

Procesamiento Digital de Señales de Voz

Diseño de Filtros Digitales

Juan Carlos Gómez

Revisión Octubre 2005

1. Sistemas Lineales Estacionarios como filtros selectivos en frecuencia

Un sistema LE modifica el espectro de la señal de entrada $U(\omega)$ según su respuesta en frecuencia $H(\omega)$ para dar lugar a una señal de salida con espectro

$$Y(\omega) = H(\omega)U(\omega) \quad (1)$$

Puede pensarse entonces, que $H(\omega)$ actúa como una *función de ponderación espectral* para las diferentes componentes frecuenciales de la señal de entrada. En este contexto, un SLE puede considerarse como un **filtro** de conformación espectral.

2. Características de los filtros ideales

Los filtros suelen clasificarse según sus características en el dominio frecuencial como:

□ Pasa Bajos

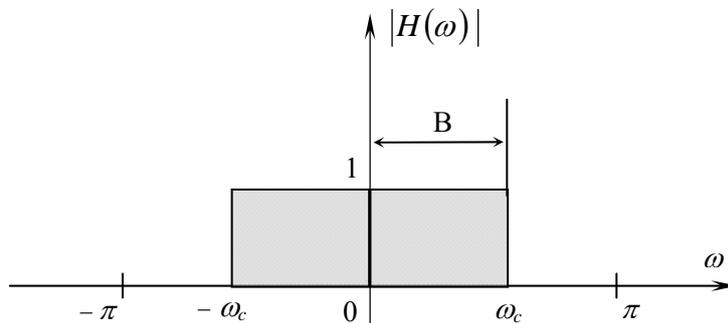


Figura 1: Respuesta en frecuencia (amplitud) de un filtro Pasa Bajo Ideal.

□ Pasa Altos

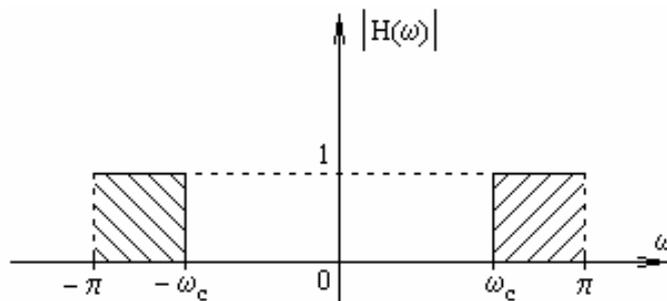


Figura 2: Respuesta en frecuencia (amplitud) de un filtro Pasa Alto Ideal.

□ **Pasa Banda**

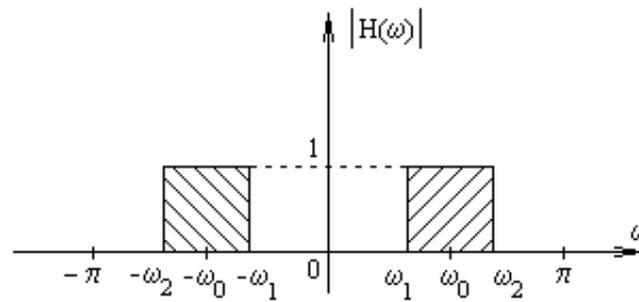


Figura 3: Respuesta en frecuencia (amplitud) de un filtro Pasa Banda Ideal.

□ **Rechaza Banda**

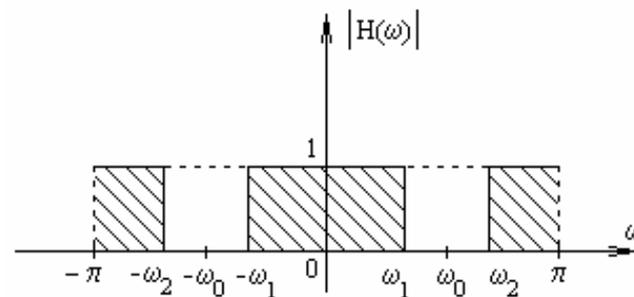


Figura 4: Respuesta en frecuencia (amplitud) de un filtro Rechaza Banda Ideal.

□ **Pasa Todo**

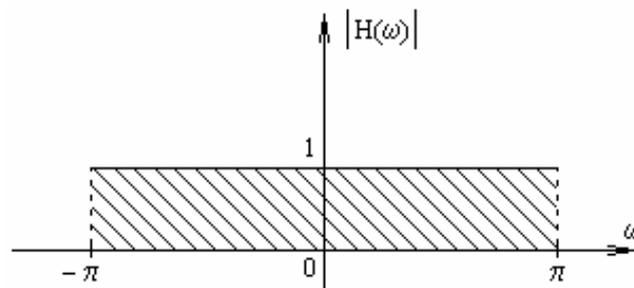


Figura 5: Respuesta en frecuencia (amplitud) de un filtro Pasa Todo Ideal.

Tal como se muestra en las figuras anteriores, estos filtros ideales tienen ganancia constante (generalmente unitaria) en la banda de paso y ganancia cero en la banda eliminada.

Otra característica importante de los filtros ideales es su **respuesta de fase lineal**. Por ejemplo, consideremos un filtro con respuesta en frecuencia

$$H(\omega) = \begin{cases} C e^{-j\omega n_0} & \omega_1 < \omega < \omega_2 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (2)$$

donde C y n_0 son constantes positivas y supongamos una secuencia de entrada $\{u(n)\}$ con espectro $U(\omega)$. La salida del filtro, tiene entonces el siguiente espectro

$$Y(\omega) = H(\omega)U(\omega) = CU(\omega)e^{-j\omega n_0} \quad \omega_1 < \omega < \omega_2 \quad (3)$$

Aplicando las propiedades de escalado y desplazamiento temporal de la Transformada de Fourier, obtenemos la salida en el dominio temporal

$$y(n) = Cu(n - n_0), \quad (4)$$

donde se ha supuesto que $\{u(n)\}$ no tiene componentes importantes de frecuencia fuera de la banda de paso. Es decir, la salida del filtro es la versión escalada y retardada de la entrada.

