ls\, I(s) - L\, i(0) \qquad I(s) = \frac{1}{sL} V(s) + \frac{i(0)}{s} \qquad (17)$$

Si $i(0) = 0$, entonces:

$$I(s) = \frac{1}{sL} V(s) \qquad V(s) = sL\; I(s) \qquad (18)$$

siendo <u>sL</u> la <u>reactancia del inductor en el dominio transformado</u>.

En forma genérica, las impedancias se simbolizan con Z(s) y las admitancias con Y(s), siendo:

$$Y(s) = \frac{1}{Z(s)} \qquad \text{de donde:} \qquad V(s) = I(s)\, Z(s) \qquad I(s) = V(s)\, Y(s)$$

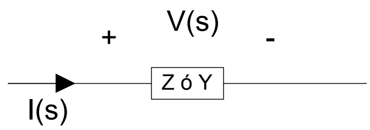


Fig. 4

Vemos así que es necesaria una sola ecuación, $V(s) = I(s)\, Z(s)$ ó $I(s) = V(s)\, Y(s)$ para describir las propiedades en bornes de una resistencia, inductancia o capacidad, y es esta generalidad la que hace tan útil el concepto de impedancia (o admitancia), a lo cual se agrega el hecho de que todas las relaciones en el dominio frecuencial son algebraicas, no necesitándose ni integrales ni derivadas en las expresiones.

Tal como hicimos la representación gráfica de las condiciones iniciales en el dominio temporal, podemos hacer dicha representacón en el dominio frecuencial, con lo que tenemos:

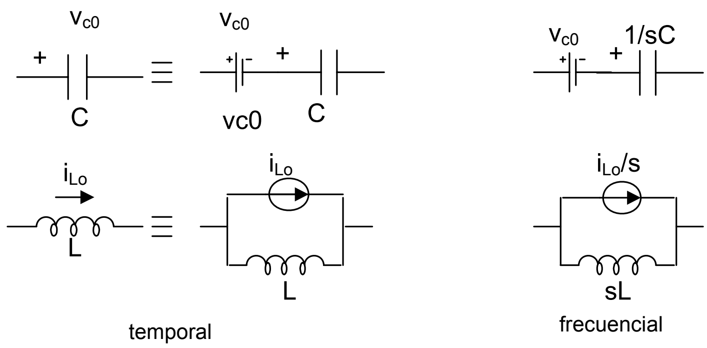


Fig. 5

12.6 Transformación de ecuaciones de redes

Para ver cómo se aplica el método a la resolución de circuitos, consideremos la red de la fig. 6a.

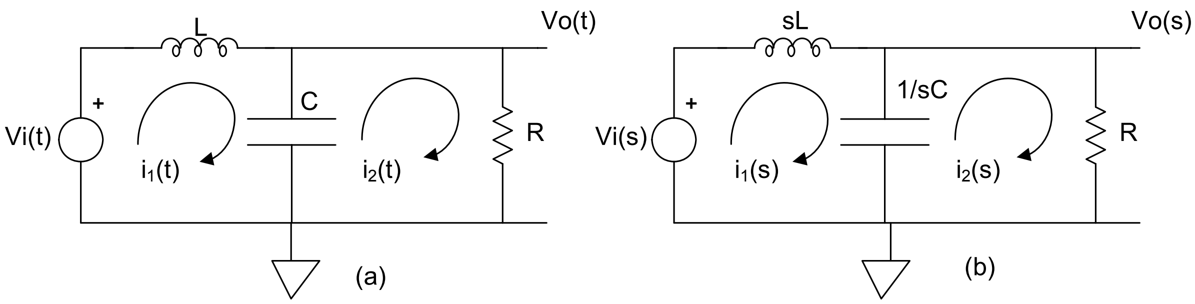


Fig. 6

Por simplicidad, las condiciones iniciales son nulas, y queremos hallar $V_o(s)$. Aplicaremos el método de mallas, y escribiendo las ecuaciones por inspección llegamos a:

$$
\begin{aligned}
&L\frac{d\,i_1}{d\,t}+\frac{1}{C}\int_0^t i_1(\tau)\,d\tau+\frac{1}{C}\int_0^t i_2(\tau)\,d\tau=v_i\\
&-\frac{1}{C}\int_0^t i_1(\tau)\,d\tau+R\,i_2(t)+\frac{1}{C}\int_0^t i_2(\tau)\,d\tau=0
\end{aligned}
\qquad (19)
$$

Transformando, y recordando que $v(0) = 0$, $i_L(0) = 0$, será:

$$s\,L\,I_1(s) + \frac{1}{s\,C}\,I_1(s) - \frac{1}{s\,C}\,I_2(s) = V_i(s)$$

$$-\frac{1}{s\,C}\,I_1(s) + R\,I_2(s) + \frac{1}{s\,C}\,I_2(s) = 0$$

donde V_i (s) es la $\mathfrak{L}$ - transformada de $v_i(t)$. Ordenando, será:

$$\begin{aligned}(L\,s + \frac{1}{s\,C})\,I_1(s) - \frac{1}{s\,C}\,I_2(s) &= V_i(s)\\ -\frac{1}{s\,C}\,I_1(s) + (R + \frac{1}{s\,C})\,I_2(s) &= 0\end{aligned} \qquad (20)$$

las cuales pudieron haber sido escritas directamente por inspección del circuito transformado de la figura 5b. El determinante de (20) es:

$$\Delta = \begin{vmatrix} sL + \frac{1}{sC} & -\frac{1}{sC} \\ -\frac{1}{sC} & R + \frac{1}{sC} \end{vmatrix} = \frac{LR}{s}\left(s^2 + \frac{1}{RC}\,s + \frac{1}{LC} \right) \qquad (21)$$

Vemos que <u>todos los términos son positivos</u>, el cual es siempre el caso en que las fuentes son todas independientes.

$$I_2(s) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\dfrac{V_i(s)}{s\,C}}{\dfrac{L\,R}{s}\left(s^2 + \dfrac{1}{R\,C}\,s + \dfrac{1}{L\,C} \right)} =$$

$$= \left[\frac{\dfrac{1}{R\,L\,C}}{\left(s^2 + \dfrac{1}{R\,C}\,s + \dfrac{1}{L\,C} \right)} \right] V_i(s)$$

Para hallar V_o (s) debemos hallar primero $I_2(s)$. Como V_o (s) = I_2 (s) R tenemos:

$$V_o(s) = \frac{\dfrac{1}{L\,C}}{\left(s^2 + \dfrac{1}{R\,C}\,s + \dfrac{1}{L\,C} \right)}\,V_i(s) \qquad (22)$$

Si lo hubiésemos resuelto por nudos, hubiera sido:

$$V_o(s)\left[\frac{1}{R} + s\,C + \frac{1}{L\,s} \right] - V_i(s)\,\frac{1}{s\,L} = 0$$

A partir de la cual, despejando $V_o\,(s)$, llegamos a la ecuación (22).

Comentario:

Supongamos tener un circuito serie RLC, con condiciones iniciales nulas, alimentado con una excitación e(t) = Im (E_s e $^{j\omega t}$). En esas condiciones, tendremos:

- *ecuación fasorial:*

$$\dot{I}\,[\,R + j\,(\,\omega L - \frac{1}{\omega C}\,] = \dot{E}$$

- *ecuación transformada:*

$$I(s)\,[\,R + sL + \frac{1}{sC}\,] = E(s)$$

Vemos que ambas ecuaciones tienen exactamente la misma forma, excepto que **jω** ha sido reemplazado por **s**. Sin embargo, ambas poseen significados diferentes. La ecuación fasorial relaciona el fasor asociado a la excitación $\dot{E}_s$ con el fasor $\dot{I}$ que representa la respuesta en régimen permanente senoidal del circuito. La ecuación transformada vincula la transformada de la función excitación E(s) con la función I(s), la cual representa la L-transformada de la respuesta con condiciones iniciales nulas de la entrada e(t), con lo cual se nota la generalidad, ya que e(t) puede ser cualquier función L-transformable.

