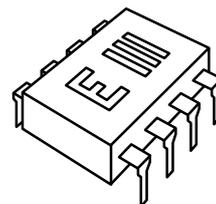




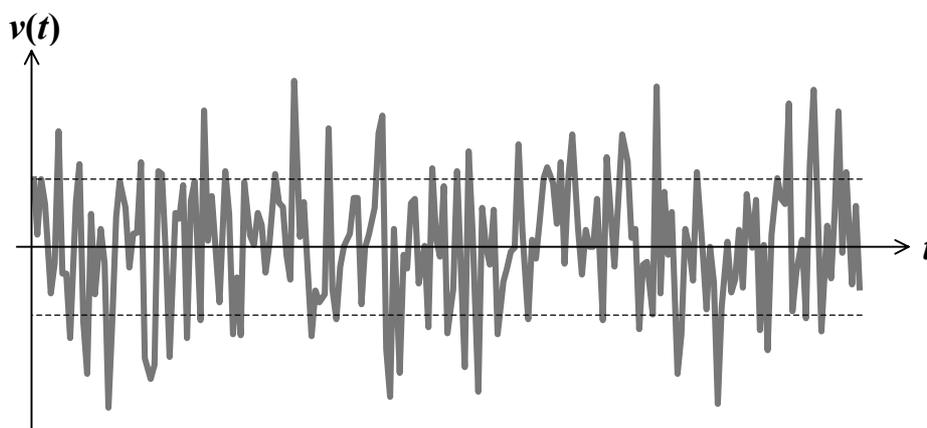
Universidad Nacional de Rosario
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Escuela de Ingeniería Electrónica
Departamento de Electrónica



ELECTRÓNICA III

INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS FRECUENCIAL Y AL RUIDO ELÉCTRICO

Federico Miyara
Luis A. Lahoz



Tercera Edición - Año 2003

Datos de publicación:
Primera edición: 1982
Segunda edición: 1987
Tercera edición corregida y ampliada
Primera edición digital
Marzo de 2003
<http://www.fceia.unr.edu.ar/enica3/ruido-t.pdf>

CONTENIDO

1. Introducción al análisis frecuencial

- 1.1. Serie de Fourier
- 1.2. Espectro discreto de frecuencias
- 1.3. Relación entre el espectro de la entrada y el de la salida de un sistema lineal
- 1.4. Contenido de potencia de una onda periódica
- 1.5. Potencia en régimen permanente
- 1.6. Espectro de potencia
- 1.7. Contenido de potencia y energía en un rango de frecuencias
- 1.8. Función de potencia acumulada.
- 1.9. Espectro de densidad de potencia
- 1.10. Integral de Fourier
- 1.11. Densidad espectral
- 1.12. Relación entre el espectro de la entrada y el de la salida de un sistema lineal
- 1.13. Contenido de energía y densidad de energía de una onda no periódica.
- 1.14. Energía en una banda de frecuencias.
- 1.15. Relación entre las densidades de energía de la entrada y la salida de un sistema lineal
- 1.16. El teorema de convolución
- 1.17. Espectro de densidad de potencia media
- 1.18. Funciones aleatorias
- 1.19. Funciones de correlación
- 1.20. Correlación y convolución
- 1.21. Correlación y densidad de potencia media
- 1.22. Distribución estadística de las amplitudes de una señal

2. Introducción al estudio del ruido

- 2.1. Ruido
- 2.2. Clasificación de las fuentes de ruido
- 2.3. Ruido térmico
- 2.4. Circuitos con resistencias ruidosas
- 2.5. Ruido de emisión
- 2.6. Ruido $1/f$
- 2.7. Ruido de ráfaga o de fritura
- 2.8. Ancho de banda equivalente de ruido
- 2.9. Algunas definiciones sobre potencia
 - 2.9.1. Potencia disponible
 - 2.9.2. Potencia disponible de ruido
 - 2.9.3. Ganancia de potencia disponible
- 2.10. Factor de ruido y figura de ruido
 - 2.10.1. Factor de ruido
 - 2.10.2. Figura de ruido
 - 2.10.3. Figura de ruido puntual y promedio
 - 2.10.4. Relación señal/ruido
 - 2.10.5. Figura de ruido de un transistor
 - 2.10.6. Factor de ruido en amplificadores en cascada
 - 2.10.7. Medición del factor de ruido
 - 2.10.8. Resumen de las características del factor de ruido
- 2.11. Modelo de ruido con fuente de tensión y de corriente a la entrada
- 2.12. Ruido de banda ancha
- 2.13. Temperatura de ruido

1. INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS FRECUENCIAL

1.1. Serie de Fourier

Toda función periódica de una clase bastante amplia de funciones (que contiene a las funciones que describen fenómenos físicos) se puede representar mediante una superposición de senoides cuyas frecuencias son múltiplos enteros de la frecuencia de dicha función. Esta representación se conoce como desarrollo en serie de Fourier. Si $g(t)$ es periódica, su período es el menor número positivo T tal que para todo t sea

$$g(t + T) = g(t). \quad (1)$$

Definimos la frecuencia angular ω como

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f. \quad (2)$$

Entonces

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sen n\omega t), \quad (3a)$$

donde

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) \cos n\omega t \, dt, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3b)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) \sen n\omega t \, dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

Transformando ligeramente la serie de Fourier (3a) pueden obtenerse formas alternativas que facilitan su interpretación o su manejo. Por medio de identidades trigonométricas se llega a la expresión:

$$g(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega t + \varphi_n) \quad (4a)$$

donde

$$c_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad n = 1, 2, \dots \quad (4b)$$

$$\varphi_n = -\arctg \frac{b_n}{a_n} \quad n = 1, 2, \dots$$

Esta forma pone en evidencia la descomposición en armónicas con su correspondiente amplitud y fase. La forma siguiente, obtenida mediante la fórmula de Euler, es la más útil para el análisis frecuencial, por la simplicidad de su manejo:

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega t} \quad (5a)$$

donde

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{jn\omega t} dt \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5b)$$

Se cumplen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \operatorname{Re} C_n \\ b_n &= -2 \operatorname{Im} C_n \\ C_0 &= c_0 = \frac{a_0}{2} \\ C_n &= \bar{C}_{-n} \\ |C_n| &= \frac{c_n}{2} \\ \varphi_n &= \arg C_n \end{aligned} \quad (6)$$

1.2. Espectro discreto de frecuencias

La representación temporal de una función periódica, ya sea en forma analítica o gráfica, es la herramienta ideal cuando se desea conocer la evolución de la variable física descrita por dicha función. Pero en muchos otros problemas, por ejemplo el de estudiar las modificaciones que sufre una señal al atravesar un sistema dado, el enfoque temporal (o de la forma de onda) no es el mejor, debido a que habitualmente se requiere resolver una ecuación diferencial y los resultados dependen fuertemente de la función bajo estudio. En otras palabras, es difícil o casi imposible establecer conclusiones generales.

Más ventajosa resulta en estos casos la representación por medio del **espectro de frecuencias**, que no es más que la gráfica de los coeficientes C_n de las ecuaciones (5) en función de n . La ecuación (5a) nos dice que $g(t)$ queda completamente definida por los mismos, por lo cual efectivamente representan a la función. Dado que los C_n son complejos, para facilitar su representación gráfica se dibujan separadamente el módulo y el argumento en función de n , dando lugar al espectro de amplitud y de fase respectivamente.

Ejemplo: Si

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & \text{si } \tau < t < T \end{cases} \quad (7)$$

y T es el período, entonces

$$\begin{aligned}
 |C_n| &= \frac{\tau \operatorname{sen}(n\pi\tau/T)}{T n\pi\tau/T} & n = \pm 1, \pm 2, \dots \\
 C_0 &= \frac{\tau}{T} \\
 \arg C_n &= -\frac{n\pi\tau}{T}
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

En la figura 1 se ha representado el caso en que $\tau/T = 1/4$. En el eje de las abscisas podría haberse colocado, en lugar de n , la frecuencia n/T o la frecuencia angular $2\pi n/T$. En ese caso, la distancia entre bastones consecutivos sería igual a la frecuencia fundamental ($1/T$ ó $2\pi/T$). Éste es el espectro bilateral, debido a que n (o bien la frecuencia) toma valores positivos y negativos. El espectro unilateral utiliza, en lugar de los C_n , las amplitudes c_n y las fases φ_n de las ecuaciones (4).