En general, un retardo puro y el escalado en amplitud no se consideran como una distorsión de la señal. Por lo tanto, se requiere que los filtros ideales tengan una característica de fase lineal dentro de su banda de paso de manera que no se produzca distorsión. Es decir, se requiere

$$\theta(\omega) = -\omega n_0 \quad (5)$$

La derivada de la fase respecto de la frecuencia tiene unidades de retardo, es decir

$$\tau_g(\omega) = -\frac{d\theta(\omega)}{d\omega} \quad (6)$$

y se denomina **retardo de envolvente** o **retardo de grupo** del filtro. Puede interpretarse a $\tau_g(\omega)$ como el retardo que experimenta una componente de frecuencia ω cuando pasa a través del sistema. Obsérvese que cuando $\theta(\omega)$ es lineal como en (5) entonces $\tau_g(\omega) = n_0 = \text{constante}$. Es decir que en este caso todas las componentes de frecuencia experimentan el mismo retardo temporal.

Como conclusión, los filtros ideales tienen una característica de magnitud constante y una característica de fase lineal en la banda de paso. Veremos que los filtros ideales no son realizables pero sirven como una idealización matemática de los filtros prácticos. Por ejemplo, un filtro pasa bajos ideal, cuya respuesta en frecuencia es la representada en Figura 1, tiene una respuesta impulsional

$$h_{LP}(n) = \frac{\sin(\omega_c \pi n)}{\pi n} \quad -\infty < n < \infty \quad (7)$$

Vemos que el filtro es no causal y que además su respuesta al impulso no es absolutamente sumable, por lo que el filtro no es BIBO estable. Por lo tanto, este filtro ideal no es realizable físicamente. Sin embargo, su característica frecuencial se puede aproximar muy bien utilizando filtros prácticos realizables físicamente.

Surge entonces la pregunta de cuáles son las condiciones necesarias y suficientes que debe satisfacer una respuesta en frecuencia $H(\omega)$ de manera que el filtro resultante sea causal. La respuesta viene dada por el Teorema de Paley-Wiener.

Teorema de Paley-Wiener: Si $h(n)$ es de energía finita y $h(n) = 0$ para $n < 0$, entonces

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \ln |H(\omega)| \right| < \infty \quad (8)$$

Recíprocamente, si $|H(\omega)|$ es cuadrado integrable, y si se verifica (8), entonces puede asociarse a $|H(\omega)|$, una fase $\theta(\omega)$, de manera que el filtro con respuesta en frecuencia

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\theta(\omega)} \quad (9)$$

es causal. ◆

Una importante conclusión que se obtiene de este teorema es que el módulo $|H(\omega)|$ de la respuesta en frecuencia puede ser cero en algunas frecuencias aisladas, pero no puede ser cero sobre cualquier banda finita continua de frecuencias ya que la integral en (8) resultaría infinita y el filtro sería no causal. En consecuencia, podemos concluir que todo filtro ideal será no causal.

3. Características de los filtros prácticos

Aunque las características de respuesta en frecuencia que poseen los filtros ideales deben ser deseables, no son absolutamente necesarias en la mayoría de las aplicaciones prácticas. Relajando estas condiciones es posible realizar filtros causales que aproximan los filtros ideales con tanta precisión como se desee. En particular, no es necesario exigir que la magnitud $|H(\omega)|$ sea constante en toda la banda de paso del filtro. Se puede tolerar un pequeño rizado en la banda de paso, como se muestra en la Figura 6 a continuación:

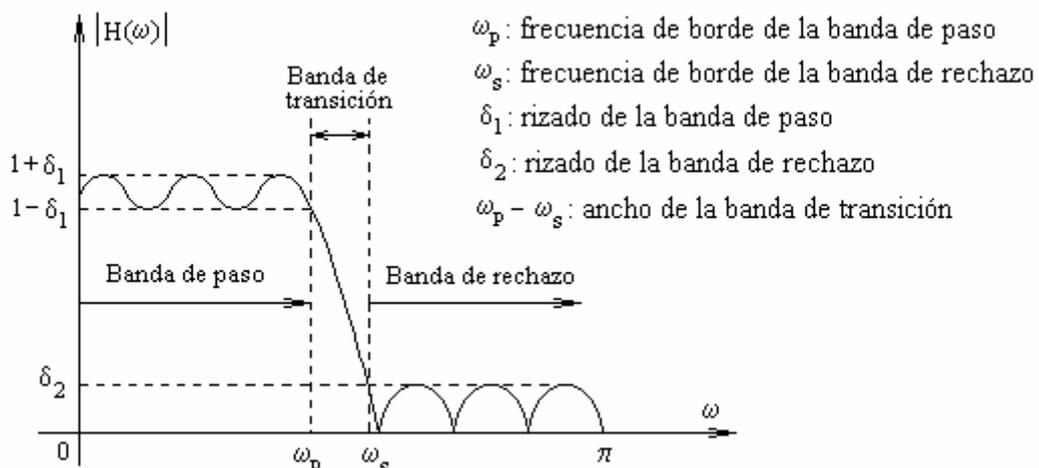


Figura 6: Respuesta en frecuencia (amplitud) de un filtro real.

Al ancho de la banda de paso se lo denomina **ancho de banda** del filtro.

Considerando las restricciones que la causalidad impone sobre la respuesta en frecuencia de los filtros, y que de hecho los filtros ideales no son realizables en la práctica, limitaremos nuestra atención a la clase de sistemas lineales estacionarios especificados por una ecuación en diferencias de la forma

$$y(n) = -\sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k u(n-k) \quad (10)$$

que resultan causales y por lo tanto, realizables en la práctica.

En un problema de diseño de filtro usualmente se especifican:

- 1) El rizado máximo tolerable en la banda de paso δ_1 .
- 2) El rizado máximo tolerable en la banda de rechazo δ_2 .
- 3) La frecuencia ω_p
- 4) La frecuencia ω_s

Las especificaciones de ganancia y de rizados máximos se suelen dar en dB, y se definen entonces:

$$\text{función de pérdida:} \quad A(\omega) = -20 \log_{10} |H(\omega)| \text{ dB}$$

$$\text{rizado máximo de la banda de paso:} \quad \alpha_p = -20 \log_{10}(1 - \delta_1) \text{ dB}$$

$$\text{atenuación mínima de la banda de rechazo:} \quad \alpha_r = -20 \log_{10}(\delta_2) \text{ dB}$$

Basados en estas especificaciones pueden seleccionarse los parámetros $\{a_k\}$ y $\{b_k\}$ del filtro que mejor aproximen las especificaciones deseadas. El grado de aproximación en general depende del criterio de selección (estimación) de los parámetros $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ y del número de parámetros $\{M, N\}$.

