Filtros Espejo en Cuadratura (QMF: Quadrature Mirror Filters)

Autor: **Juan Carlos Gómez**

Presentación basada en las siguientes **Referencias**:

[1] Proakis, J. G. & Manolakis, D. G.. *Tratamiento digital de señales - Principios, algoritmos, y aplicaciones,* Tercera Edición, Prentice Hall, Madrid, 1998.

Filtros Espejo en Cuadratura (QMF: Quadrature Mirror Filters)

Los **Filtros Espejo en Cuadratura** (QMF) constituyen el bloque básico en aplicaciones de codificación/decodificación sub-banda de señales de voz, y en general en aplicaciones de análisis y síntesis de señales.

La Figura 1, muestra un banco de Filtros QMF de dos canales.

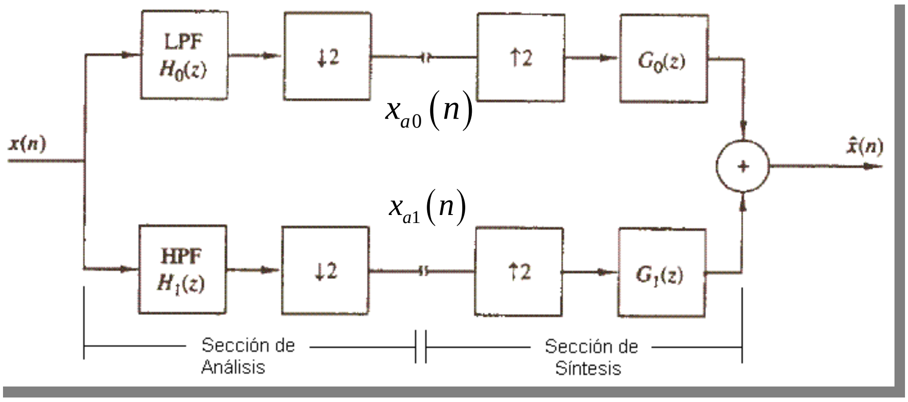
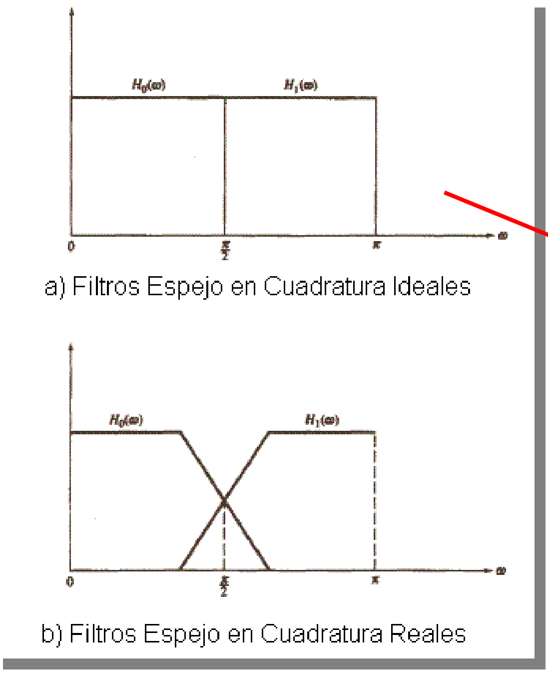


Fig. 1. Banco QMF

Los filtros pasabajo (LPF) y pasa alto (HPF) de la etapa de análisis tienen respuestas al impulso $h_0(n)$ y $h_1(n)$, respectivamente, y respuestas en frecuencia complementarias, como se indica en la Figura 2.



$$H_0(\omega) + H_1(\omega) = 1 \qquad (1)$$

no realizable

Fig. 2. a) Respuesta en Frecuencia de Filtros QMF ideales. b) Idem para Filtros QMF Reales.

Los filtros pasabajo (LPF) y pasa alto (HPF) de la etapa de síntesis tienen respuestas al impulso $g_0(n)$ y $g_1(n)$, respectivamente.

En el dominio de la transformada de Fourier las salidas de los dos diezmadores de la etapa de análisis resulta:

$$X_{a0}(\omega) = \frac{1}{2}\left[X\left(\frac{\omega}{2}\right) H_0\left(\frac{\omega}{2}\right) + X\left(\frac{\omega - 2\pi}{2}\right) H_0\left(\frac{\omega - 2\pi}{2}\right) \right] \qquad (2)$$

$$X_{a1}(\omega) = \frac{1}{2}\left[X\left(\frac{\omega}{2}\right) H_1\left(\frac{\omega}{2}\right) + X\left(\frac{\omega - 2\pi}{2}\right) H_1\left(\frac{\omega - 2\pi}{2}\right) \right] \qquad (3)$$

ya que para un **diezmador** se verifica

$$x(n) \longrightarrow \boxed{D\downarrow} \longrightarrow y(n)$$

$$y(n) = \begin{cases} x(n) & n = 0, \pm D, \pm 2D, \cdots \\ 0 & \text{c.o.c.} \end{cases}$$

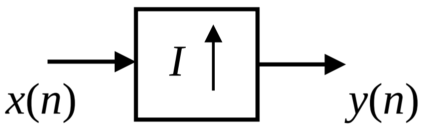
$$Y(\omega) = \frac{1}{D}\left[X\left(\frac{\omega}{D}\right) + X\left(\frac{\omega - 2\pi}{D}\right) \right]$$

Donde ω es la pulsación correspondiente a la tasa de muestreo de la variable *x*.