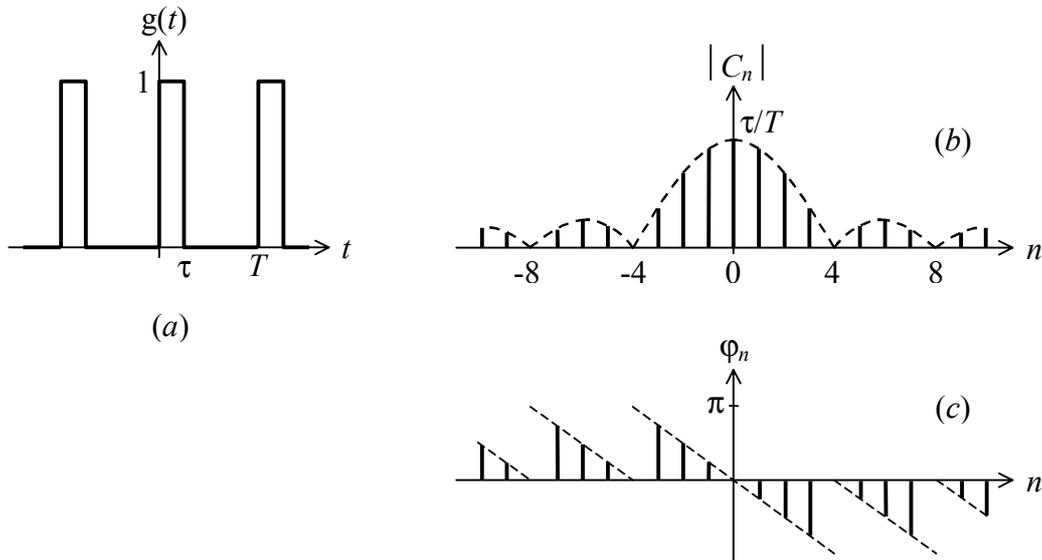


Figura 1. (a) Tren de pulsos periódico. (b) Su espectro de amplitud. (c) Su espectro de fase.

Por último, aclaremos que el espectro considerado es discreto pues las frecuencias que en él intervienen son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental.

En las próximas secciones se pondrán de manifiesto las ventajas del espectro de frecuencias.

1.3. Relación entre los espectros de la entrada y la salida de un sistema lineal

Cualquier sistema en el cual la entrada y la salida están vinculadas por una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes se traduce, a través de la transformación de Laplace, en la siguiente ecuación:

$$R(s) = H(s) E(s), \quad (9)$$

donde $E(s)$ y $R(s)$ son las transformadas de Laplace de la entrada y de la salida y $H(s)$ la función de transferencia del sistema. Si la entrada es $e^{jn\omega t}$ (el equivalente complejo a una señal senoidal) entonces

$$E(s) = \frac{1}{s - jn\omega}, \quad (10)$$

luego la salida será

$$R(s) = H(s) \frac{1}{s - jn\omega}. \quad (11)$$

$R(s)$ contendrá los polos de $H(s)$ y un polo en $jn\omega$ aportado por la transformada de Laplace de la entrada. Suponiendo que $H(s)$ es estable, sus polos tendrán partes reales < 0 , por lo cual no coincidirán con $jn\omega$. Puede realizarse, entonces, un desarrollo en fracciones simples de la forma

$$R(s) = \frac{H(jn\omega)}{s - jn\omega} + \sum_{k=1}^q \frac{A_k}{s - s_k}, \quad (12)$$

donde s_k son los polos de $H(s)$.¹ Antitransformando Laplace, se obtiene una respuesta

$$r(t) = H(jn\omega) e^{jn\omega t} + \sum_{k=1}^q A_k e^{s_k t}. \quad (13)$$

Todos los términos de la sumatoria tienden a 0 rápidamente por ser la parte real de s_k negativa, por lo cual al cabo de un tiempo suficientemente prolongado, resulta

$$r(t) \cong H(jn\omega) e^{jn\omega t}. \quad (14)$$

Como esto vale para todo n entero, si la entrada es una serie de Fourier

$$e(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega t}, \quad (15)$$

resulta, aplicando el teorema de superposición, la siguiente respuesta en régimen permanente:

$$r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n H(jn\omega) e^{jn\omega t}. \quad (16)$$

¹ Por simplicidad se supusieron los polos simples. El resultado podría extenderse a polos múltiples haciendo aparecer denominadores de la forma $(s - s_k)^p$

En otras palabras, los coeficientes C_n' de la señal de salida se calculan como:

$$C_n' = C_n H(j n \omega). \quad (17)$$

Esto significa que si se conoce la función de transferencia en el eje imaginario (por ejemplo a través de un diagrama de Bode) el espectro de la salida se calcula fácilmente a partir del de la entrada, cualquiera sea éste. Esta importante propiedad descansa en el hecho de que los sistemas lineales conservan la forma de onda senoidal.

1.4. Contenido de potencia de una señal periódica

Se define el contenido de potencia de una señal periódica $g(t)$ como su valor cuadrático medio en un período, es decir:

$$G^2 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (g(t))^2 dt. \quad (18)$$

G es el *valor eficaz* de la señal. El nombre “contenido de potencia” se debe a que G^2 es numéricamente igual a la potencia media entregada a una resistencia de 1Ω por una corriente o tensión igual a $g(t)$.

Nos proponemos calcular G^2 a partir del espectro de frecuencias de $g(t)$. Haremos un análisis algo más general, calculando el *producto de potencia*, J , dado por

$$J = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g_1(t) g_2(t) dt. \quad (19)$$

donde $g_1(t)$ y $g_2(t)$ son periódicas de período T y, por consiguiente,

$$g_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{jn\omega t}, \quad (20)$$

$$g_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n e^{jn\omega t}.$$

Entonces

$$J = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_n B_m \int_{-T/2}^{T/2} e^{j(n+m)\omega t} dt. \quad (21)$$

Las integrales, que se calculan fácilmente, valen

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{j(n+m)\omega t} dt = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ T & \text{si } n = m \end{cases}. \quad (22)$$

Esta propiedad se enuncia diciendo que las funciones $e^{jn\omega t}$ forman una familia ortogonal. Sustituyendo en la ecuación precedente

$$J = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n B_{-n} . \quad (23)$$

Si ahora queremos calcular G^2 , basta tomar en (19)

$$g_1(t) = g_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega t} . \quad (24)$$

Resulta

$$G^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n C_{-n} . \quad (25a)$$

Utilizando las equivalencias dadas en (6) tenemos

$$G^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 , \quad (25b)$$

$$G^2 = c_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c_n}{\sqrt{2}} \right)^2 . \quad (25c)$$

Estas ecuaciones son distintas versiones de la *igualdad de Parseval*. La (25c) expresa que el valor cuadrático medio de una función periódica es la suma de los valores cuadráticos medios de sus armónicos. Debe notarse que el valor cuadrático medio no depende de la fase de los armónicos.

1.5. Potencia en régimen permanente

La ecuación (25c) implica que en el caso en que $g(t)$ es una tensión o una corriente, la potencia media entregada a una resistencia es la suma de las potencias medias entregadas por los armónicos. Extenderemos la validez de este resultado a cualquier dipolo lineal. Si

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{jn\omega t} , \quad (26a)$$

$$i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n e^{jn\omega t}, \quad (26b)$$

son la tensión en bornes del dipolo y la corriente que circula por él entonces la potencia media P entregada al mismo viene dada por el producto de potencia entre $v(t)$ e $i(t)$:

$$P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n B_{-n} \quad (27)$$

Si V_n e I_n son los valores máximos se tiene que

$$A_n = \frac{1}{2} V_n e^{j\phi_n}, \quad (28)$$

$$B_n = \frac{1}{2} I_n e^{j\psi_n},$$

entonces

$$P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{V_n}{2} \frac{I_n}{2} e^{j(\phi_n - \psi_n)}. \quad (29)$$

Realizando algunos cálculos resulta

$$P = V_0 I_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{V_n}{\sqrt{2}} \frac{I_n}{\sqrt{2}} \cos(\phi_n - \psi_n) \quad (30)$$

Aquí se reconoce fácilmente que cada término es la potencia media P_n entregada por el respectivo armónico, es decir

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \quad (31)$$

Vemos que a pesar de que la potencia no es una función lineal de la tensión o la corriente y por lo tanto no admite superposición instante a instante, sí la admite en promedio, debido a que las funciones armónicas constituyen una familia ortogonal y por lo tanto el producto entre dos distintas tiene promedio nulo.

1.6. Espectro de Potencia

Cuando estudiamos el espectro de frecuencias vimos que estaba compuesto por un espectro de amplitud y uno de fase. A pesar de que éstas definen por complejo a la función considerada, sucede frecuentemente que lo más importante no es la amplitud o la

fase de los armónicos, sino su valor cuadrático medio, por estar directamente vinculado con la potencia. Si $g(t)$ es una función periódica dada por

$$g(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega t + \varphi), \quad (32)$$

o, en términos del valor eficaz,

$$g(t) = G_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2}G_n \cos(n\omega t + \varphi), \quad (33)$$

entonces de la ecuación (25) se obtiene

$$G^2 = \sum_{n=0}^{\infty} G_n^2. \quad (34)$$

Aquí G_n^2 es el valor cuadrático medio del armónico de orden n . Se llama *espectro de potencia* de $g(t)$ a la representación gráfica de los G_n^2 en función de n o bien en función de la frecuencia n/T o de la frecuencia angular $\omega = 2\pi n/T$. Se consideró aquí el espectro unilateral, pero puede definirse también el bilateral, teniendo en cuenta las dos primeras formas de la ecuación (25). En la figura 2 se representa el espectro de potencia para el tren de pulsos del ejemplo anterior, que viene dado por

$$G_0^2 = \left(\frac{\tau}{T} \right)^2 \quad (35)$$

$$G_n^2 = 2 \left(\frac{\tau \operatorname{sen} n\pi\tau/T}{n\pi\tau/T} \right)^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Como por definición (ver 1.4) el contenido de potencia de un armónico es su valor cuadrático medio G_n^2 , el espectro de potencia nos proporciona el contenido de potencia de cada armónico.