En particular, consideraremos dos tipos de estructuras de filtros digitales:

1. **Filtros de Respuesta al Impulso Finita (FIR: Finite Impulse Response)**, que corresponden a la ecuación (10) donde se impone la condición $a_k = 0$, $k = 1, \dots, N$, es decir

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k u(n-k) \quad (11)$$

La correspondiente Función Transferencia Z resulta de la forma

$$H(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \quad (12)$$

que puede verse corresponde a un sistema con respuesta al impulso de longitud finita ($M+1$), lo que da origen al nombre del filtro.

Es claro entonces que la respuesta al impulso del filtro resulta absolutamente sumable, y por lo tanto el filtro resulta siempre BIBO estable, con todos sus polos en el origen del plano Z, como puede verse re-escribiendo (12) con potencias positivas de z , es decir

$$H(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{M-k}}{z^M} \quad (13)$$

2. **Filtros de Respuesta al Impulso Infinita (IIR: Infinite Impulse Response)**, que corresponden a la ecuación (10), donde no se impone ninguna condición especial sobre los coeficientes a_k , b_k . La Función Transferencia Z del filtro resulta:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = \frac{1}{z^{N-M}} \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{M-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{N-k}} \quad (14)$$

Tomando la transformada Z inversa, se obtiene un respuesta al impulso del filtro que, en general, es de duración infinita, lo que da origen al nombre del filtro. Debe asegurarse la condición de estabilidad durante la estimación de los coeficientes del filtro, ya que esta condición no es inherente a la estructura del mismo.

4. Diseño de Filtros FIR

4.1 Diseño de filtros FIR de fase lineal por el método de Muestreo en Frecuencia

Un filtro FIR (Finite Impulse Response) de longitud M está caracterizado por una respuesta en frecuencia

$$H(\omega) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k e^{-j\omega k} \quad (15)$$

donde los coeficientes $\{b_k\}$ son la respuesta al impulso del sistema, esto es

$$h(n) = \begin{cases} b_n & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0 & \text{c.o.c} \end{cases} \quad (16)$$

El requerimiento de fase lineal impone condiciones de simetría en la respuesta al impulso del filtro. En particular, consideraremos dos condiciones de simetría distintas

$$h(n) = h(M-1-n) \quad \text{simétrica} \quad (17)$$

y

$$h(n) = -h(M-1-n) \quad \text{antisimétrica} \quad (18)$$

Consideraremos primero la condición (17) y los casos en que M sea par e impar. Supongamos por ejemplo, $M = 5$ y la condición de simetría (17), entonces

$$h(0) = h(4)$$

$$h(1) = h(3)$$

en tanto que $h(2)$ no tiene ningún término simétrico. Entonces, la respuesta al impulso resulta simétrica respecto a $h(2)$, siendo

$$\begin{aligned} H(\omega) &= h(0) + h(1)e^{-j\omega} + h(2)e^{-j2\omega} + h(3)e^{-j3\omega} + h(4)e^{-j4\omega} \\ &= e^{-j2\omega} \left[h(2) + h(0)e^{j2\omega} + h(1)e^{j\omega} + h(3)e^{-j\omega} + h(4)e^{-j2\omega} \right] \\ &= e^{-j2\omega} \left[h(2) + 2h(0)\cos 2\omega + 2h(1)\cos \omega \right] \end{aligned}$$

Vemos que el término entre corchetes es real para todo ω y podemos denominarlo como

$$H_r(\omega) = [h(2) + 2h(0)\cos 2\omega + 2h(1)\cos \omega]$$

por lo que resulta

$$H(\omega) = H_r(\omega) e^{-j2\omega}$$

Claramente resulta

$$|H(\omega)| = |H_r(\omega)|$$

y la característica de fase del filtro es

$$\theta(\omega) = \begin{cases} -2\omega & \text{si } H_r(\omega) > 0 \\ -2\omega + \pi & \text{si } H_r(\omega) < 0 \end{cases}$$

Vemos entonces que la fase es lineal siempre que $H_r(\omega)$ sea positivo (o negativo). Cuando $H_r(\omega)$ cambia de signo, la fase sufre un cambio abrupto de 180° . Si este cambio ocurre fuera de la banda de paso, entonces no hay problemas, ya que la señal que pasa a través del filtro tiene un contenido frecuencial despreciable fuera de dicha banda.

Si M es par, por ejemplo $M = 4$, la condición de simetría (17) implica

$$h(0) = h(3)$$

$$h(1) = h(2)$$

y la respuesta en frecuencia del filtro resulta

$$\begin{aligned} H(\omega) &= h(0) + h(1)e^{-j\omega} + h(2)e^{-j2\omega} + h(3)e^{-j3\omega} \\ &= e^{-j\frac{3}{2}\omega} \left[h(0)e^{j\frac{3}{2}\omega} + h(1)e^{j\frac{\omega}{2}} + h(2)e^{-j\frac{\omega}{2}} + h(3)e^{-j\frac{3}{2}\omega} \right] \\ &= e^{-j\frac{3}{2}\omega} \underbrace{\left[2h(0)\cos\frac{3\omega}{2} + 2h(1)\cos\frac{\omega}{2} \right]}_{H_r(\omega)} \end{aligned}$$

Aquí también

$$H(\omega) = H_r(\omega) e^{-j\frac{3}{2}\omega}$$

donde

$$|H(\omega)| = |H_r(\omega)|$$

y la fase resulta

$$\theta(\omega) = \begin{cases} -\frac{3\omega}{2} & \text{si } H_r(\omega) > 0 \\ -\frac{3\omega}{2} + \pi & \text{si } H_r(\omega) < 0 \end{cases}$$

que es lineal a tramos, con saltos de 180° donde $H_r(\omega)$ cambia de signo.