12.7 Impedancia y admitancia

Hemos visto que la impedancia de un resistor es R, y su admitancia G = 1 / R; en un inductor Z(s) = sL, Y(s) = 1/sL, y en un capacitor Z(s) = 1/sC, Y(s) = sC. Generalizaremos ahora estos resultados, definiendo la impedancia transformada. Para ello, consideraremos una red de dos terminales que contiene resistencias, inductancias y capacidades conectadas de cualquier manera, pero que no contiene fuentes de ningún tipo, ni sus elementos poseen condiciones iniciales.

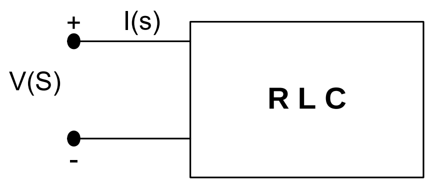


Fig. 7

Las variables serán designadas V(s) e I(s). Así, la impedancia y la admitancia en el dominio transformado se definen como:

$$Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)} \qquad Y(s) = \frac{I(s)}{V(s)}$$

Y dado que ambas variables son función de s, la impedancia y la admitancia son funciones de la variable s.

NOTA: Ya sea que la impedancia o la admitancia de entrada a un circuito se calcule de forma *analítica o a través de la aplicación de una tensión (o corriente) y la medición de la corriente (o tensión) resultante para luego proceder a efectuar su cociente, se deberá cuidar que la red esté* *__totalmente pasivada.__*

12.8 Conexión serie y paralelo de impedancias.

En la figura 8a vemos dos impedancias Z_1 y Z_2 conectadas en serie. La corriente que circula por ambas es la misma, por lo que la tensión en bornes de la combinación Z_1 Z_2 será:

$$V = V_1 + V_2 = I\,Z_1 + I\,Z_2 = I\,(Z_1 + Z_2) = I\,Z_{eq} \qquad \rightarrow \qquad Z_{eq} = Z_1 + Z_2$$

Es decir, la impedancia equivalente será la suma de las dos impedancias. Así, para el caso mostrado en la figura 8b, la impedancia entre 1 y 2 es:

$$Z_{eq} = Z_1 + Z_2 = sL_1 + sL_2 = s(L_1 + L_2) = s\,L_{eq}$$

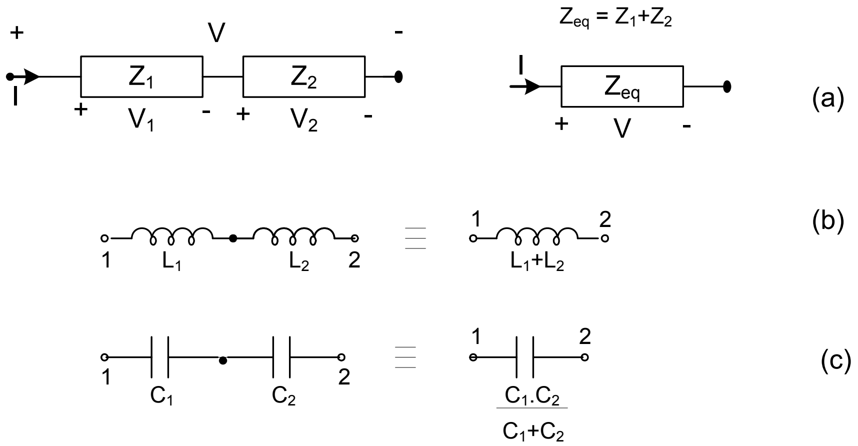


Fig. 8

y en la figura 8c, la impedancia equivalente entre 1 y 2 es:

$$Z_{eq} = \frac{1}{s\,C_1} + \frac{1}{s\,C_2} = \frac{1}{s\,\dfrac{C_1\,C_2}{C_1 + C_2}} = \frac{1}{s\,C_{eq}}$$

con lo cual entre los bornes (1) y (2) vemos una capacidad equivalente $C_{eq} = C_1C_2/C_1 + C_2$.

Si se conectan en serie __n__ impedancias, la impedancia equivalente será:

$$Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + ... + Z_n$$

o sea, la suma de las n impedancias individuales.

En la figura 9a, Z_1 y Z_2 están conectadas en paralelo, sometidas ambas a igual d.d.p. La corriente por la combinación Z_1Z_2 en paralelo es:

$$I_1 + I_2 = V\,Y_1 + V\,Y_2 = V\,(Y_1 + Y_2) = V\,Y_{eq} \qquad \rightarrow \qquad Y_{eq} = Y_1 + Y_2 \qquad (23)$$

Dado que la admitancia es la inversa de la impedancia, la ecuación (23) puede escribirse como:

$$Y_{eq} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_1\,Z_2} \;\Rightarrow\; Z_{eq} = \frac{Z_1\,Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

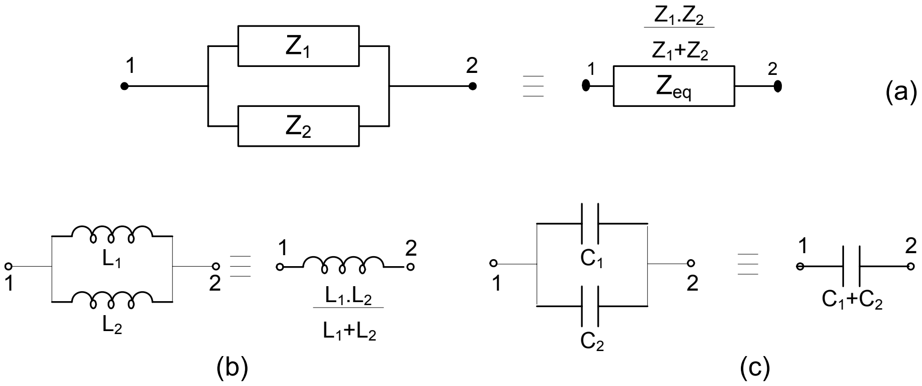


Fig. 9

En el caso de conectar dos inductancias en paralelo (figura 9b), será:

$$Y_{eq} = Y_1 + Y_2 = \frac{1}{s\,L_1} + \frac{1}{s\,L_2} = \frac{L_1 + L_2}{s\,L_1\,L_2} = \frac{1}{s\,L_1\,L_2/(L_1 + L_2)} = \frac{1}{s\,L_{eq}}$$

mientras que al conectar dos capacitores en paralelo (figura 9c) tendremos:

$$Y_{eq} = s\,C_1 + s\,C_2 = s\,(C_1 + C_2) = s\,C_{eq}$$

Si se conectan n admitancias en paralelo, será:

$$Y_{eq} = Y_1 + Y_2 + ... + Y_n$$

o sea, la suma de las n admitancias individuales.

Tal como hemos visto en otras oportunidades, si bien es indistinto hablar de la Z o de la Y de un elemento, cuando están conectados en serie es mas simple trabajar con Z, mientras que si están en paralelo conviene trabajar con Y.

12.9 Transformación de fuentes.

Sabemos que una fuente de tensión en serie con una impedancia puede convertirse en una fuente de corriente en paralelo con la misma impedancia, y viceversa. Esta equivalencia de dipolos es válida también en el dominio frecuencial tal como veremos a continuación.

Ejemplo:

Convertir la fuente de tensión de la figura en fuente de corriente:

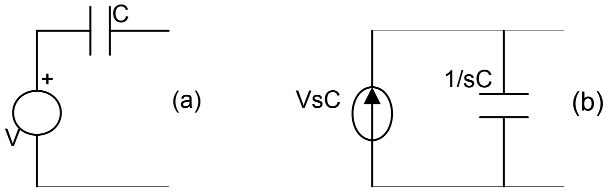


Fig. 10

La corriente de cortocircuito de la fuente mostrada es:

$$I_{sc}(s) = V(s) \cdot Y(s) = V(s) \cdot s\,C$$

por lo que la fuente de corriente equivalente será la de la fig 10 b.