1.7. Contenido de potencia y energía en un rango de frecuencias

Como para el contenido de potencia vale (según 1.4) el principio de superposición, podemos calcular el contenido de potencia debido a los armónicos que se encuentran en una banda dada de frecuencias, digamos $[f_1, f_2]$, sumando los contenidos de potencia de los mismos:

$$G^2[f_1, f_2] = \sum_{k=n}^m G_k^2, \quad (36)$$

donde, si f es la frecuencia fundamental, n y m son respectivamente el menor y el mayor entero en el intervalo cerrado $[f_1/f_0, f_2/f_0]$, es decir:

$$\begin{aligned} n &= [f_1/f_0] + 1 \\ m &= [f_2/f_0] \end{aligned} \tag{37}$$

La importancia del contenido de potencia en un rango de frecuencias radica en que nos permite clasificar las señales. Por ejemplo, una señal de audio es una señal tal que su contenido de potencia en el rango de frecuencias audibles difiere muy poco de su contenido de potencia total.

Multiplicando el contenido de potencia en la banda $[f_1, f_2]$ por T se obtiene el contenido de energía en esa banda, en un período.

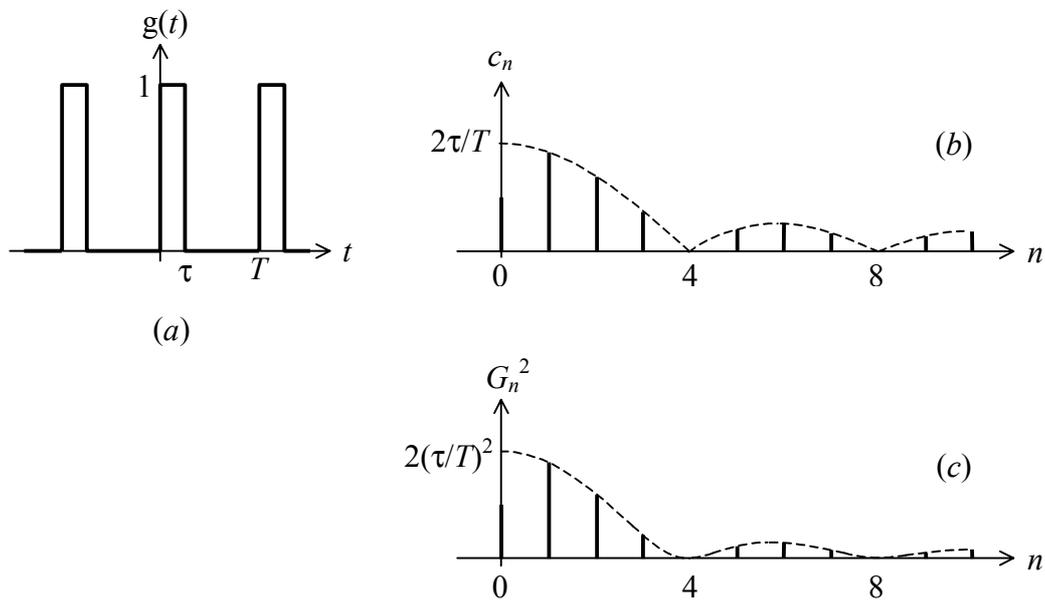


Figura 2. (a) Tren de pulsos periódico. (b) Su espectro (unilateral) de amplitud. (c) Su espectro de potencia.

1.8. Función de potencia acumulada

Se llama *función de potencia acumulada* al contenido de potencia en la banda de frecuencias de 0 a f , y se abrevia $Q(f)$. De la sección anterior se deduce entonces que

$$Q(f) = \sum_{k=0}^m G_k^2, \tag{38}$$

donde m es el mayor entero que no supera a f/f_0 , es decir

$$m = [f/f_0]. \tag{39}$$

Por consiguiente, esta función resulta ser escalonada, como se muestra en la figura 3 para la misma función de los ejemplos anteriores.

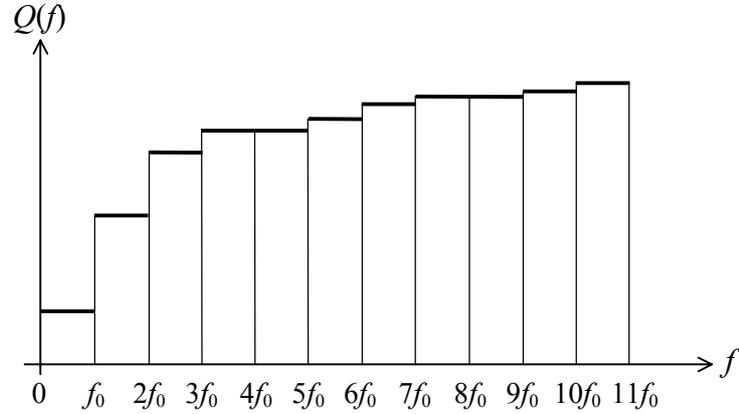


Figura 3. Función de potencia acumulada para un tren de pulsos con $T/\tau = 4$.

Puede darse una expresión compacta para $Q(f)$ utilizando funciones escalón $u(x)$:

$$Q(f) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n^2 u\left(f - \frac{n}{T}\right). \quad (40)$$

Cuando la función periódica considerada es una tensión o corriente, se agrega un subíndice para identificarla: $Q_v(f)$, $Q_i(f)$.

1.9. Espectro de densidad de potencia

Se define el espectro de densidad de potencia, $P(f)$ como:

$$P(f) = \frac{d}{df} Q(f). \quad (41)$$

De la ecuación (40) se obtiene la expresión general de $P(f)$ para señales periódicas, teniendo en cuenta que la derivada de un escalón unitario es el impulso de Dirac, $\delta(x)$:

$$P(f) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n^2 \delta\left(f - \frac{n}{T}\right). \quad (42)$$

La importancia del espectro de densidad de potencia se apreciará más adelante, cuando se extiendan los conceptos hasta ahora vistos a funciones con espectro de fre-

cuencias no discreto. No obstante, observemos que con $P(f)$ podemos expresar el contenido de potencia en una banda $[f_1, f_2]$ de frecuencia así:

$$G_{[f_1, f_2]}^2 = \int_{f_1}^{f_2} P(f) df. \quad (43)$$

En el caso de funciones periódicas (espectro discreto) esta integral se reduce a la suma de la ecuación (36).

1.10. Integral de Fourier

En el estudio hecho hasta el momento sólo se consideraron funciones periódicas, por ser éstas las únicas manejables con la herramienta de análisis frecuencial de que disponíamos, es decir, la serie de Fourier. Sin embargo, no todas las funciones que aparecen en la práctica son periódicas,² de modo que será necesario generalizar el análisis frecuencial a funciones no periódicas.

Consideraremos sólo funciones $g(t)$ de valor absoluto integrable, es decir, tales que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt < \infty. \quad (44)$$

Dado $T > 0$ tiene sentido calcular los coeficientes C_n de la ecuación (5b)

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{jn\omega t} dt \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (45)$$

aunque $g(t)$ no sea periódica. Con estos C_n , la función periódica

$$g_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega t}. \quad (46)$$

coincide con $g(t)$ solamente en el intervalo $[-T/2, T/2]$. Si se hace crecer T , aumenta el intervalo en el cual ambas funciones son iguales. Esto se muestra en la figura 4.

Si $T \rightarrow \infty$, coincidirán en toda la recta, es decir

$$\lim_{T \rightarrow \infty} g_T(t) = g(t). \quad (47)$$

Sustituyendo el valor de los C_n en $g_T(t)$ tendremos

$$g_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(\tau) e^{-jn\frac{2\pi}{T}\tau} d\tau \right) e^{-jn\frac{2\pi}{T}t} \quad (48)$$

² En rigor de verdad no hay funciones periódicas en el mundo físico, pues todas comienzan y terminan en tiempos finitos. Ver el problema 7) c).