Basados en estos ejemplos para $M = 4$ y $M = 5$, se puede extrapolar al caso general de un M arbitrario. En general, la respuesta en frecuencia de un filtro FIR, cuya respuesta al impulso $h(n)$ satisface la condición de simetría (17), puede expresarse como

$$H(\omega) = H_r(\omega) e^{-j \frac{\omega(M-1)}{2}} \quad (19)$$

donde

$$H_r(\omega) = h\left(\frac{M-1}{2}\right) + 2 \sum_{n=0}^{\frac{M-3}{2}} h(n) \cos\left[\omega\left(\frac{M-1}{2} - n\right)\right] \quad \text{M impar} \quad (20)$$

$$H_r(\omega) = 2 \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} h(n) \cos\left[\omega\left(\frac{M-1}{2} - n\right)\right] \quad \text{M par} \quad (21)$$

La característica de fase del filtro, tanto para M par como impar, resulta

$$\theta(\omega) = \begin{cases} -\omega \frac{(M-1)}{2} & \text{si } H_r(\omega) > 0 \\ -\omega \frac{(M-1)}{2} + \pi & \text{si } H_r(\omega) < 0 \end{cases} \quad (22)$$

Consideremos ahora la condición de simetría (18), es decir

$$h(n) = -h(M-1-n)$$

que corresponde a una respuesta al impulso antisimétrica.

Si M es impar, el punto central de la respuesta al impulso antisimétrica $h(n)$ es $n = \frac{M-1}{2}$. La condición (18) implica entonces que

$$h\left(\frac{M-1}{2}\right) = 0$$

Por ejemplo, si $M = 5$, entonces

$$h(0) = -h(4)$$

$$h(1) = -h(3)$$

$$h(2) = 0$$

En cambio si M es par, cada término de $h(n)$ tiene su correspondiente de signo opuesto.

La respuesta en frecuencia de un filtro FIR con una respuesta al impulso antisimétrica puede expresarse como

$$H(\omega) = H_r(\omega) e^{j\left[-\frac{\omega(M-1)}{2} + \frac{\pi}{2}\right]} \quad (23)$$

donde

$$H_r(\omega) = 2 \sum_{n=0}^{\frac{M-3}{2}} h(n) \sin\left[\omega\left(\frac{M-1}{2} - n\right)\right] \quad \text{M impar} \quad (24)$$

$$H_r(\omega) = 2 \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} h(n) \sin\left[\omega\left(\frac{M-1}{2} - n\right)\right] \quad \text{M par} \quad (25)$$

La característica de fase del filtro, tanto para M par como impar, es

$$\theta(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \omega \frac{(M-1)}{2} & \text{si } H_r(\omega) > 0 \\ \frac{3\pi}{2} - \omega \frac{(M-1)}{2} & \text{si } H_r(\omega) < 0 \end{cases}$$

Comentarios:

- Para el caso simétrico, el número de coeficientes del filtro que especifican la respuesta en frecuencia es

$$\frac{M+1}{2} \quad \text{si } M \text{ es impar}$$

$$\frac{M}{2} \quad \text{si } M \text{ es par}$$

- Para el caso antisimétrico resulta

$$h\left(\frac{M-1}{2}\right) = 0$$

y el número de coeficientes del filtro resulta

$$\frac{M-1}{2} \quad \text{si } M \text{ es impar}$$

$$\frac{M}{2} \quad \text{si } M \text{ es par}$$

- La elección entre el filtro simétrico o antisimétrico depende de la aplicación. Por ejemplo, si $h(n) = -h(M-1-n)$ y M es impar resulta

$$H_r(0) = 0 \quad \text{y} \quad H_r(\pi) = 0$$

por lo que el filtro no es adecuado para un filtro pasa bajos o pasa altos.

Similarmente, si $h(n) = -h(M-1-n)$ y M es par resulta

$$H_r(0) = 0$$

por lo que este filtro no es apropiado para un filtro pasa bajos.

Las ecuaciones (20) y (21) (caso simétrico) y (24) y (25) (caso antisimétrico), constituyen un conjunto de ecuaciones lineales para la determinación de los coeficientes de un filtro FIR de fase lineal.

Es necesario entonces especificar $\frac{M+1}{2}$ o $\frac{M}{2}$ (caso simétrico) de valores de $H(\omega)$, o bien, $\frac{M-1}{2}$ o $\frac{M}{2}$ (caso antisimétrico) valores de $H(\omega)$, para poder calcular los coeficientes $\{h(n)\}$ de la respuesta al impulso del filtro.

Si bien los valores de ω pueden seleccionarse arbitrariamente, usualmente se seleccionan valores de frecuencia equiespaciados en el rango $0 \leq \omega \leq \pi$. Es decir

$$\omega_k = \frac{2k\pi}{M} \quad k = 0, 1, \dots, \frac{M-1}{2} \quad M \text{ impar}$$

$$k = 0, 1, \dots, \frac{M}{2} - 1 \quad M \text{ par}$$

Para el caso simétrico, si denominamos

$$a_{kn} = 2 \cos \left[\omega_k \left(\frac{M-1}{2} - n \right) \right]$$

$$a_{kn} = 1 \quad n = \frac{M-1}{2} \quad \forall k$$

entonces las ecuaciones (20) y (21) resultan

$$\sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}} a_{kn} h(n) = H_r(\omega_k) \quad k = 0, 1, \dots, \frac{M-1}{2} \quad M \text{ impar} \quad (26)$$

$$\sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} a_{kn} h(n) = H_r(\omega_k) \quad k = 0, 1, \dots, \frac{M}{2} - 1 \quad M \text{ par} \quad (27)$$

de donde pueden despejarse los coeficientes $\{h(n)\}$ del filtro.

4. 2 Diseño de filtros FIR de fase lineal usando ventanas

En este método se parte de una especificación $H_d(\omega)$ de la respuesta en frecuencia deseada y se determina la correspondiente respuesta al impulso $h_d(n)$ del filtro, a través de la transformada inversa de Fourier, esto es

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\omega) e^{j\omega n} d\omega \quad (28)$$

Como en general la respuesta al impulso obtenida es de longitud infinita, debe ser truncada, por ejemplo en $n = M-1$, de manera que resulte un filtro FIR de longitud M .