12.10 Divisor de tensión - Divisor de corriente.

En forma genérica, será:

- ***Divisor de tensión***: Lo planteamos en la figura 11 a:

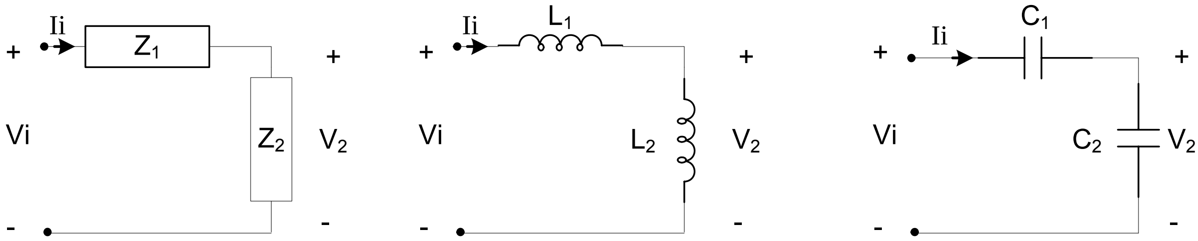


Fig. 11 (a)

$$V_2(s) = V_i(s)\frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = V_i(s)\frac{Y_1}{Y_1 + Y_2}$$

- ***Divisor de corriente***: lo planteamos en la figura 11 b :

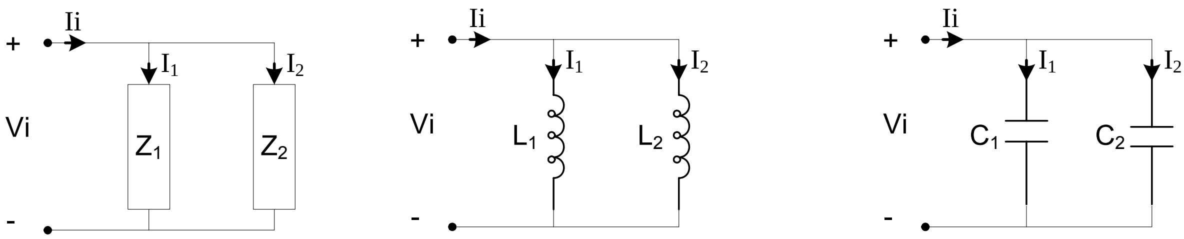


Fig. 11 b

$$I_i(s) = I_1(s) + I_2(s) \;\Rightarrow\; V_i(s) = I_1(s)\,Z_1(s) = I_2(s)\,Z_2(s) = I(s)\,Z_{eq}(s)$$

por lo que:

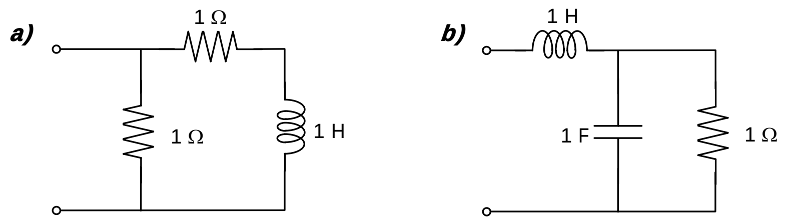
$$I_1(s)\,Z_1)s) = I_i\;(s)\,\frac{Z_1(s)\,Z_2(s)}{Z_1(s)+Z_2(s)} \quad\Rightarrow\quad I_1(s) = I_i(s)\,\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)+Z_2(s)}$$

$$I_2(s) = I_i(s)\,\frac{Z_1(s)}{Z_1(s)+Z_2(s)}$$

La extensión al dominio transformado de los distintos teoremas conocidos para la resolución de circuitos (superposición, Thévenin, Norton), así como de los distintos métodos de resolución, es puramente formal.

Ejercicios de aplicación:

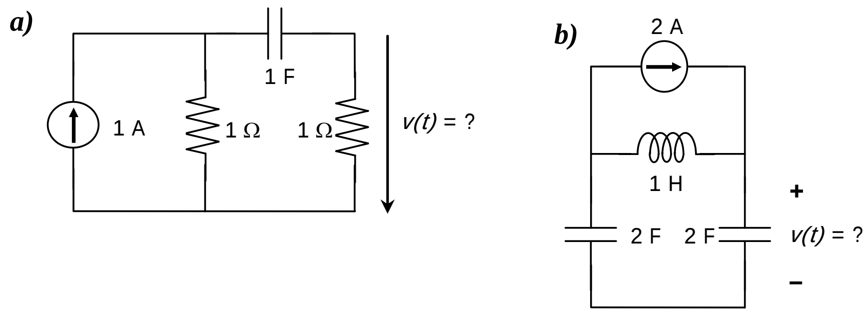
1) Hallar la impedancia de las redes mostradas en la siguiente figura:



Rta:

a) $z(s) = \dfrac{s+1}{s+2}$ ***b)*** $z(s) = \dfrac{s^2+s+1}{s+1}$

2) Para las redes mostradas en la figura, obtener las tensiones o corrientes incógnita (marcadas con un signo de interrogación), suponiendo condiciones iniciales nulas.



Rta: ***a)*** $v(t) = 0{,}5.e^{-0{,}5.t}\,\mu(t)$ ***b)*** $v(t) = \mathrm{sen}(t).\mu(t)$

12. 11 Función transferencia.

Cuando trabajamos con dipolos, utilizamos el concepto de impedancia para relacionar corrientes y tensiones. Al tratar con redes con mas pares de teminales, usaremos el concepto de función transferencia , el cual nos permitirá relacionar la tensión y la corriente en un par de terminales con la tensión y la corriente en otro par. En la figura 12 se muestra una red con tres pares de terminales, alimentada con una fuente de tensión (fig. 12a) o con una fuente de corriente (fig. 12b). La red **N** es totalmente pasiva.

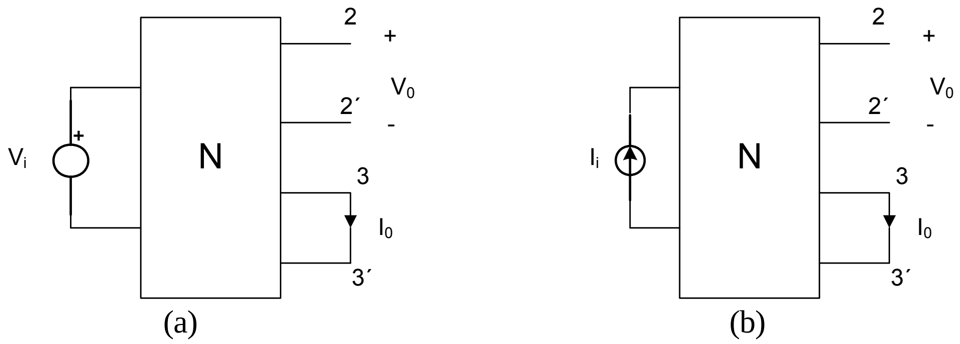


Fig. 12

Definiremos **función transferencia T(s)** como:

$$T(s) = \frac{salida\,(s)}{entrada\,(s)} = \frac{respuesta\,(s)}{excitacion\,(s)}$$

En la figura 12 (a) la entrada (o excitación) es una fuente de tensión y se consideran dos salidas (o respuestas), por lo que hay dos funciones transferencia, una para cada una de ellas, que son:

$$T_1(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} \quad relacion\ de\ transformacion\ de\ tension$$

$$T_2(s) = \frac{I_o(s)}{V_i(s)} \quad transadmitancia$$

En la figura 12(b) la entrada es una fuente de corriente, y las correspondientes funciones transferencia son:

$$T_1(s) = \frac{V_o(s)}{I_i(s)} \quad trans-impedancia$$

$$T_2(s) = \frac{V_o(s)}{I_i(s)} \quad relacion\ de\ transferencia\ de\ corrientes$$