Luego, la salida de la etapa de síntesis en Figura 1, resulta

$$\hat{X}(\omega) = X_{a0}(2\omega)G_0(\omega) + X_{a1}(2\omega)G_1(\omega) \qquad (4)$$

ya que para un **interpolador** se verifica



$$y(n) = \begin{cases} x(n/I) & n = 0, \pm I, \pm 2I, \cdots \\ 0 & \text{c.o.c.} \end{cases}$$

$$Y(\omega) = X(\omega I)$$

Reemplazando (2) y (3) en (4) resulta

$$\hat{X}(\omega) = \overbrace{\frac{1}{2}\left[H_0(\omega)G_0(\omega) + H_1(\omega)G_1(\omega)\right]X(\omega)}^{\text{(I) Salida deseada}}$$
$$+ \underbrace{\frac{1}{2}\left[H_0(\omega-\pi)G_0(\omega) + H_1(\omega-\pi)G_1(\omega)\right]X(\omega-\pi)}_{\text{(II) Efecto del aliasing}}$$

(5)

El término (I) en (5) es la salida deseada, en tanto que el término (II) es debido al aliasing introducido por el diezmado y deberíamos eliminarlo. Para hacer cero este término debe imponerse la condición

$$H_0(\omega-\pi)G_0(\omega) + H_1(\omega-\pi)G_1(\omega) = 0 \qquad (6)$$

Esta condición se satisface seleccionando $G_0(\omega)$ y $G_1(\omega)$ como

$$G_0(\omega) = H_1(\omega - \pi) \quad ; \quad G_1(\omega) = -H_0(\omega - \pi) \tag{7}$$

En conclusión, si $H_0(\omega) = H(\omega)$ es un filtro pasa-bajo y se elige $H_1(\omega)$ como un filtro pasa-alto que sea la imagen especular de $H_0(\omega)$ respecto a la frecuencia $\omega = \pi/2$, entonces resulta

$$H_0(\omega) = H(\omega) \tag{8}$$

$$H_1(\omega) = H(\omega - \pi) \tag{9}$$

En tanto que para ser consistente con las restricciones en (7) debe seleccionarse

$$G_0(\omega) = 2H(\omega) \tag{10}$$

$$G_1(\omega) = -2H(\omega - \pi) \tag{11}$$

Con la elección (8) a (11) para los filtros de análisis y síntesis del banco QMF de dos canales, se logra eliminar el término (II) en (5), debido al aliasing introducido por el diezmado de la sección de análisis, y el banco QMF se comporta como un sistema lineal estacionario.

En el dominio temporal, la respuestas al impulso de los filtros del banco QMF resultan

$$h_0(n) = h(n)$$

$$h_1(n) = (-1)^n h(n)$$

$$g_0(n) = 2h(n)$$

$$g_1(n) = -2(-1)^n h(n)$$

Con la elección (8) a (11) para los filtros de análisis y síntesis del banco QMF de dos canales, la salida del banco resulta

$$\hat{X}(\omega) = \left[H^2(\omega) - H^2(\omega - \pi)\right] X(\omega) \qquad (12)$$

Idealmente, para tener una **reconstrucción perfecta** de la señal, debería ser

$$H^2(\omega) - H^2(\omega - \pi) = 1, \qquad \text{para todo } \omega \qquad (13)$$

Desafortunadamente, salvo para filtros con estructura Haar, no es posible construir filtros FIR (con respuesta al impulso de duración finita) que verifiquen (13).

Si consideramos $H(\omega)$ un filtro FIR de longitud N y con fase lineal, entonces puede escribirse

$$H(\omega) = H_r(\omega) e^{-j\omega(N-1)/2}$$

La respuesta en frecuencia del banco de filtros QMF resulta entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\hat{X}(\omega)}{X(\omega)} &= H^2(\omega) - H^2(\omega - \pi) \\
&= \left[|H(\omega)|^2 - (-1)^{N-1} |H(\omega - \pi)|^2\right] e^{-j\omega(N-1)} \\
&= A(\omega) e^{-j\omega(N-1)}
\end{aligned}$$

Para N impar, resulta

$$A(\omega) = |H(\omega)|^2 - |H(\omega - \pi)|^2$$

por lo que $A(\pi/2) = 0$, que es una propiedad indeseable para un diseño QMF. Por otra parte, para N par resulta

$$A(\omega) = |H(\omega)|^2 + |H(\omega - \pi)|^2$$

que evita el problema $A(\pi/2) = 0$. Para este caso, para tener reconstrucción perfecta debería ser

$$A(\omega) = |H(\omega)|^2 + |H(\omega - \pi)|^2 = 1, \qquad \text{para todo } \omega$$

Lamentablemente la única función $H(\omega)$ que satisface esta condición es la función trivial

$$|H(\omega)|^2 = \cos^2(a\omega)$$

En consecuencia, cualquier filtro FIR de fase lineal no trivial introduce alguna **distorsión de amplitud**.

La cantidad de distorsión de amplitud introducida por el banco de filtros QMF con filtros FIR de fase lineal se puede reducir optimizando los coeficientes del filtro FIR, de manera que $A(\omega)$ sea tan plano como sea posible, a la vez que se minimiza la energía de la banda de rechazo de $H(\omega)$.

Si se relaja la condición de fase lineal del filtro FIR pasa-bajo $H(\omega)$, pueden diseñarse filtros QMF de reconstrucción perfecta (*i.e.*, sin distorsión de amplitud, ni por aliasing) . Estos filtros se denominan **Filtros en Espejo Conjugados (CMF: Conjugate Mirror Filters)**, (Smith & Barnwell, 1984).