Truncar la respuesta al impulso $h_d(n)$ es equivalente a multiplicar $h_d(n)$ por una *ventana rectangular* definida como

$$w(n) = \begin{cases} 1 & n = 0, 1, \dots, M-1 \\ 0 & \text{c.o.c} \end{cases} \quad (29)$$

Es decir, la respuesta al impulso del filtro FIR resulta

$$h(n) = h_d(n)w(n) \quad (30)$$

La respuesta en frecuencia del filtro FIR resulta entonces la convolución entre la respuesta en frecuencia deseada y el espectro de la ventana

$$H(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\lambda) W(\omega - \lambda) d\lambda \quad (31)$$

El espectro de la ventana rectangular resulta

$$W(\omega) = \sum_{n=0}^{M-1} e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-j\omega M}}{1 - e^{-j\omega}} = e^{-j\omega \frac{(M-1)}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\omega M}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \quad (32)$$

La magnitud resulta

$$|W(\omega)| = \frac{\left| \sin\left(\frac{\omega M}{2}\right) \right|}{\left| \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) \right|} \quad -\pi \leq \omega \leq \pi$$

en tanto que la fase es seccionalmente lineal

$$\theta(\omega) = \begin{cases} -\omega \frac{(M-1)}{2} & \text{si } \sin\left(\frac{\omega M}{2}\right) \geq 0 \\ -\omega \frac{(M-1)}{2} + \pi & \text{si } \sin\left(\frac{\omega M}{2}\right) < 0 \end{cases}$$

Los espectros de amplitud y fase se representan en la figura 7.

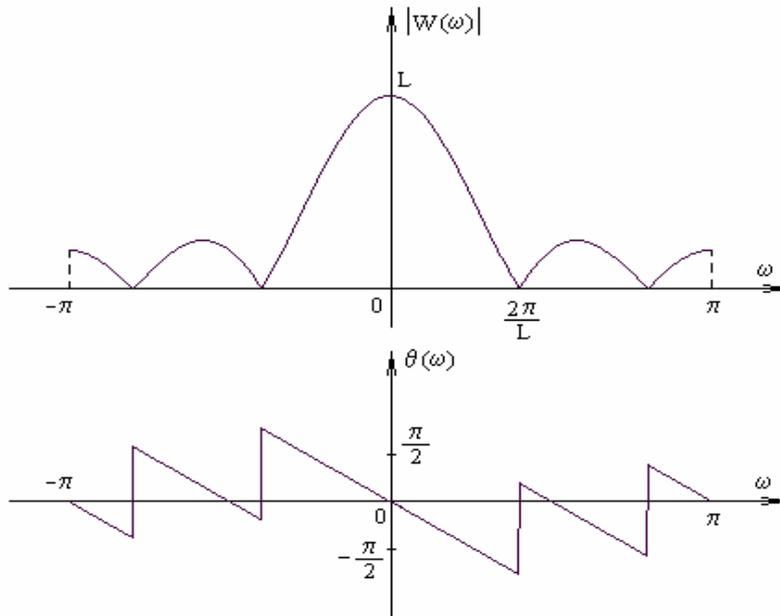


Figura 7: Espectros de Amplitud y Fase de una Ventana Rectangular.

La presencia de importantes lóbulos laterales en el espectro de la ventana rectangular provoca efectos indeseables en la respuesta en frecuencia $H(\omega)$ del filtro FIR. Esto puede mejorarse mediante el uso de otras ventanas que no contienen discontinuidades abruptas en su característica en el dominio temporal. Por ejemplo, podemos mencionar: Hamming, Hann, Blackman, Kaiser, Lanczos, Turkey.

Considerando que, por definición, es

$$H_d(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d(n) e^{-j\omega n} \quad (33)$$

y que $H_d(\omega)$ es un espectro periódico, entonces (33) puede pensarse como la serie de Fourier en tiempo discreto de $H_d(\omega)$, por lo que los términos $h_d(n)$ pueden pensarse como los coeficientes de Fourier de esa expansión en series. Truncar los $h_d(n)$ equivale entonces a truncar la serie de Fourier de $H_d(\omega)$ para obtener $H(\omega)$, la respuesta en frecuencia del filtro.

4.3 Diseño de filtros FIR inversos por el método de Mínimos Cuadrados

Sea $h_d(n)$ con $n \geq 0$ la respuesta al impulso deseada y $H_d(z)$ la correspondiente función transferencia Z. Se quiere aproximar el recíproco de esta transferencia con una función transferencia de la forma FIR, es decir:

$$\frac{1}{H_d(z)} \approx \frac{1}{H(z)} = \frac{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}{b_0} \quad (34)$$

Consideremos la conexión en cascada del filtro deseado $H_d(z)$ con el filtro FIR inverso $1/H(z)$ como se indica en la figura 8.

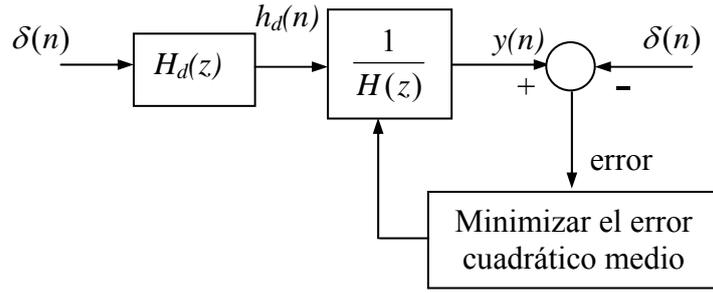


Figura 8: Esquema de estimación de un filtro FIR inverso por el método de mínimos cuadrados.

Consideremos que el sistema es excitado con un impulso unitario $\delta(n)$, como se indica en la figura, por lo que la entrada al filtro inverso $1/H(z)$ es $h_d(n)$ y la salida es $y(n)$. Idealmente debería ser $y(n) = y_d(n) = \delta(n)$, pero en realidad resulta:

$$y(n) = \frac{1}{b_0} \left[h_d(n) + \sum_{k=1}^N a_k h_d(n-k) \right] \quad (35)$$

La condición $y_d(0) = y(0) = 1$ se satisface seleccionando $b_0 = h_d(0)$. Para $n > 0$, $y(n)$ representa el error entre la respuesta deseada $y_d(n) = 0$ y la respuesta real. Los parámetros a_k pueden entonces determinarse minimizando la suma de los cuadrados de la secuencia de error

$$\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} y^2(n) = \frac{1}{h_d^2(0)} \sum_{n=1}^{\infty} \left[h_d(n) + \sum_{k=1}^N a_k h_d(n-k) \right]^2 \quad (36)$$

Puede probarse que el conjunto de parámetros $\{a_k\}$ que minimiza el error cuadrático medio ε se obtiene resolviendo el conjunto de ecuaciones lineales

$$\sum_{k=1}^N a_k r_{hh}(k, \ell) = -r_{hh}(\ell, 0) \quad \ell = 1, 2, \dots, N \quad (37)$$

donde, por definición es

$$r_{hh}(k, \ell) = \sum_{n=0}^{\infty} h_d(n-k) h_d(n-\ell) = \sum_{n=0}^{\infty} h_d(n) h_d(n+k-\ell) = r_{hh}(k-\ell) \quad (38)$$

En un problema de diseño, la respuesta al impulso deseada $h_d(n)$ es especificada en un número finito de puntos, por ejemplo para $0 \leq n \leq L$, con $L \gg N$. En este caso, la secuencia de autocorrelación puede calcularse a partir de la secuencia finita $h_d(n)$, como

$$\hat{r}_{hh}(k-\ell) = \sum_{n=0}^{L-|k-\ell|} h_d(n) h_d(n+k-\ell), \quad 0 \leq k-\ell \leq N \quad (39)$$

y estos valores pueden usarse para resolver el sistema de ecuaciones lineales (37).