Vemos así que hay cuatro posibles combinaciones de variables:

$$\frac{\mathrm{V_0(s)}}{V_i(s)} \qquad \frac{\mathrm{I_0(s)}}{V_i(s)} \qquad \frac{\mathrm{V_0(s)}}{I_i(s)} \qquad \frac{\mathrm{I_0(s)}}{I_i(s)}$$

Si en la red hay más de una fuente, usamos el principio de superposición, y cada entrada contribuye a la salida con su propia función transferencia.
Veamos, por ejemplo, la figura 13 donde suponemos que en la red **N** no hay fuentes y que todos los elementos pasivos dentro de la misma poseen condiciones iniciales nulas:

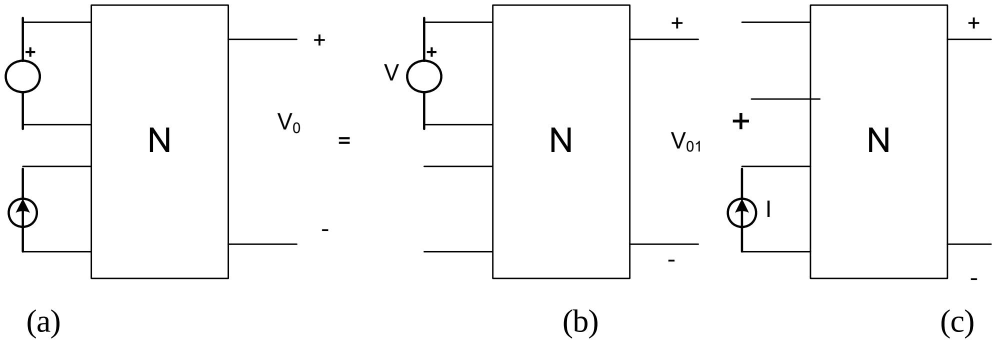


Fig. 13

En 13 (b) será:

$$V_{o1}(s) = T_v\, V(s)$$

En 13 (c) será:

$$V_{o2}(s) = T_i\, I(s)$$

Por superposición:

$$V_o(s) = V_{o1}(s) + V_{o2}(s) = T_v\, V(s) + T_i\, I(s)$$

12.12 Naturaleza de la respuesta.

Si observamos la forma de las soluciones en el dominio frecuencial de las redes vistas, vemos que la respuesta R(s) es el cociente de dos polinomios:

$$R(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \ldots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \ldots + b_1 s + b_0}$$

Esta ecuación es cierta para cualquier red RLC excitada con fuentes independientes genéricas cuyas transformadas de Laplace son de la forma

$$(c_o + c_1 s + c_2 s^2 + \ldots) / (d_o + d_1 s + d_2 s^2 + \ldots)$$

pudiendo también contener fuentes controladas lineales.

En general, el grado del polinomio numerador m es menor que el grado del denominador, n. Si **m es mayor o igual que n**, entonces R(s) **se divide** hasta llegar a obtener que el grado del numerador sea menor que el grado del denominador. En este caso, obtendremos el polinomio cociente q(s) y el polinomio resto r(s):

$$N(s) = q(s)\, D(s) + r(s) \qquad \text{con grado de } r(s) < \text{grado de } D(s)$$

luego:

$$R(s) = q(s) + r(s) / D(s)$$

12.13 Polos

Frecuentemente es necesario factorear el polinomio denominador, un proceso que puede llevarse a cabo haciendo cero el mismo:

$$D(s) = b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + ...+ b_1 s + b_0 = 0$$

y hallando las <u>n</u> raíces de la ecuación resultante, las cuales se denominan <u>polos de R(s)</u> y se designan con el símbolo p_i (i = 1,2,..). Luego, la ecuación anterior puede escribirse como:

$$D(s) = b_n (s - p_1)(s - p_2) ...(s - p_n)$$

$$R(s) = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + ... + a_1 s + a_0}{b_n (s - p_1)(s - p_2) ... (s - p_n)}$$

Si el polinomio denominador es de 1º o 2º grado, los polos pueden determinarse fácilmente. Si es de grado 3 o mayor, excepto para casos factoreables por inspección se recurrirá a métodos numéricos.

Un polo puede ser real o complejo. Si son complejos, aparecen en pares conjugados, o sea **c + j d** y **c - j d**. Si este es el caso, los coeficientes **b** podrán no ser todos números reales.

En la figura 14 se representan los polos en el plano complejo (o plano s): la abscisa será Re(s) y la ordenada j Im (s). Los polos podrán estar ubicados en el <u>semiplano superior</u>, o en el <u>semiplano inferior</u> respecto al eje real, pudiéndose encontrar asimismo en el <u>semiplano derecho</u> o el <u>semiplano izquierdo</u> respecto del eje imaginario.

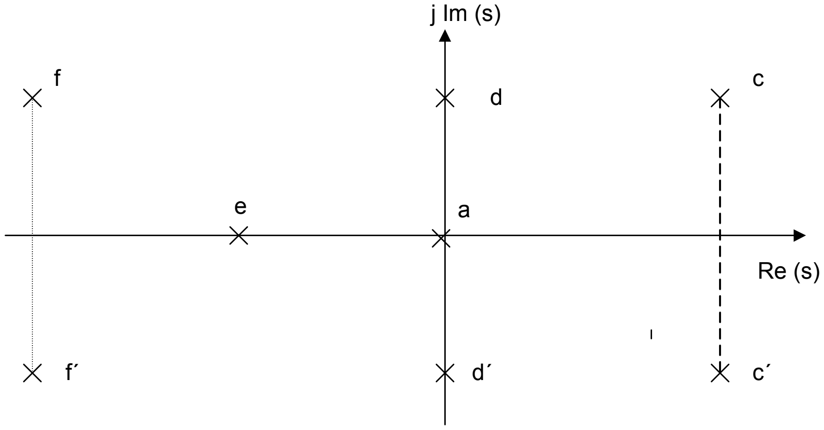
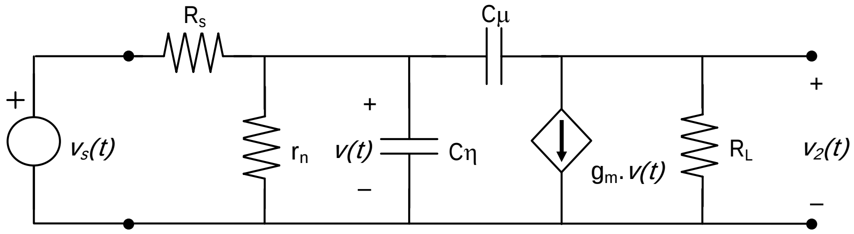


Fig. 14

El polo **a** esta en el origen, **b** es real positivo, **c y c'** son complejos conjugados con parte real positiva, **d y d'** son conjugados imaginarios puros, **e** es real negativo, y **f y f'** son complejos conjugados con parte real negativa. Conocidos los polos, podremos hallar D(s).

Ejercicios de aplicación:

1) Para el circuito equivalente en pequeña señal del amplificador a transistores mostrado, obtener la función transferencia $H(s) = V_2(s)/V_s(s)$.