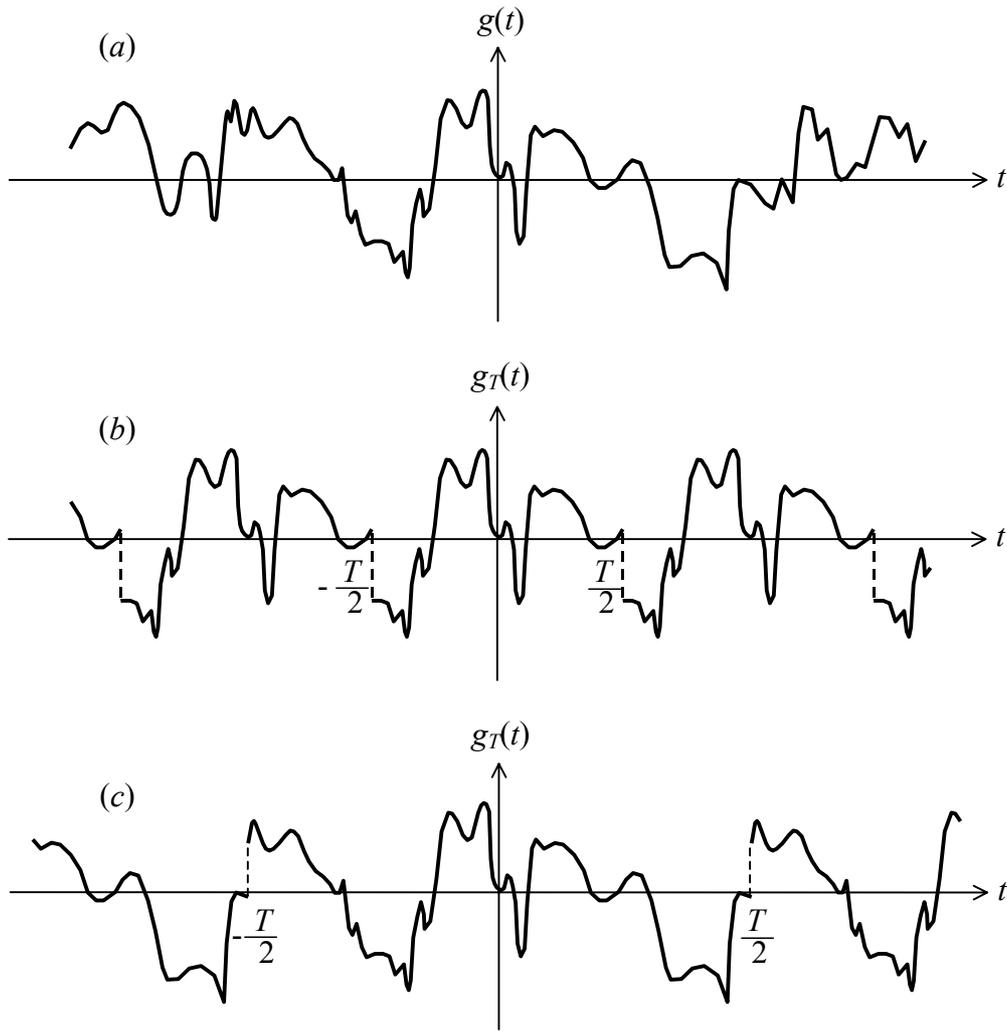


Figura 4. (a) $g(t)$. (b) y (c), $g_T(t)$ para dos valores de T .

Llamemos

$$\omega_n = n \frac{2\pi}{T}, \quad (49)$$

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Entonces

$$g_T(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-T/2}^{T/2} g(\tau) e^{-j\omega_n(\tau-t)} d\tau \right) \Delta\omega \quad (50)$$

Recordemos que una integral puede expresarse como límite de la suma de los valores del integrando en puntos especificados multiplicados por $\Delta\omega$. Entonces, tomando límite formalmente se obtiene

$$\lim_{T \rightarrow \infty} g_T(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) e^{-j\omega(\tau-t)} d\tau d\omega \quad (51)$$

o bien

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right) e^{j\omega t} d\omega \quad (52)$$

Ésta es la llamada *fórmula integral de Fourier*. Debe insistirse en que el cálculo anterior es sólo formal, debido a que cuando $\Delta\omega \rightarrow 0$, $T \rightarrow \infty$, por consiguiente, el integrando también está sujeto a la operación de límite. La demostración rigurosa de (52) se puede encontrar en los textos de Análisis Matemático.

La función

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (53)$$

se denomina *transformada de Fourier* de la función $g(t)$. Suele anotarse con **F** el operador que asigna a cada función su transformada de Fourier, es decir,

$$\mathbf{F}[g(t)] = G(\omega). \quad (54)$$

Usando (53), la ecuación (52) se puede reescribir, así:

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (55)$$

que es formalmente análoga a

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn \frac{2\pi}{T} t}, \quad (56)$$

(igualdad correspondiente al caso en que $g(t)$ es periódica) si se reemplaza C_n por $G(\omega)$ y la suma por la integral. En la próxima sección investigaremos la naturaleza de esta analogía.

La ecuación (55) permite recuperar la función $g(t)$ a partir de su transformada de Fourier. Se trata, de hecho, de una fórmula de inversión que, para una función seccionalmente continua, da los valores correctos salvo en los puntos de discontinuidad. El segundo miembro de (55) se denomina *transformada de Fourier inversa* o también *antitransformada de Fourier*. Del mismo modo que se introdujo el operador **F** que a cada función de $g(t)$ le asigna su transformada de Fourier $G(\omega)$, podemos definir el operador \mathbf{F}^{-1} , que a cada función $G(\omega)$ le asigna la función $g(t)$ de la que ésta es transformada, es decir,

$$g(t) = \mathbf{F}^{-1}[G(\omega)]. \quad (57)$$

Se verifica que

$$g(t) = \mathbf{F}^{-1}[\mathbf{F}(g(t))]. \quad (58)$$

1.11. Densidad espectral

Consideremos, a modo de ejemplo, un pulso de amplitud y duración unitarias. Dibujemos los espectros de amplitud de $g_T(t)$ para $T = 4$ s y $T = 8$ s (figura 5). Vemos que al aumentar T crece la cantidad de armónicos en una banda dada de frecuencias, pero

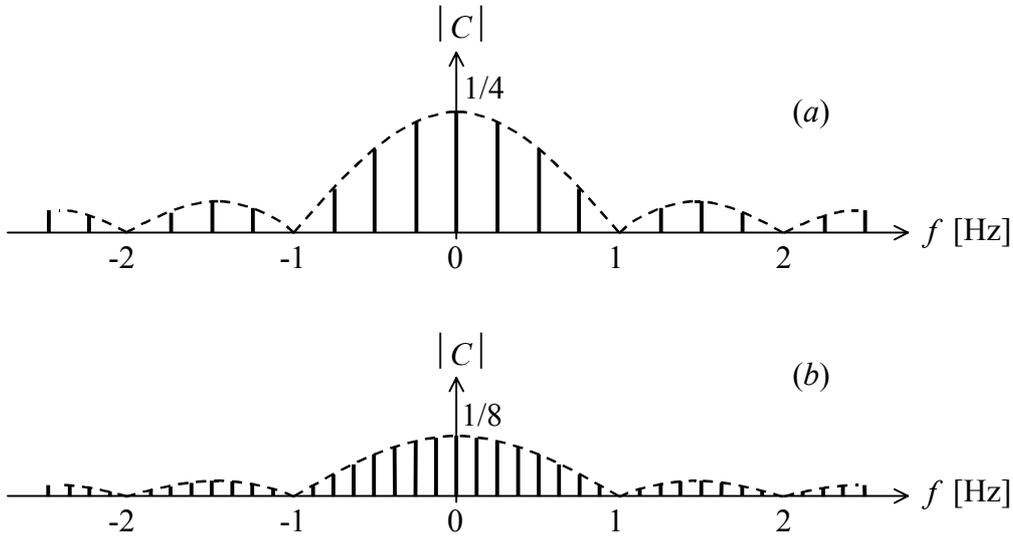


Figura 5. (a) Espectro de amplitud para un pulso de amplitud y duración unitarias que se repite cada 4 s. (b) ídem cada 8 s.

disminuye proporcionalmente en amplitud, de modo que fijada una frecuencia f_0 , la relación $|C|/\Delta f$ (donde $|C|$ corresponde al armónico más próximo a f_0 y Δf es la separación entre armónicos sucesivos) se mantiene finita. Puede verificarse fácilmente que

$$\lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{C}{\Delta f} = G(\omega). \quad (59)$$

Esto sugiere que $G(\omega)$ puede ser considerada como una *densidad de espectro de frecuencias*, ya que el coeficiente $dC(\omega)$ correspondiente a un armónico de frecuencia ω y que se encuentra en la banda infinitesimal df es

$$dC(\omega) = G(\omega) df. \quad (60)$$

En consecuencia, teniendo en cuenta que el armónico n de una señal periódica es

$$g_n(t) = C_n e^{jn\frac{2\pi}{T}t} + C_{-n} e^{-jn\frac{2\pi}{T}t}, \quad (61)$$

en el caso de señal no periódica tendremos el armónico diferencial de frecuencia angular ω dado por

$$\begin{aligned}
 dg(\omega, t) &= G(\omega) df e^{j\omega t} + G(-\omega) df e^{-j\omega t} = \\
 &= \frac{1}{2\pi} G(\omega) d\omega e^{j\omega t} + \frac{1}{2\pi} G(-\omega) d\omega e^{-j\omega t}
 \end{aligned}
 \tag{62}$$

El proceso de integración es, entonces, análogo a la superposición de armónicos que tenía lugar en la serie de Fourier, sólo que ahora es una superposición continua de armónicos diferenciales como el indicado en (62).