5. Diseño de Filtros Digitales IIR a partir de filtros analógicos mediante la aproximación de derivadas

La idea es diseñar un filtro digital a partir de un filtro analógico, mediante la discretización de la ecuación diferencial que representa al mismo. Si se parte de una representación con una función transferencial racional del filtro analógico, de la forma

$$H_a(s) = \frac{\sum_{k=0}^M \beta_k s^k}{\sum_{k=0}^N \alpha_k s^k} \quad (40)$$

la ecuación diferencial que describe el comportamiento entrada-salida del filtro resulta

$$\sum_{k=0}^N \alpha_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M \beta_k \frac{d^k u(t)}{dt^k} \quad (41)$$

A partir de esta ecuación diferencial puede obtenerse una ecuación en diferencias equivalente realizando una discretización del tiempo de la forma $t = nT$, siendo T el período de muestreo, y aproximando las derivadas por diferencias finitas. Existen diversas formas de aproximar las derivadas en (41). Consideraremos aquí dos de los métodos de aproximación más utilizados: el método de Euler y la regla de aproximación trapezoidal o transformación bilineal.

Aproximación por el Método de Euler de primer orden

La forma más elemental de aproximar la derivada es la denominada aproximación de Euler de primer orden dada por

$$\left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=nT} = \frac{x(nT) - x((n-1)T)}{T} \quad (42)$$

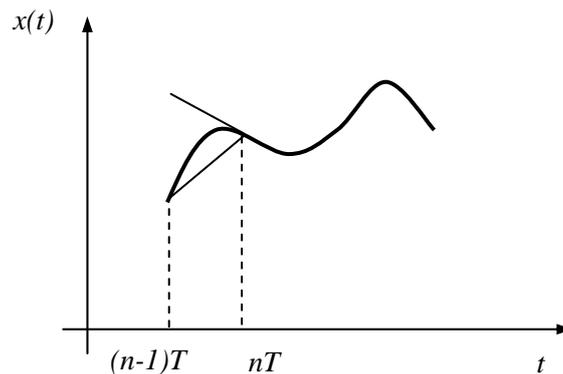


Figura 9: Aproximación de Euler de primer orden

Como puede verse en la figura 9, la aproximación de Euler de primer orden es buena sólo para períodos de muestreo T muy pequeños.

Consideremos ahora un diferenciador analógico ideal con relación entrada-salida

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad (43)$$

La correspondiente función transferencia resulta $H_a(s) = s$. Transformando Z la ecuación (42), se obtiene la correspondiente función transferencia discreta

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{T} \quad (44)$$

Procediendo análogamente para las derivadas k-ésimas, se obtiene que la función transferencia para el filtro digital IIR mediante la aproximación de las derivadas usando diferencias finitas, resulta

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=(1-z^{-1})/T} \quad (45)$$

donde $H_a(s)$ es la función transferencia del filtro analógico caracterizado por la ecuación diferencial (41).

La transformación

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T}$$

o equivalentemente

$$z = \frac{1}{1 - sT} \quad (46)$$

corresponde a un mapeo del plano s en el plano z , como el representado en la figura 10.

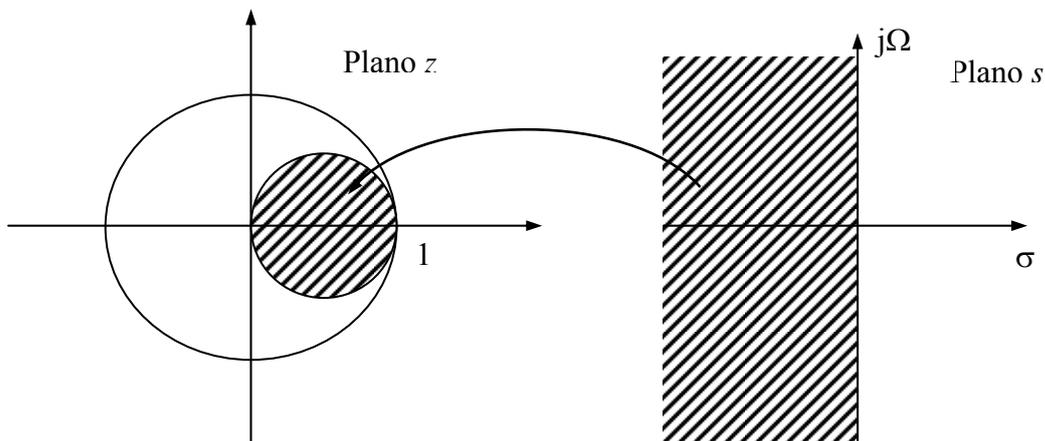


Figura 10: Mapeo del Plano s en el Plano z mediante la transformación $z=1/(1-sT)$.

Reemplazando $s = j\Omega$ en (46), resulta

$$z = \frac{1}{1 - j\Omega T} = \frac{1}{1 + \Omega^2 T^2} + j \frac{\Omega T}{1 + \Omega^2 T^2} \quad (47)$$

que corresponde a la ecuación de una circunferencia con radio $\frac{1}{2}$ y con centro $z = \frac{1}{2}$. Puede probarse que los puntos en el semiplano izquierdo del plano s se mapean en el interior del círculo en el plano z . Esta transformación tiene entonces la propiedad deseable de transformar filtros analógicos estables en filtros digitales estables. Sin embargo, los polos se ven confinados en una pequeña región (el interior del círculo de radio $\frac{1}{2}$) lo que corresponde a frecuencias relativamente pequeñas. Como consecuencia, esta transformación sólo puede utilizarse para el diseño de filtros pasabajo y pasabanda con frecuencias de corte relativamente pequeñas.