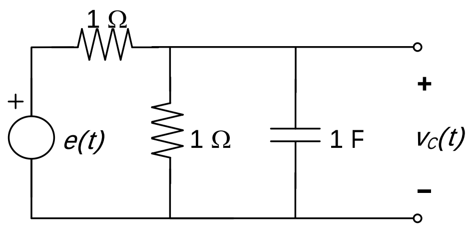
<u>***Rta:***</u> $\dfrac{V_2(s)}{V_s(s)} = \dfrac{S.C_\mu - g_m}{C_\mu C_\eta R_L S^2 + (C_\eta + C_\mu + C_\mu g_t R_L + C_\mu g_m R_L)S + g_t} \cdot \dfrac{R_L}{R_S}$; con $g_t = \dfrac{1}{R_S} + \dfrac{1}{r_n}$

2) Cuando se aplica a una red RLC serie un escalón unitario, queremos que la tensión de salida sea $v_0(t) = 2.e^{-t}.\text{sen}\ t$. Diseñar la red.

<u>***Rta:***</u> *Proponiendo C = 0,5 F resulta L = 1 H y R = 2 Ω.*

3) Hallar la expresión de $v_C(t)$ $\forall t \geq 0$, si:

- ***a)*** *$e(t) = e^{-t}.\mu(t)$ y $v_C(t = 0^-) = 2$ V.*
- ***b)*** *$e(t) = \text{sen}(3t).\mu(t)$ y $v_C(t = 0^-) = 0$ V.*



<u>***Rta:***</u> ***a)*** *$v_C(t) = (e^{-t} + e^{-2t}).\mu(t)$*

b) *$v_C(t) = [-0{,}2773.\cos(3t + 33{,}69^\circ) + 0{,}2307.e^{-2t}].\mu(t)$*

4) Cuando a un circuito con condiciones iniciales nulas se le aplica una tensión $v_e(t) = 30.\mu(t)$, la respuesta es $v_0(t) = 60.e^{-600.t}.\mu(t)$. Determinar la expresión de $v_0(t)$ si se aplica una señal de entrada: $v_e(t) = 10.\cos(60t).\mu(t)$.

<u>***Rta:***</u> *$v_0(t) = [1{,}99.\cos(60t + 84{,}28^\circ) + 19{,}8.e^{-600.t}].\mu(t)$.*

12.14 Transformación inversa por desarrollo en fracciones parciales.

El análisis de un circuito por transformación de Laplace conduce a la obtención de la transformada de la variable de salida. El próximo paso, tal como comentamos en la introducción, consiste en obtener nuevamente la función temporal. Presentaremos ahora un método para convertir las soluciones en el <u>dominio frecuencial</u> a soluciones en el <u>dominio temporal</u>. Esta conversión se denomina <u>transformación inversa</u>, y se indica con el símbolo $\mathcal{L}^{-1}$. Luego,

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$

El primer paso en el proceso de transformación inversa es escribir el denominador de F(s) en forma factoreada, es decir:

$$F(s) = \frac{N(s)}{b_n(s-p_1)(s-p_2)....(s-p_n)}$$

donde p_i son los polos de F(s). Nótese que los polos son los valores de s que hacen que F(s) sea infinita. El próximo paso es llevar F(s) a la suma de términos más sencillos. Tal descomposición se obtiene cuando F(s) se desarrolla en fracciones parciales.

- ***Polos simples***

Supongamos que el grado del denominador de F(s) es mayor que el grado del numerador, y que los polos son simples, o sea, no hay polos iguales. Luego, el desarrollo en fracciones parciales de F(s) está dado por:

$$F(s) = \frac{k_1}{s-p_1} + \frac{k_2}{s-p_2} + ... \frac{k_n}{s-p_n}$$

Ahora consideraremos un término típico del desarrollo:

$$\frac{k_i}{s-p_i} \qquad (24)$$

Suponiendo que k_i es simplemente una constante, vemos que la ecuación anterior es la anti-transformada de $k_i\, e^{p_i t}$. Luego:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k_i}{s-p_i}\right\} = k_i\, e^{p_i t} \qquad (25)$$

Dado que F(s) es una suma de términos como los indicados por la ec. 24, luego f(t) será la suma de términos como los de la ec. 25. Consecuentemente:

$$F(s) = \frac{k_1}{s-p_1} + \frac{k_2}{s-p_2} + ... + \frac{k_n}{s-p_n}$$
$$f(t) = K_1 e^{p_1 t} + k_2 e^{p_2 t} + ... + k_n e^{p_n t}$$

Este resultado es muy importante, ya que plantea que si el grado del numerador de F(s) es menor que el grado del denominador y si todos los polos son simples, fuego f(t) es la suma de n exponenciales, una para cada polo de F(s), siendo los polos los exponentes de cada término. Luego, la forma de onda de f(t) esta determinada por la ubicación de los polos, los cuales podrán ser reales, imaginarios o complejos, apareciendo, en este último caso, como pares complejos conjugados.

Si volvemos a la expresión de F(s), vemos que tiene la forma:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s-p_1)(s-p_2)...(s-p_n)} = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{k_\alpha}{s-p_\alpha} \qquad para\; s \neq p_\alpha$$

o sea, ambos miembros de la última igualdad de la ecuación anterior son iguales para todos los $s \neq p_\alpha$, α = 1,2,...n. El número k_α se llama residuo de F(s) en el polo p_α.

Si los valores de s son muy próximos a p_α, $s - p_\alpha$ es muy pequeño y consecuentemente, F(s) es grande.

Obtención de las constantes

- ***Polos simples***

Para obtener k_1, multipliquemos ambos miembros por (s - -p_1), con lo que obtendremos:

$$(s-p_1)F(s)=\frac{(s-p_1)N(s)}{(s-p_1)(s-p_2)...(s-p_n)}=k_1+\sum_{\alpha=2}^{n}(s-p_1)\frac{k_\alpha}{s-p_\alpha}$$

Ahora hagamos tender s a p_1, con lo que la sumatoria tiende a cero, por lo que:

$$k_1=\lim_{s\to p_1}(s-p_1)F(s)=\frac{N(p_1)}{(p_1-p_2)...(p_1-p_n)}$$

y en general, para α = 1, 2, ...n:

$$k_\alpha=\lim_{s\to p_1}(s-p_\alpha)F(s)=\frac{N(p_\alpha)}{(p_\alpha-p_1)...(p_\alpha-p_n)}$$

faltando, en el denominador, el término ($p_\alpha - p_\alpha$).

- ***Polos múltiples.***

Supongamos que la función racional F(s) tiene un polo doble en p_1 y polos simples en p_2, p_3,...p_nm lo cual es lo mismo que decir que D(s) tiene un cero doble en p_1 y ceros simples en p_2,p_3, ..p_n. Bajo estas circunstancias, sabemos que existen constantes tales que:

$$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{k_{11}}{(s-p_1)^2}+\frac{k_{12}}{s-p_1}+\sum_{\alpha=2}^{n}\frac{k_\alpha}{s-p_\alpha}$$

lo cual, según vimos al principio del capitulo, nos conduce a una evolución temporal de la forma:

$$f(t)=\mathrm{L}^{-1}\{F(s)\}=(k_{11}t\,e^{p_1 t}+k_{12}\,e^{p_2 t}+\sum_{=2}^{n}k_\alpha\,e^{p_\alpha t})u(t)$$

Para obtener las constantes k_{11}, k_{12}, etc., procederemos de la siguiente forma:

a) Para obtener k_{11} multiplicamos F(s) por $(s - p_1)^2$, y luego hacemos tender s a p_1:

$$k_{11}=\lim_{s\to p_1}(s-p_1)^2F(s)=\frac{N(p_1)}{(p_1-p_2)(p_1-p_3)...(p_1-p_n)}$$

b) Para obtener k_{12}, derivamos respecto a s la expresión $(s - p_1)^2$ F(s) y hacemos $s \to p_1$:

$$k_{12} = \lim_{s \to p_1} \frac{d}{d\,s} [\,(s - p_1)^2\, F(s)\,]$$

c) Los k_α restantes, correspondientes a polos simples, se obtienen como se vio anteriormente.