La transformada de Fourier $G(\omega)$ se denomina, en el contexto de análisis frecuencial, *densidad espectral* o *función de distribución de frecuencias*. Al igual que en el caso discreto, la representación gráfica se suele llamar *espectro de frecuencias* y se divide en espectro de *amplitud* y de *fase*. Este espectro es, ahora continuo.

En el problema 6 se enuncian varias propiedades importantes de la transformada de Fourier.

Ejemplo: Si

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & \text{si } \tau < 0 \text{ o } \tau \leq t \end{cases}
 \tag{63}$$

su transformada es

$$G(\omega) = \tau \frac{\text{sen}(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} e^{-j\omega\tau/2}.
 \tag{64}$$

En la figura 6 se han representado los espectros de amplitud y de fase de $g(t)$.

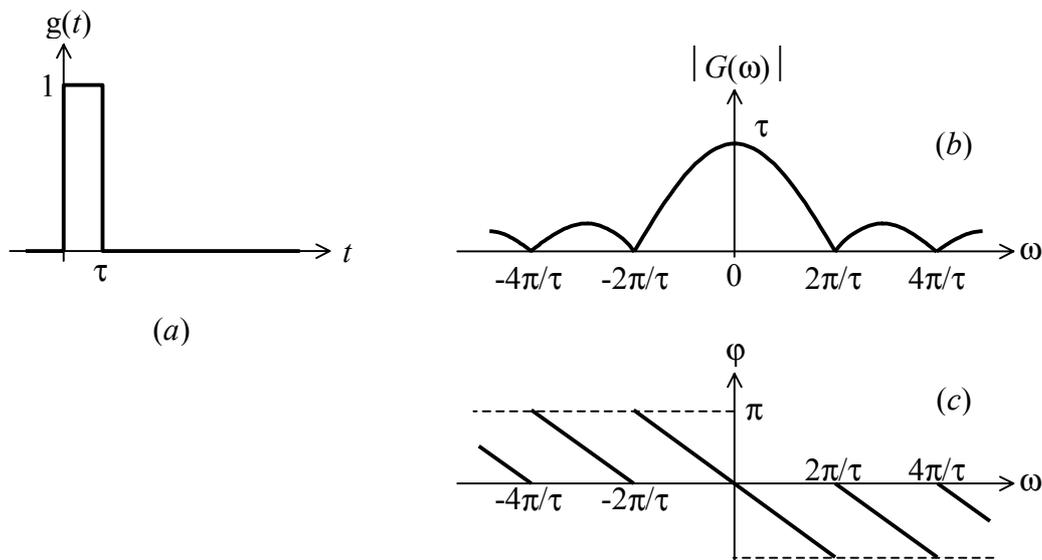


Figura 6. (a) Función no periódica. (b) Su espectro (continuo) de amplitud. (c) Su espectro (continuo) de fase.

1.12. Relación entre los espectros de la entrada y la salida de un sistema lineal para señales no periódicas

Consideremos ahora un sistema lineal regido por la ecuación diferencial

$$a_n \frac{d^n v_2}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dv_2}{dt} + a_0 v_2 = b_n \frac{d^n v_1}{dt^n} + \dots + b_1 \frac{dv_1}{dt} + b_0 v_1, \quad (65)$$

donde v_1 es la señal de entrada y v_2 la señal de salida. Si tanto $v_1(t)$ como $v_2(t)$ tienen transformadas de Fourier, respectivamente, $V_1(\omega)$ y $V_2(\omega)$, podemos transformar ambos miembros de la ecuación anterior por medio de la fórmula de transformación de derivadas (ver problema 6d), según la cual

$$\mathbf{F}\left(\frac{d^n g}{dt^n}\right) = (j\omega)^n \mathbf{F}(g). \quad (66)$$

Resulta

$$[a_n(j\omega)^n + \dots + a_1 j\omega + a_0] V_2(\omega) = [b_n(j\omega)^m + \dots + b_1 j\omega + b_0] V_1(\omega). \quad (67)$$

De aquí se obtiene $V_2(\omega)$:

$$V_2(\omega) = \frac{b_m(j\omega)^m + \dots + b_1 j\omega + b_0}{a_n(j\omega)^n + \dots + a_1 j\omega + a_0} V_1(\omega), \quad (68)$$

o bien, abreviadamente,

$$V_2(\omega) = H(\omega) V_1(\omega). \quad (69)$$

$H(\omega)$ es la *función de transferencia* del sistema. La ecuación (69) nos proporciona una sencilla relación entre el espectro de frecuencias de la entrada y el de la salida.

NOTA: A veces se utiliza la notación $V(j\omega)$ en lugar de $V(\omega)$ para la transformada de Fourier de $v(t)$ (a pesar de que la última es suficiente para poner de manifiesto que V es función de ω) con el objeto de unificar la notación para transformadas de Fourier y de Laplace. Esto puede hacerse ya que la transformada de Fourier coincide con la de Laplace,

$$V(s) = \int_0^{\infty} v(t) e^{-st} dt \quad (70)$$

coinciden, para las funciones nulas en el semieje real negativo, si se toma $s = j\omega$.

1.13. Contenido de energía y densidad de energía de una señal no periódica

Para una señal periódica $g(t)$ habíamos definido en la sección 1.4. su contenido de potencia como

$$G^2 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [g(t)]^2 dt \quad (71)$$

y probamos que éste se podría calcular a partir del espectro de frecuencias de $g(t)$, por medio de la igualdad de Parseval:

$$G^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} |C_n|^2. \quad (72)$$

Si $g(t)$ no es periódica, la ecuación (72) no puede aplicarse directamente porque $T = \infty$. La forma de utilizar esta ecuación consiste en tomar límite cuando $T \rightarrow \infty$. Esto será investigado más adelante, en la sección 1.17.

En esta sección nos proponemos obtener una igualdad formalmente análoga a la (72) para el caso de espectro continuo, la cual encerrará el concepto de *energía* en lugar del de *potencia*.

Se define el *contenido de energía* de una señal no periódica de cuadrado integrable como:

$$U = \int_{-\infty}^{\infty} [g(t)]^2 dt \quad (73)$$

Cuando esta integral es convergente, se dice que la señal es de *energía finita*. En ésta y en las próximas tres secciones trabajaremos con señales de energía finita.

Para calcular U usaremos el siguiente artificio. Como en el integrando aparece dos veces el factor $g(t)$, escribiremos uno de esos factores en la forma dada por la ecuación (55):

$$\begin{aligned} U &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) G(\omega) e^{j\omega t} d\omega dt \end{aligned} \quad (74)$$

Aquí permutaremos formalmente el orden de integración, advirtiendo, sin embargo, que tal operación está sujeta al cumplimiento de ciertas hipótesis que aquí no consideraremos.

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) G(\omega) e^{j\omega t} dt d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{j\omega t} dt d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) G(-\omega) d\omega \end{aligned} \quad (75)$$

Es fácil verificar (problema 6g) que

$$G(-\omega) = \overline{G(\omega)}, \quad (76)$$

de donde resulta, finalmente,

$$U = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(\omega)|^2 d\omega. \quad (77)$$

Ésta es la igualdad de Plancherel, que es análoga a la igualdad de Parseval (25b). La demostración rigurosa puede hallarse en [1].

Podemos reescribir esta igualdad sustituyendo la frecuencia angular ω por su expresión en términos de la frecuencia f :

$$U = \int_{-\infty}^{\infty} |G(2\pi f)|^2 df. \quad (78)$$

La función $|G(2\pi f)|^2$ se denomina *densidad bilateral de energía*. Como $|G(2\pi f)|$ es una función par (problema 6g), la (26) puede escribirse de este otro modo:

$$U = \int_0^{\infty} 2 |G(2\pi f)|^2 df. \quad (79)$$

La función

$$S(f) = 2 |G(2\pi f)|^2, \quad (80)$$

se conoce como *densidad unilateral energía* o simplemente *densidad de energía* de la señal no periódica $g(t)$. Con esta notación la ecuación (79) toma la sencilla forma

$$U = \int_0^{\infty} S(f) df. \quad (81)$$

$S(f)$ puede interpretarse como la energía asociada a $g(t)$ por unidad de ancho de banda. Más precisamente, $S(f) df$ es la energía que una tensión $g(t)$ entregará a una resistencia unitaria debida a sus componentes armónicas de frecuencias comprendidas entre f y $f + df$, en toda la extensión del tiempo, es decir, entre $-\infty$ y ∞ . En la práctica sólo tiene sentido aplicar este concepto a señales de duración finita (como pulsos o ráfagas de pulsos) o bien a señales cuya energía residual después de cierto tiempo es despreciable (por ejemplo, un transitorio exponencial).