Aproximación trapezoidal de la derivada – Transformación Bilineal

Definamos

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

Luego

$$x(t) = \int_{-\infty}^t y(\tau) d\tau \quad (48)$$

Realizando una discretización del tiempo de la forma $t = nT$, siendo T el período de muestreo, puede escribirse

$$x((n+1)T) = \underbrace{\int_{-\infty}^{nT} y(\tau) d\tau}_{x(nT)} + \int_{nT}^{(n+1)T} y(\tau) d\tau = x(nT) + \underbrace{\int_{nT}^{(n+1)T} y(\tau) d\tau}_{(I)} \quad (49)$$

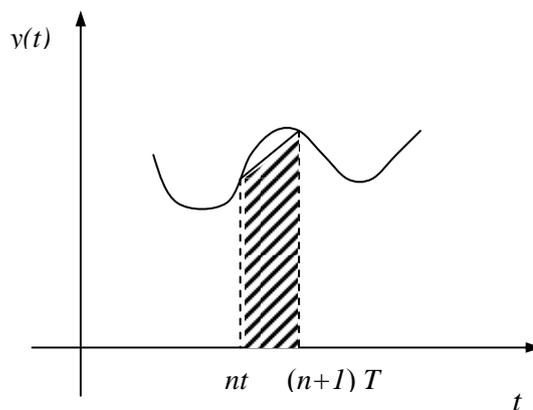


Figura 11: Aproximación con la regla trapezoidal.

La integral (I) en (49) puede aproximarse por el área rayada en figura 11. Con esta aproximación la ecuación (49) resulta

$$x((n+1)T) = x(nT) + \frac{T}{2} [y((n+1)T) + y(nT)] \quad (50)$$

Transformando Z , se obtiene para $Y(z)$ la siguiente expresión

$$Y(z) = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} X(z) = H(z)X(z) \quad (51)$$

Considerando que $Y(s) = sX(s) = H_a(s)X(s)$, puede pensarse en un mapeo del plano s en el plano z de la forma

$$s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \quad (52)$$

que permite obtener la función transferencia Z discreta $H(z)$ a partir de la función transferencia del sistema continuo $H_a(s)$ según

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}} \quad (53)$$

A la transformación (52) se la denomina **Transformación Bilineal**, y permite obtener un filtro digital a partir de la función transferencia de un filtro analógico. Puede verse que la Transformación Bilineal mapea el eje imaginario del plano s en la circunferencia unitaria del plano z , y el semiplano izquierdo del plano s en el interior de la circunferencia unitaria del plano z . De esta forma, filtros analógicos estables se mapean en filtros digitales estables. El mapeo del plano s en el plano z con la transformación bilineal se representa en la figura 12.

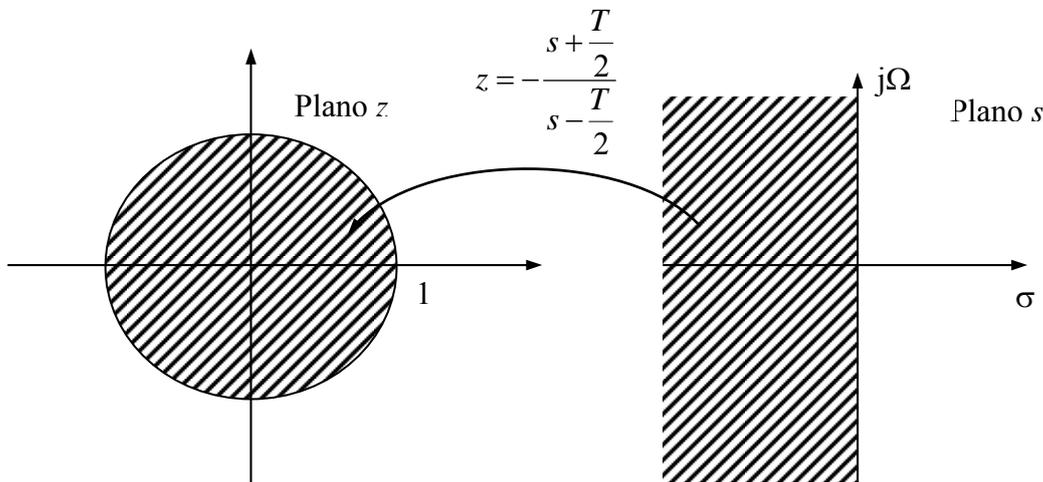


Figura 12: Transformación Bilineal.

Transformación Bilineal en el dominio frecuencial

Otra forma de derivar la transformación bilineal es en el dominio frecuencial, imponiendo que la respuesta en frecuencia del filtro digital sea igual a la respuesta en frecuencia del filtro analógico, es decir

$$H(e^{j\omega}) = H_a(j\Omega) \quad (54)$$

Sin embargo, es claro que esta condición no puede cumplirse para todas las frecuencias debido al fenómeno de aliasing. Cuando la variable s recorre el eje imaginario en el plano s una única vez, la variable z recorre la circunferencia unitaria en el plano z infinitas veces, ya que $H(e^{j\omega})$ es periódica con período 2π .

La idea es encontrar una transformación $B(z)$ que mapee números complejos $z = e^{j\omega}$ sobre la circunferencia unitaria en el plano z , en números complejos $s = j\Omega$ sobre el eje imaginario en el plano s , para frecuencias ω en el intervalo $[0 \ \pi]$. Es decir, la transformación deberá ser tal que se verifique:

$$B(e^{j\omega}) = j\Omega \quad (55)$$

donde las frecuencias continuas y discretas verifican $\Omega = \omega F_s$, donde F_s es la frecuencia de muestreo. Si es posible hallar dicha transformación, entonces la respuesta en frecuencia del filtro digital $H(\omega)$ se puede calcular en función de la respuesta en frecuencia del filtro analógico $H_a(\Omega)$ a través de

$$H(e^{j\Omega T}) = H_a(s) \Big|_{s=B(e^{j\Omega T})} = H_a(B(e^{j\Omega T})) \quad (56)$$

Una posible transformación es la bilineal introducida anteriormente en (52)

$$B(z) = C \frac{z-1}{z+1} \quad (57)$$

donde ahora se deja el parámetro C libre (igual a $2/T$ en (52)) de manera de ajustar lo mejor posible las dos respuestas en frecuencia (continua y discreta) en el intervalo $\omega \in [0 \pi]$.