Comentario: Vemos así que se establece una relación entre las ubicaciones de los polos de F(s) en el plano s con el comportamiento exponencial en el tiempo de los términos correspondientes de f(t), relación muy importante en la ingeniería de diseño.

Ejercicio de aplicación:

1) Usando desarrollo en fracciones parciales, hallar la antitransformada de:

a) $F_a(s) = \dfrac{s^2 + 6s + 8}{s^2 + 4s + 3} \cdot e^{-sT}$ **b)** $F_b(s) = \dfrac{s^2 + s}{s^3 + 2s^2 + s + 2}$

Rta: **a)** $f_a(t) = \delta(t - T) + [0{,}5.e^{-3(t-T)} + 1{,}5.e^{-t+1}].\mu(t-T)$

b) $f_b(t) = (0{,}4.e^{-2t} + 0{,}6.\cos t - 0{,}2.\mathrm{sen}\, t).\mu(t)$

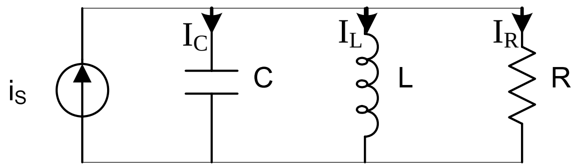
2) Calcular la antitransformada de la siguiente función racional:

$$F(s) = \frac{100(s + 50)}{s^2 + 80s + 2000}$$

y hallar el valor final de la función temporal directamente de la transformada.

12.15 Relación entre la transformación de Laplace y el método fasorial.

Es importante remarcar que, en un circuito con condiciones iniciales nulas, las reglas para manipular fasores y para L-transformar son las mismas, excepto por la sustitución de j ω por s. Lo veremos usando como ejemplo un circuito paralelo RLC, que se muestra en la figura:



La euación diferencial que planteamos, según vimos en el capítulo correspondiente, es:

$$\ddot{i}_L(t) + 2\,\dot{i}_L(t) + \omega_o^2\, i_L(t) = \omega_o^2\, i_s(t)$$

a) *Método fasorial:* Supuesto que $i_o(t) = \mathrm{Re}\{I_s\, e^{\,j\,\omega\, t}\}$ y que queremos hallar la respuesta de régimen permanente senoidal descripta por el fasor I_L, el método simbólico,nos conduce a:

$$[\,(\,\omega_o^2 - \omega^2\,) + 2\,\alpha\, j\,\omega\,]\,\dot{I}_L = \omega_o^2\,\dot{I}_s$$

o, lo que es equivalente:

$$\dot{I}_L = \frac{\omega_o^2}{(\omega_o^2 - \omega^2) + 2\,\alpha\, j\,\omega}\,\dot{I}_s$$

b) *Por transformada de Laplace:* Con condiciones iniciales nulas, L-transformando la ecuación llegamos a:

$$(s^2 + 2\,\alpha\,\omega\, s + \omega_o^2)\, I_L(s) = \omega_o^2\, I_s(s)$$

o sea:

$$I_L(s) = \frac{\omega_o^2}{s^2 + 2\,\alpha\, s + \omega_o^2}\, I_s(s)$$

Si comparamos ambas expresiones, vemos que la notación fasorial y la ecuación transformada por Laplace tienen exactamente la **misma forma**, excepto que **jω** ha sido reemplazado por **s**, lo cual es una consecuencia de que todas las condiciones iniciales son cero.

Estas dos ecuaciones tienen diferentes significados:

- La ecuación fasorial relaciona el fasor dado I_s con el fasor I_L, el cual representa la respuesta de régimen permanente senoidal del circuito.
- La ecuación transformada por Laplace relaciona la transformada de la función dato $I_s(s)$ con la función $I_L(s)$, la cual representa la transformada de Laplace de la respuesta del circuito con condiciones iniciales nulas a la entrada $i_s(t)$. Debemos notar, naturalmente, que la función $i_s(t)$ puede ser cualquier función L-transformable.

12.16 Teoremas útiles:

1) Traslación en el dominio temporal:

La traslación en el dominio temporal corresponde a la multiplicación por una exponencial en el dominio frecuencial. Así:

$$L\{f(t-a)\,u(t-a)\} = e^{-a\,s}\,F(s) \qquad a > 0$$

Por ejemplo, sabiendo que:

$$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$$

podemos escribir directamente la transformada de Laplace de (t - a) u (t - a):

$$\mathcal{L}\{(t-a)\,u(t-a)\} = \frac{e^{-a\,s}}{s^2}$$

La demostración surge de la aplicación directa de la integral de definición.

2) Traslación en el dominio frecuencial

La traslación en el dominio frecuencial corresponde a la multiplicación por una exponencial en el dominio temporal:

$$\mathcal{L}\left\{e^{-as} f(t)\right\} = F(s+a)$$

la cual se deduce de la integral de definición. Esta relación nos es útil para definir nuevos pares de transformadas, ya que sabiendo que:

$$\mathcal{L}\left\{\cos \omega t\right\} = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

podemos deducir que:

$$\mathcal{L}\left\{e^{-at} \cos \omega t\right\} = \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$$

3) Cambio de escala

La propiedad de cambio de escala establece la relación entre f(t) y F(s) cuando la variable temporal está multiplicada por una constante positiva:

$$\mathcal{L}\left\{f(at)\right\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \qquad a > 0$$

cuya obtención queda propuesta como ejercicio.

Esta propiedad es particularmente útil en simulación, especialmente donde se realizan cambios de escala para facilitar la construcción del modelo de un sistema.

Una aplicación inmediata es la formulación de nuevos pares de transformadas. Así, sabiendo que:

$$\mathcal{L}\left\{\cos t\right\} = \frac{s}{s^2+1}$$

deducimos que, con un cambio de escala:

$$\mathcal{L}\left\{\cos \omega t\right\} = \frac{1}{\omega}\frac{s/\omega}{(s/\omega)^2+1} = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

4) Teoremas del valor inicial y del valor final

Los teoremas del valor inicial y del valor final son útiles porque nos permiten determinar el comportamiento de r(t) en 0 y en ∞ a partir de F(s). De esta forma podemos chequear los valores inicial y final de f(t) antes de hallar la transformada inversa de F(s).

El <u>teorema del valor inicial</u> plantea que:

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} s F(s)$$

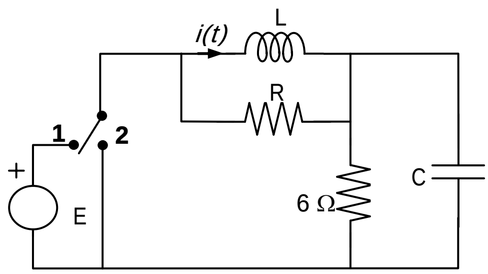
y el <u>teorema del valor final</u> dice que:

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} s\,F(s)$$

El teorema del valor inicial se basa en la suposición de que f(t) no posee impulsos, y para el teorema del valor final debemos establecer la restricción de que el teorema es válido solo si los polos de F(s), excepto el caso de un polo simple en el origen, tengan parte real negativa, con lo cual queda asegurada la existencia de un valor finito de f(∞).

EJERCICIOS PROPUESTOS

1) Estando el circuito en régimen permanente, en t = 0 la llave conmuta de la posición 1 a la 2. Hallar los valores de R, L, C y E que hacen que $i_L(t) = 2.e^{-3t}[\cos(4t) - 5.\mathrm{sen}(4t)].\mu(t)$



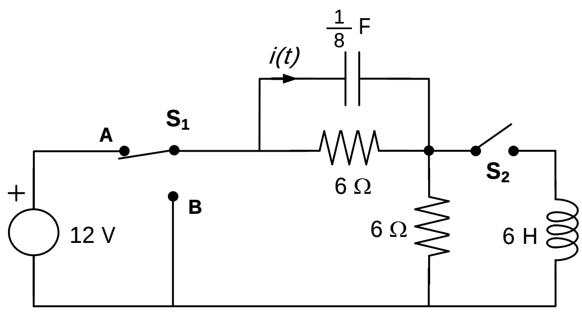
Rta: E = 12 V;   L = 0,26 H;   C = 0,1533 F;   R = 1,327 Ω.