1.14. Energía en una banda de frecuencia

La integral de la ecuación (81) está extendida a todo el rango posible de frecuencias y proporciona la energía total de la función $g(t)$ como superposición continua de la energía de todos sus armónicos diferenciales. Si se efectúa la superposición de las ener-

gías de los armónicos que se encuentran solamente en el intervalo de frecuencias de f_1 a f_2 , obtendremos consecuentemente la energía de $g(t)$ en la banda $[f_1, f_2]$, es decir:

$$U_{[f_1, f_2]} = \int_{f_1}^{f_2} S(f) df. \quad (82)$$

Así como el contenido de potencia permitía clasificar señales periódicas, tenemos con $U_{[f_1, f_2]}$ una primera herramienta para clasificar espectralmente señales no periódicas. Por ejemplo, la señal inducida en el circuito de sintonía de un radioreceptor se dice que es de *onda media* si la mayor parte de su energía está en la banda de 535 kHz a 1605 kHz. Análogamente, una señal se dice que es de *audiofrecuencia* o, más brevemente, de *audio*, si su contenido mayoritario de energía se presenta en la banda de 20 Hz a 20 kHz.

1.15. Relación entre las densidades de energía de la entrada y la salida de un sistema lineal

Si $v_1(t)$ y $v_2(t)$ son respectivamente la entrada y la salida de un sistema lineal con función de transferencia $H(j\omega)$, entonces las transformadas de Fourier $V_1(\omega)$ y $V_2(\omega)$ están relacionadas así:

$$V_2(\omega) = H(\omega) V_1(\omega). \quad (83)$$

De aquí resulta

$$2 |V_2(2\pi f)|^2 = |H(2\pi f)|^2 2 |V_1(2\pi f)|^2, \quad (84)$$

o bien

$$S_2(f) = |H(2\pi f)|^2 S_1(f). \quad (85)$$

En otras palabras, las densidades de energía de las señales de entrada y salida están relacionadas por un factor multiplicativo igual al módulo de la función de transferencia al cuadrado.

1.16. El teorema de convolución

La ecuación (69) es importante no sólo porque permite conocer el espectro de la salida $V_2(\omega)$ de un sistema a partir de su función de transferencia $H(\omega)$ y del espectro de la entrada $V_1(\omega)$, sino porque además permitiría, por medio de la transformada de Fourier inversa, obtener la respuesta *temporal* del sistema. La dificultad para ello es que se requiere calcular la transformada de la señal de entrada, $V_1(\omega)$, y luego la transformada inversa del producto $H(\omega)V_1(\omega)$.

Este rodeo puede evitarse mediante un importante resultado denominado *teorema de convolución*, que permite resolver el problema enteramente en el dominio temporal, siempre y cuando se conozca la respuesta al impulso, $h(t)$, del sistema.

Observemos, en primer lugar, que la transformada de Fourier de un impulso unitario de Dirac $\delta(t)$ es igual a la unidad:

$$\mathbf{F}(\delta(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1. \quad (86)$$

Esto se debe a que $\delta(t) = 0$ salvo en el origen, por lo cual se puede reemplazar la exponencial por una constante igual a su valor en $t = 0$, que es 1, y luego se aplica la propiedad de que la integral de $\delta(t)$ en cualquier intervalo que contenga al origen es 1.

Ahora, si $h(t)$ es la respuesta al impulso de un sistema, su transformada de Fourier valdrá

$$\mathbf{F}(h(t)) = H(\omega) \mathbf{F}(\delta(t)) = H(\omega).1 = H(\omega). \quad (87)$$

En otras palabras, la respuesta al impulso es igual a la transformada de Fourier inversa de la función de transferencia:

$$h(t) = \mathbf{F}^{-1}(H(\omega)). \quad (88)$$

Si las señales de entrada y salida del sistema son $a(t)$ y $b(t)$ respectivamente, sabemos que

$$B(\omega) = H(\omega) A(\omega). \quad (89)$$

Pretendemos encontrar $b(t)$ directamente a partir de $a(t)$ y la respuesta al impulso $h(t)$. Para ello apliquemos primero la transformada de Fourier inversa al producto $H(\omega)A(\omega)$:

$$\begin{aligned} b(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)H(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right) e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) h(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau \right) d\omega \end{aligned} \quad (90)$$

Podemos conmutar formalmente el orden de integración, advirtiendo que para su validez sería necesario verificar el cumplimiento de ciertas hipótesis que no consideraremos. Se obtiene

$$\begin{aligned} b(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) h(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\omega d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{j\omega(t-\tau)} d\omega d\tau \end{aligned} \quad (91)$$

Reconocemos en la integral interna la transformada inversa de Fourier de $A(\omega)$ calculada en $t - \tau$, por lo que resulta:

$$b(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) a(t - \tau) d\tau. \quad (92)$$

La integral del segundo miembro se denomina *producto de convolución* entre $h(t)$ y $a(t)$, y es una operación realizada exclusivamente en el dominio temporal. Utilizando la notación

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) a(t - \tau) d\tau = h(t) * a(t), \quad (93)$$

el resultado anterior puede expresarse de la forma

$$b(t) = h(t) * a(t), \quad (94)$$

que es equivalente a

$$\mathbf{F}(h(t) * a(t)) = H(\omega) A(\omega) = \mathbf{F}(h(t)) \mathbf{F}(a(t)). \quad (95)$$

Éste es el *teorema de convolución*, que expresa que la transformada de Fourier de un producto de convolución entre dos funciones es igual al producto ordinario de las transformadas de las funciones.

La respuesta al impulso unitario $h(t)$ se suele denominar *función de Green* del sistema, y como se puede apreciar, lo caracteriza completamente en cuanto a la relación entre las señales de entrada y salida.

1.17. Espectro de densidad de potencia media.

Extenderemos ahora a funciones no periódicas el concepto de densidad de potencia introducido en la sección 1.9. Consideraremos funciones $v(t)$ que cumplan las siguientes condiciones:

- i) $v(t)$ es acotada, es decir, hay un $M > 0$ tal que $|v(t)| < M$ para todo instante t .
- ii) $v(t)$ tiene promedio nulo, es decir, que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} v(t) dt = 0. \quad (96)$$

- iii) El contenido de energía de $v(t)$ es no finito:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [v(t)]^2 dt = \infty. \quad (97)$$

Debido a la condición iii) no se puede utilizar la igualdad de Plancherel (77) directamente. Para poder aplicarla consideraremos las funciones auxiliares $v_T(t)$ definidas por:

$$v_T(t) = \begin{cases} v(t) & \text{si } |t| \leq T/2 \\ 0 & \text{si } |t| > T/2 \end{cases} \quad (98)$$

En la figura 7 se muestra un ejemplo de esto. Para cada T la función $v_T(t)$ es de cuadrado integrable, por lo que está definida su densidad de energía $S_{v_T}(f)$, y vale que

$$\int_{-\infty}^{\infty} [v_T(t)]^2 dt = \int_0^{\infty} S_{v_T}(f) df, \quad (99)$$

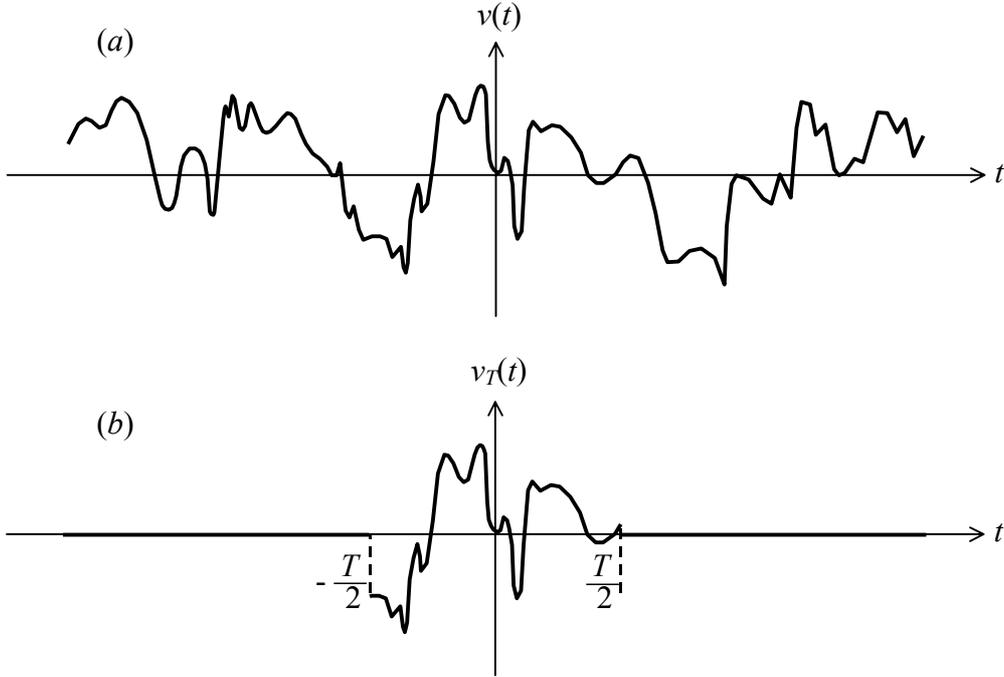


Figura 7. (a) Función $v(t)$. (b) Su versión $v_T(t)$. restringida al intervalo $[-T/2, T/2]$.