Reemplazando

$$z = e^{j\omega} = e^{j\Omega T}$$

en (57), resulta

$$\begin{aligned} B(e^{j\Omega T}) &= C \frac{e^{j\Omega T} - 1}{e^{j\Omega T} + 1} \\ &= C \frac{e^{j\Omega T/2} - e^{-j\Omega T/2}}{e^{j\Omega T/2} + e^{-j\Omega T/2}} \\ &= jC \frac{\text{sen}(\Omega T/2)}{\text{cos}(\Omega T/2)} \\ &= jC \tan\left(\frac{\Omega T}{2}\right) \end{aligned}$$

Vemos entonces que se verifica el requerimiento (55). Puede elegirse C de manera que las respuestas en frecuencia continua y discreta coincidan para una frecuencia particular Ω_* , es decir

$$\Omega_* = C \tan\left(\frac{\Omega_* T}{2}\right) \quad (58)$$

lo que resulta en

$$C = \Omega_* \cot\left(\frac{\Omega_* T}{2}\right) \quad (59)$$

Para este valor de C las respuestas en frecuencia discreta y continua coinciden exactamente para la frecuencia Ω_* , que se denomina **frecuencia de matching**. El valor $C=2/T$ en (52) correspondería a una frecuencia de matching $\Omega_* = 0$, que es la única solución de

$$\frac{2}{T} = \Omega_* \cot\left(\frac{\Omega_* T}{2}\right)$$

Ejemplo

Supongamos que se parte de un filtro analógico caracterizado por su función transferencia

$$H_a(s) = \frac{1}{2s + 1}$$

La respuesta en frecuencia del filtro se representa en la figura 13.

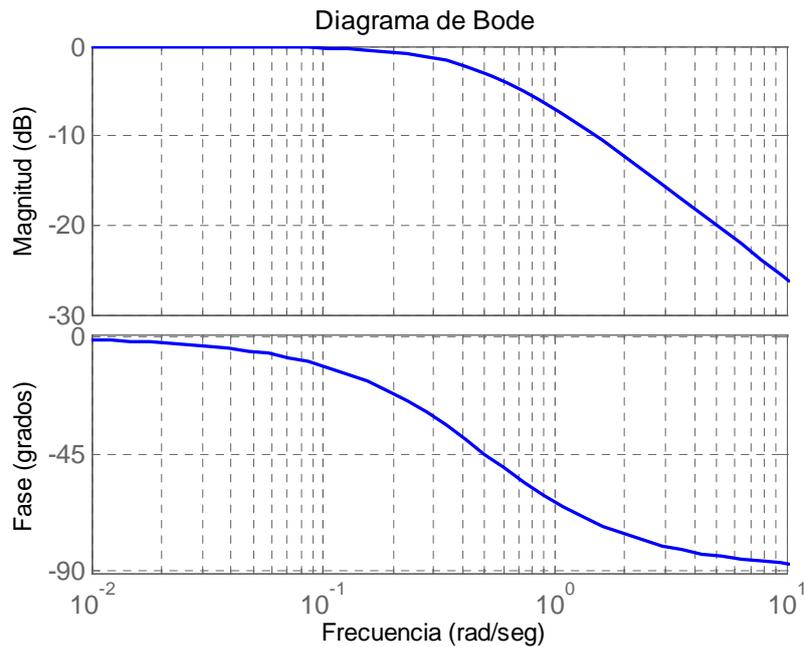


Figura 13: Respuesta en Frecuencia del filtro analógico.

Se quiere diseñar un filtro digital con una frecuencia de matching $\Omega_* = 0.5$ rad/seg , con una frecuencia de muestreo de 10 Hz. De (59), el valor de la constante C de la transformación bilineal resulta

$$C = 0.5 \cot\left(\frac{0.5 \times 0.1}{2}\right) = 19.9958331$$

en tanto que la transferencia discreta resulta

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=C \frac{z-1}{z+1}} = \frac{z+1}{(2C+1)z + (1-2C)} = \frac{z+1}{40.991666z - 38.991666}$$

La respuesta en frecuencia del filtro analógico y del filtro digital se representa en la figura 14.

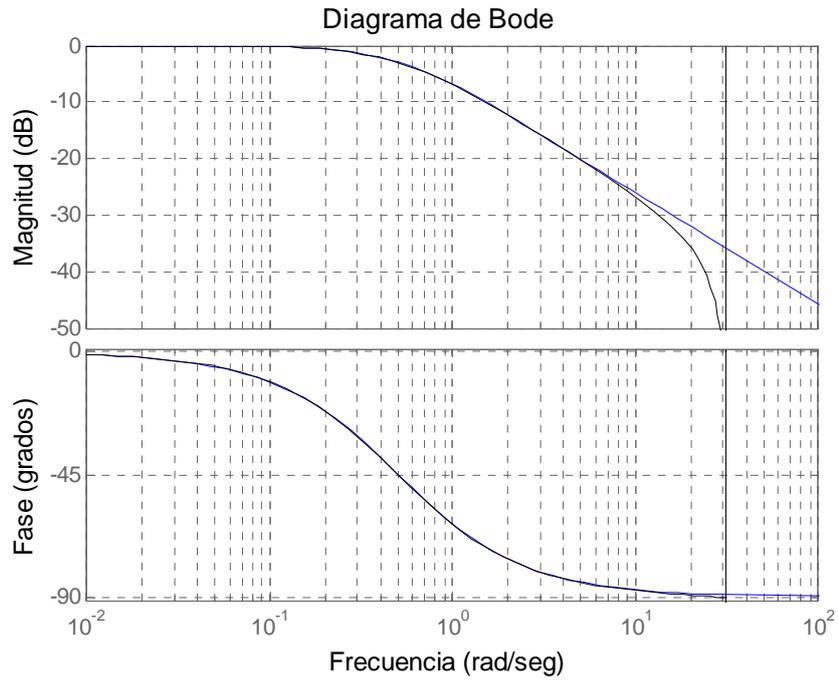


Figura 14: Respuesta en Frecuencia del Filtro analógico y del correspondiente filtro digital.