2) Una fuente y un interruptor están conectados en serie con L = 0,30 mH, C = 0,0012 μF y R = 75 Ω. El interruptor se cierra en $t = 0$. No hay carga inicial en el capacitor. La fuente es de 1 V de continua.

- ***a)*** Hallar la corriente en el circuito en función del tiempo, representándose 3 ó 4 ciclos.
- ***b)*** Trazar los polos y ceros de *Y(s)* en el plano complejo ***s***, si R varía adoptando además los siguientes valores: 500Ω, 1000Ω y 2000Ω.

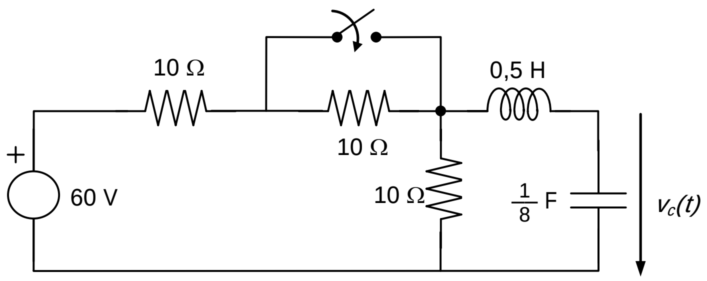
Rta: $v(t) = 0{,}002.e^{-125000t}.\mathrm{sen}(1{,}66.10^6 t).\mu(t)$

3) En $t = 0$ el circuito se encuentra en régimen permanente, con S_1 en la posición **A** y S_2 abierto. En ese momento la llave S_1 conmuta a la posición **B** y S_2 se cierra. Hallar *i(t)*.



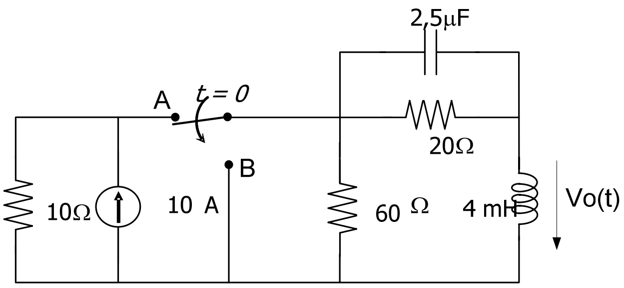
Rta: $i(t) = (0{,}25.e^{-0{,}667.t} - 2{,}25.e^{-2.t}).\mu(t)$

4) Estando el circuito de la figura en régimen permanente, en t = 0 se cierra el interruptor. Reducir el circuito a una sola malla y determinar la evolución temporal de $v_C(t)$.



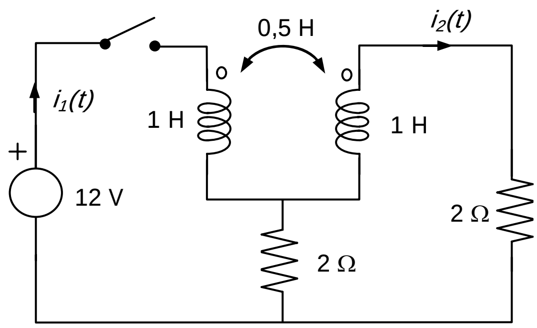
Rta: $v_C(t) = [30 + 3{,}33.e^{-8t} - 13{,}333.e^{-2t}].\mu(t)$

5) La llave estuvo en la posición **A** durante un largo tiempo. En t = 0 conmuta a la posición **B**. Hallar la evolución de $v_0(t)$ para t ≥ 0.



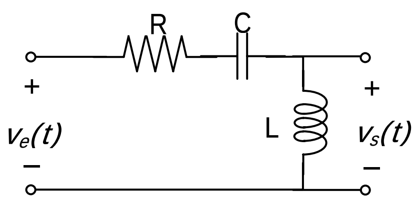
Rta: $v_0(t) = -60.(10^4 t + 1).e^{-10000t}.\mu(t)$ A

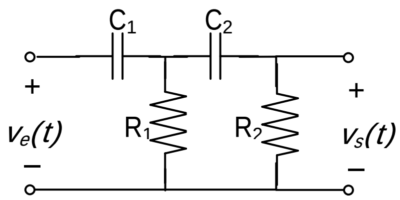
6) Hallar $i_1(t)$ si la llave se cierra en t = 0.



Rta: $i_1(t) = 12.(1 - e^{-4t/3}).\mu(t)$

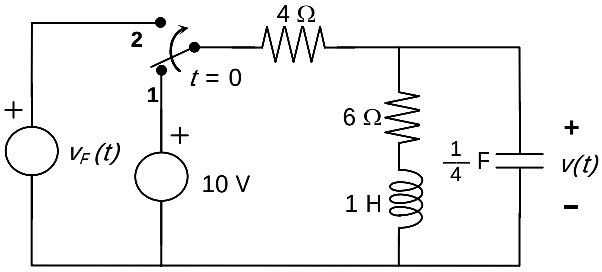
7) Demostrar que, ajustando los valores de los elementos, es posible hacer que la respuesta al escalón de ambas redes sea idéntica.





Rta: $R = L \cdot \left(\dfrac{1}{R_1 C_1} + \dfrac{1}{R_2 C_2} + \dfrac{1}{R_2 C_1} \right) \qquad C = \dfrac{R_1 R_2 C_1 C_2}{L}$

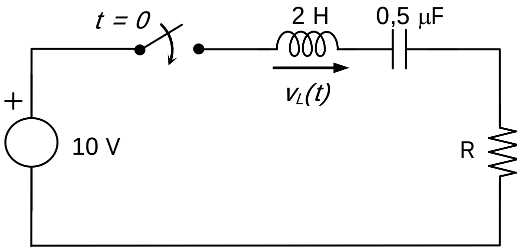
8) La llave conmuta a la posición 2 en $t = 0$, luego de haber permanecido en la posición 1 durante un tiempo suficiente como para que se alcanzara el régimen permanente. Calcular $v(t)$ para $t \geq 0$, si $v_F(t) = 6.e^{-3t}$.



Rta: $v(t) = [14{,}667.e^{-2.t} + 0{,}333.\ e^{-5.t} - 9.e^{-3.t}].\mu(t)$ V.

9) En el circuito de la figura, determinar $v_L(t)\ \forall\ t \geq 0$, siendo $v_C(0) = v_L(0) = 0$. Utilizar los siguientes datos:

a) R = 10 Ω, **b)** R = 4Ω, ***c)*** R = 2 Ω.

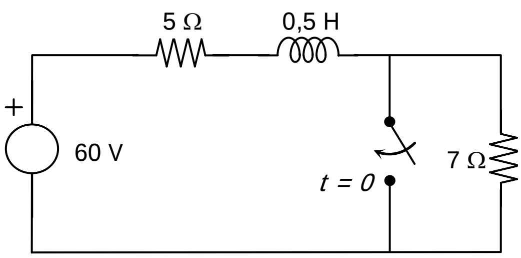


Rta : ***a)*** $v_L(t) = (-0{,}46e^{-0{,}21.t} + 10{,}46\ e^{-4{,}79..t}).\mu(t)$

b) $v_L(t) = 10(1-t).e^{-t}.\mu(t)$

c) $v_L(t) = 10.e^{-0{,}5\,t}.(\cos\sqrt{0{,}75}\,t - 0{,}577.\text{sen}\sqrt{0{,}75}\,t).\mu(t)$

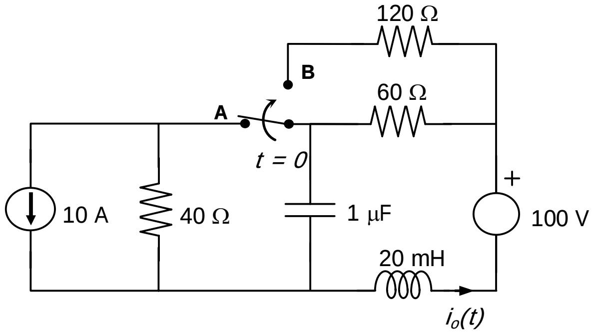
10) El interruptor en el circuito de la figura estuvo mucho tiempo cerrado y se abre en t = 0. Calcular la corriente por la bobina de ahí en adelante.