o, lo que es lo mismo,

$$\int_{-T/2}^{T/2} [v(t)]^2 dt = \int_0^{\infty} S_{v_T}(f) df. \quad (100)$$

Dividiendo por T ambos miembros obtenemos el valor cuadrático medio de $v_T(t)$ en el intervalo $[-T/2, T/2]$:

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [v(t)]^2 dt = \int_0^{\infty} \frac{S_{v_T}(f)}{T} df \quad (101)$$

Si existe

$$V^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [v(t)]^2 dt, \quad (102)$$

éste debe ser finito, por ser $v(t)$ acotada. En ese caso V^2 es el valor cuadrático medio o el contenido de potencia media de $v(t)$. De (101) y (102), resulta que

$$V^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{S_{v_T}(f)}{T} df \quad (103)$$

Si la convergencia de la integral es uniforme respecto a T pueden permutarse las operaciones de límite e integral:

$$V^2 = \int_0^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{S_{v_T}(f)}{T} df \quad (104)$$

El integrando del segundo miembro se denomina de *densidad espectral de potencia media* de la señal $v(t)$ y se anota con $\overline{v^2}(f)$, es decir

$$\overline{v^2}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{S_{v_T}(f)}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2|V_T(2\pi f)|^2}{T} \quad (105)$$

Con esta notación resulta

$$V^2 = \int_0^{\infty} \overline{v^2}(f) df \quad (106)$$

Para interpretar este importante resultado, tengamos en cuenta primero que V^2 es proporcional a la potencia media *a largo plazo* de la señal. A diferencia de las señales periódicas, en las que la potencia media es constante par todos los períodos, en este caso no hay definido un período por lo que es necesario promediar en toda la extensión del tiempo. Esta potencia media corresponde a todas las frecuencias. El papel de $\overline{v^2}(f)$ es indicar cómo se distribuye esa potencia media en el espectro, razón por la cual a veces se denomina también *valor cuadrático medio por unidad de ancho de banda*. Así, $\overline{v^2}(f)df$ representa la fracción diferencial de la potencia media que corresponde a la banda $[f, f+df]$. La integral de la ecuación (106) puede interpretarse como una superposición continua a lo largo de todo el eje de frecuencias de los contenidos de potencia de todos los armónicos diferenciales de $v(t)$.

Esto nos permite calcular el contenido de potencia promedio debido a los “armónicos” contenidos en una banda finita de frecuencias, por ejemplo entre f_1 y f_2 :

$$V_{[f_1, f_2]}^2 = \int_{f_1}^{f_2} \overline{v^2}(f) df. \quad (107)$$

Conviene remarcar que este resultado corresponde a un promedio a largo plazo. En intervalos breves de tiempo la distribución de la potencia entre las diversas frecuencias puede fluctuar de un instante a otro. Al promediar se pierde, por consiguiente, toda información acerca de la forma de onda, de modo que señales distintas pueden tener la misma densidad de potencia media (véanse los problemas 15 y 16). Desde este punto de vista, $\overline{v^2}(f)$ no parece muy promisorio como herramienta de cálculo. Sin embargo, no es así, ya que su verdadera utilidad se pone de manifiesto precisamente al estudiar las

llamadas funciones aleatorias (lo cual haremos en la próxima sección) en las que por su naturaleza no es posible conocer ni la forma de onda ni la composición armónica en el sentido de la transformada de Fourier, pero sí en cambio la densidad de potencia media.

Se puede verificar (problema 12) que para funciones periódicas la densidad de potencia media coincide con la densidad de potencia definida en 1.9, es decir, es un tren de impulsos.

Otro resultado sumamente útil es el que permite calcular la densidad espectral de potencia media de la salida de un sistema lineal conociendo la correspondiente a la entrada. Si éstas son $\overline{v_2^2}(f)$ y $\overline{v_1^2}(f)$ respectivamente, y $H(\omega)$ la función de transferencia del sistema lineal, entonces,

$$\overline{v_2^2}(f) = |H(2\pi f)|^2 \overline{v_1^2}(f). \quad (108)$$

La demostración queda como ejercicio, planteado en el problema 11.

1.18. Funciones aleatorias

Una característica esencial de muchos tipos de señales es que no se puede predecir su evolución en el tiempo. A pesar de ello a menudo se dispone de propiedades estadísticas que, como normalmente se expresan como promedios, no se manifiestan instante a instante, sino en períodos prolongados de tiempo. Una de las propiedades más importantes para su estudio es la densidad espectral de potencia media (sección 1.17), ya que permite calcular el valor cuadrático medio de la señal y asimismo es muy simple determinar cómo se modifica cuando la señal atraviesa un sistema lineal, en particular un filtro (ecuación 108). Una función de la cual sólo se conoce su densidad espectral de potencia media se dice que es una *función aleatoria*. Señales como las de audio, ruido ambiente, ruido eléctrico, etc. se representan adecuadamente como funciones aleatorias, especificando, siempre que sea posible, la densidad de potencia media asociada. Veremos otras propiedades estadísticas en las secciones que siguen.

1.19. Funciones de correlación

Dadas dos funciones $g_1(t)$ y $g_2(t)$ con valores cuadráticos medios G_1^2 y G_2^2 el valor cuadrático medio de su suma $g(t) = g_1(t) + g_2(t)$ es

$$\begin{aligned} G^2 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [g_1(t) + g_2(t)]^2 dt = \\ &= G_1^2 + G_2^2 + 2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g_1(t) g_2(t) dt \end{aligned} \quad (109)$$

Si el último término es 0, es decir, si

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g_1(t) g_2(t) dt = 0, \quad (110)$$

resulta la propiedad de superposición

$$G^2 = G_1^2 + G_2^2, \quad (111)$$

y, al igual que en el caso de funciones periódicas, $g_1(t)$ y $g_2(t)$ se dicen *ortogonales*.

Consideremos ahora dos sistemas lineales cuyas entradas $g_1(t)$ y $g_2(t)$ son ortogonales. Dado que la propiedad de superposición para los valores cuadráticos medios (o, equivalentemente, para las potencias) es muy útil, nos preguntamos si las respectivas respuestas $r_1(t)$ y $r_2(t)$ ante dichas entradas conservarán la ortogonalidad. Un ejemplo sencillo demuestra que no es así. Si $H_1(\omega) = 1$ y $H_2(\omega) = j\omega$ (es decir, un derivador), entonces las respectivas respuestas a $g_1(t) = \cos t$ y $g_2(t) = \sin t$ coinciden y por lo tanto no son ortogonales a pesar de que $g_1(t)$ y $g_2(t)$ sí lo son.

Otro problema en cierto modo relacionado con el anterior es el de la aditividad de las densidades de potencia media. Sean $g_1(t)$ y $g_2(t)$ dos señales ortogonales y $g(t) = g_1(t) + g_2(t)$. Sabemos que

$$G^2 = \int_0^\infty \overline{(g_1 + g_2)^2(f)} df, \quad (112)$$

$$G_1^2 = \int_0^\infty \overline{g_1^2(f)} df, \quad (113)$$

$$G_2^2 = \int_0^\infty \overline{g_2^2(f)} df. \quad (114)$$

Debido a la ortogonalidad se cumple la ecuación 111. Sustituyendo,

$$\int_0^\infty \overline{(g_1 + g_2)^2(f)} df = \int_0^\infty \overline{g_1^2(f)} df + \int_0^\infty \overline{g_2^2(f)} df \quad (115)$$

o bien, reuniendo las dos integrales del segundo miembro,

$$\int_0^\infty \overline{(g_1 + g_2)^2(f)} df = \int_0^\infty \left[\overline{g_1^2(f)} + \overline{g_2^2(f)} \right] df. \quad (116)$$

La inspección superficial de esta igualdad podría sugerir que los integrandos son iguales, pero ello no necesariamente es así, pues de una igualdad entre integrales definidas no se puede obtener la igualdad de los integrandos, de modo que en general

$$\overline{(g_1 + g_2)^2(f)} \neq \overline{g_1^2(f)} + \overline{g_2^2(f)} \quad (117)$$

Los dos problemas planteados son muy importantes en el análisis de señales. El primero, pues muchas veces las señales de entrada atraviesan efectivamente sistemas lineales antes de llegar al punto del circuito de real interés y el segundo debido a que la densidad espectral de potencia media es, como ya se ha comentado, la herramienta básica en este estudio y por lo tanto se requieren reglas para operar con ella.