Rta: $i(t) = (5 + 7.e^{-24\,t}).\mu(t)$

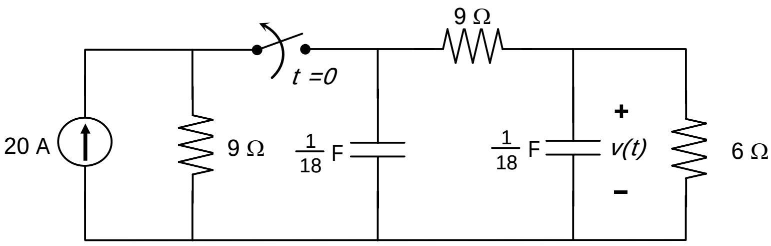
11) En el siguiente circuito, la llave ha estado en la posición **A** por un largo tiempo. En $t = 0$

conmuta instantáneamente a la posición **B**. Obtener la evolución de $i_0(t)$ para $t \geq 0$.



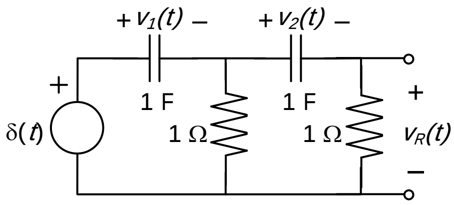
Rta: $i_0(t) = 5.e^{-1000.t}.[\cos(7000t) + 0{,}2857.\mathrm{sen}(7000t)].\mu(t)$

12) Hallar $v(t)$ si la llave se abre en $t = 0$, luego de haber alcanzado el régimen permanente.



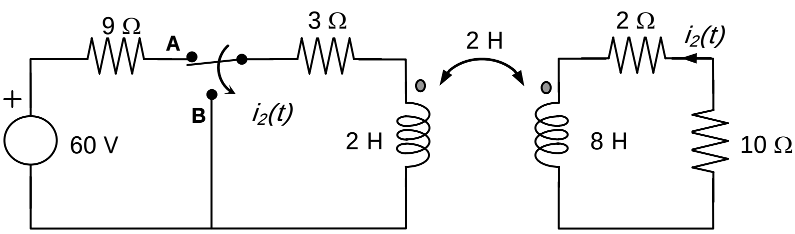
Rta: $v(t) = 54.e^{-t} – 9.e^{-6t}$

13) Determinar un conjunto de condiciones iniciales: $v_1(0^-)$ y $v_2(0^-)$ que hacen que la tensión $v_R(t)$ sea sencillamente un impulso $k.\delta(t)$.



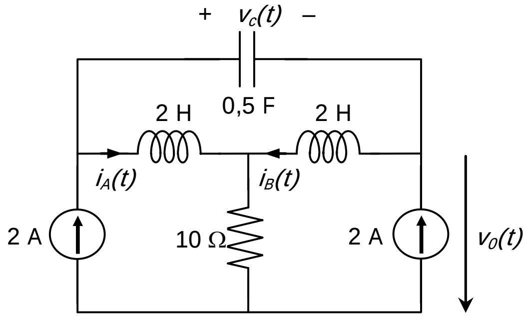
<u>Rta</u>: $v_1(0^-) = – 2$V ; $v_2(0^-) = –1$V.

14) Luego de permanecer largo tiempo en la posición **A**, en $t = 0$ el interruptor conmuta a la posición **B**. Hallar $i_2(t)$.



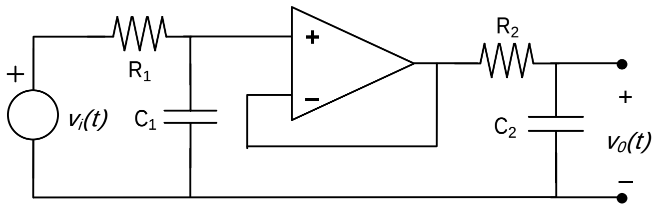
<u>Rta</u>: $i(t) = 1{,}25.(e^{-t} – e^{-3t}).\mu(t)$

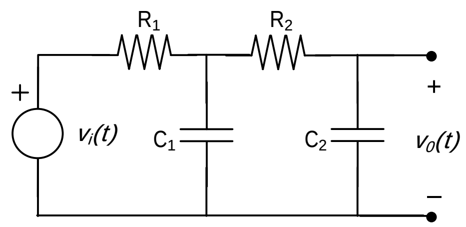
15) En el circuito de la figura obtener la tensión $v_0(t)$, conociendo las condiciones iniciales: $i_A(t) = i_B(t) = 0{,}5$ A; $v_C(0) = 2$ V.



16) Los Amplificadores Operacionales (AO) se configuran frecuentemente para actuar como buffers, cuyo propósito es evitar que un circuito drene corriente de otro. En la figura **1** el AO ideal es el buffer.

- ***a)*** Mostrar que la función transferencia en del circuito **1** es $H(s) = H_1(s).H_2(s)$, donde: $H_1(s) = 1/(R_1C_1s + 1)$ y $H_2(s) = 1/(R_2C_2 + 1)$.
- ***b)*** Suponer que $R_1 = R_2 = 1$ KΩ y $C_1 = C_2 = 1$ mF, con condiciones iniciales nulas. Evaluar la respuesta del circuito a $v_1(t) = \delta(t)$.
- ***c)*** Hallar la función transferencia del circuito de la figura **2**. Comparar el resultado con el obtenido en ***(a)***.
- ***d)*** Evaluar la respuesta del circuito de la figura 2, siendo también $R_1 = R_2 = 1$ KΩ y $C_1 = C_2 = 1$ mF, con condiciones iniciales nulas y con $v_1(t) = \delta(t)$.

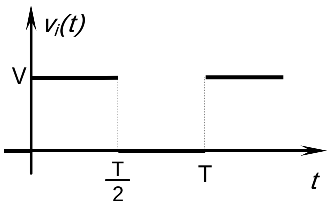


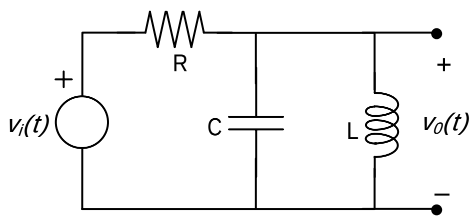


17) En la red de la figura, la señal de entrada es una onda cuadrada simétrica y $R >> \frac{1}{2}\sqrt{LC}$.

Obtener y graficar la respuesta $v_0(t)$, para los siguientes casos:

a) $T >> RC$ ***b)*** $T = 2\pi\sqrt{LC}$





18) Una fuente de tensión no ideal cuya salida es un escalón, posee una resistencia interna R. Un

divisor resistivo 89R~10R es conectado a sus bornes para atenuar 10 veces su voltaje.

a) Mostrar que si se carga el atenuador con un capacitor C, la salida deja de ser una versión atenuada 10:1 de la señal entregada por la fuente.

b) Demostrar además que esta degradación de la forma de onda provocada por C puede reducirse considerablemente agregando un nuevo capacitor $C_C = C/89$, tal como se indica en línea de trazos. El atenuador resultante se denomina "Atenuador Compensado".