Estos problemas pueden resolverse imponiendo una condición más fuerte sobre $g_1(t)$ y $g_2(t)$ que la simple ortogonalidad, y es que para todo τ se cumpla que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g_1(t) g_2(t - \tau) dt = 0. \quad (118)$$

La función

$$\bar{\varphi}_{12}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g_1(t) g_2(t - \tau) dt. \quad (119)$$

se denomina *función de correlación promedio* de g_1 y g_2 . Cuando se cumple (118), es decir que para todo τ

$$\bar{\varphi}_{12}(\tau) = 0, \quad (120)$$

entonces g_1 y g_2 se dicen *no correlacionadas*. Se propone como ejercicio demostrar que la no correlación se conserva a través de sistemas lineales y que además permite la aditividad de las densidades de potencia media (problemas 20 y 21):

$$\overline{(g_1 + g_2)^2} = \overline{g_1^2} + \overline{g_2^2}. \quad (121)$$

La función de correlación tiene una interpretación física interesante que mostraremos con un ejemplo.

Ejemplo: Sean

$$g_1(t) = \text{sen } \omega t \quad (122)$$

$$g_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 2k\pi < \omega t \leq (2k+1)\pi \\ -1 & \text{si } (2k-1)\pi < \omega t \leq 2k\pi \end{cases}$$

Su función de correlación promedio se calcula fácilmente y vale:

$$\bar{\varphi}_{12}(\tau) = \frac{2}{\pi} \cos \omega \tau. \quad (123)$$

En la figura 8 se han graficado $g_1(t)$ y $g_2(t - \tau)$ para algunos valores de τ . Se puede apreciar que el máximo valor de $\bar{\varphi}_{12}(\tau)$ se obtiene (en este ejemplo) para $\tau = 0$, es decir, para un desplazamiento tal que $g_1(t)$ y $g_2(t - \tau)$ coincidan lo más perfectamente posible, a pesar de sus diferentes formas de onda. Esto es, que los intervalos en los cuales $g_1(t) \geq 0$ coincidan cuanto sea posible con aquéllos en los cuales $g_2(t - \tau) \geq 0$. En los otros casos ilustrados puede verse que esto no ocurre.

El nombre de *correlación* proviene de la interdependencia que intuitivamente se observa entre $g_1(t)$ y $g_2(t - \tau)$ cuando $\bar{\varphi}_{12}(\tau) \neq 0$. Dicha interdependencia tiene, para las funciones aleatorias, una interpretación distinta que para las no aleatorias. En efecto, dos funciones no aleatorias pueden ser correlacionadas (y más aún, pueden ser iguales) a pesar de provenir de fuentes independientes. En cambio cuando dos señales *aleato-*

rias, que supuestamente deberían evolucionar al azar y por lo tanto independientemente una de otra, son lo bastante parecidas como para tener correlación no nula, entonces cabe esperar algún vínculo entre las fuentes que las producen.

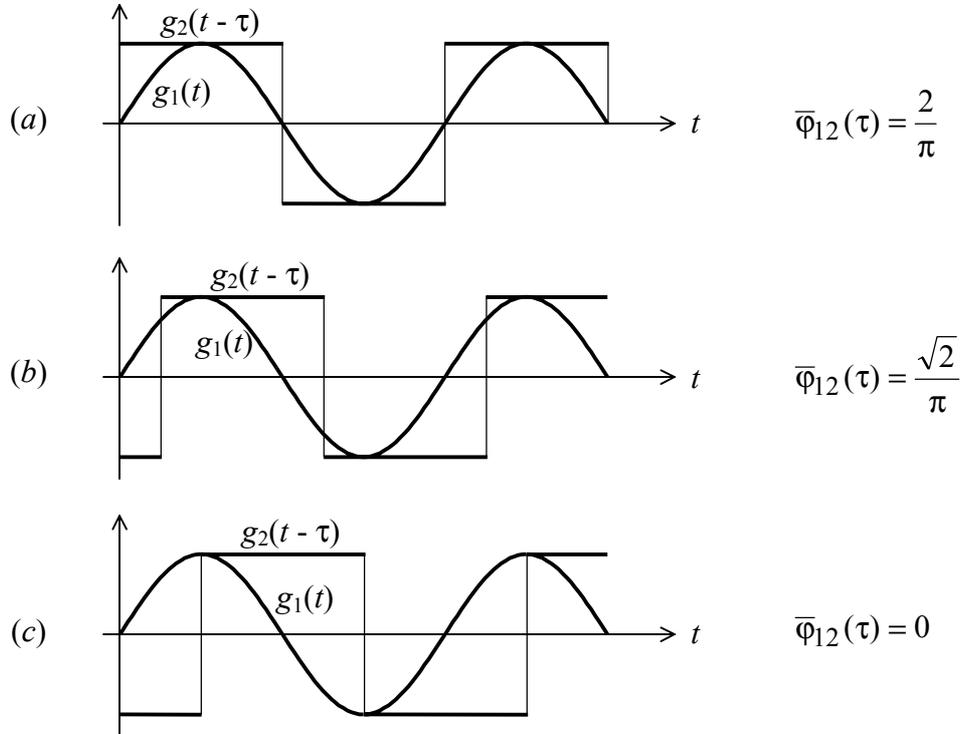


Figura 8. $g_1(t)$ y $g_2(t - \tau)$ para (a) $\tau = 0$, (b) $\tau = T/8$, (c) $\tau = T/4$.

Para funciones nulas fuera de un intervalo (por ejemplo, pulsos o ráfagas) la función de correlación promedio es a causa del factor $1/T$ que tiende a 0. Si se elimina dicho factor se obtiene la *función de correlación* (sin promediar),

$$\varphi_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(t) g_2(t - \tau) dt, \quad (124)$$

que permite un análisis similar al anterior para este tipo de funciones.

Finalmente, cuando $g_1(t) = g_2(t) = g(t)$ el tiene la *función de autocorrelación promedio*:

$$\bar{\varphi}_{gg}(\tau) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) g(t - \tau) dt \quad (125)$$

y para el caso de pulsos la *función de autocorrelación*:

$$\varphi_{gg}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) g(t - \tau) dt. \quad (126)$$

1.20 Correlación y convolución

La función de correlación (124) y el producto de convolución (93) difieren solamente en un cambio de signo en el argumento de g_2 . Entonces puede escribirse:

$$\varphi_{12}(t) = g_1(\tau) * g_2(-\tau). \quad (127)$$

Por el teorema de convolución (ecuación 95),

$$\mathbf{F}(\varphi_{12}(\tau)) = \mathbf{F}(g_1(\tau)) \mathbf{F}(g_2(-\tau)) \quad (128)$$

Llamando, como es habitual, $G_1(\omega) = \mathbf{F}(g_1(\tau))$ y $G_2(\omega) = \mathbf{F}(g_2(\tau))$, es fácil probar (problema 6 h) que

$$\mathbf{F}(g_2(-\tau)) = G_2(-\omega). \quad (129)$$

Entonces

$$\mathbf{F}(\varphi_{12}(\tau)) = G_1(\omega) G_2(-\omega), \quad (130)$$

que, en el caso en que $g_1(t) = g_2(t) = g(t)$, se reduce a

$$\mathbf{F}(\varphi_{gg}(\tau)) = |G(\omega)|^2. \quad (131)$$

Esta ecuación nos permitirá obtener una importante vinculación entre la densidad espectral de potencia media y la función de autocorrelación.

1.21. Correlación y densidad de potencia media

Consideraremos funciones $v(t)$ en las condiciones de la sección 1.17. Como antes, definimos

$$v_T(t) = \begin{cases} v(t) & \text{si } |t| \leq T/2 \\ 0 & \text{si } |t| > T/2 \end{cases} \quad (132)$$

Si $V_T(\omega)$ es su transformada, la ecuación (131) puede escribirse como

$$\mathbf{F}^{-1} \left(\frac{|V_T(\omega)|^2}{T} \right) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} v_T(t) v_T(t - \tau) dt. \quad (133)$$

Pero por definición de $v_T(t)$ la anterior puede escribirse

$$\mathbf{F}^{-1}\left(\frac{|V_T(\omega)|^2}{T}\right) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} v_T(t) v_T(t-\tau) dt. \quad (134)$$

Si el integrando no dependiera de T el límite del segundo miembro sería una función de autocorrelación que es lo que estamos buscando. Para solucionar el inconveniente de la variabilidad del integrando se prueba directamente (ver Apéndice 1) que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} v_T(t) v_T(t-T) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} v(t) v(t-T) dt \quad (135)$$

Tomando ahora límite en ambos miembros de la ecuación (134) y utilizando la igualdad (135) resulta

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{F}^{-1}\left(\frac{|V_T(\omega)|^2}{T}\right) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} v(t)v(t-\tau) dt. \quad (136)$$

Si admitimos que se puede conmutar el paso al límite con la transformación inversa de Fourier, lo cual exige en realidad el cumplimiento de ciertas hipótesis que aquí no tendremos en cuenta, de la ecuación anterior resulta:

$$\mathbf{F}^{-1}\left(\lim_{T \rightarrow 0} \frac{|V_T(\omega)|^2}{T}\right) = \overline{\Phi}_{vv}(\tau) \quad (137)$$

o bien, recordando (105),

$$\overline{v^2}(f) = 2\mathbf{F}(\overline{\Phi}_{vv}(\tau)). \quad (138)$$

Esta ecuación es muy importante, ya que permite calcular la densidad de potencia media a partir de la correlación promedio de una señal, y en muchos casos esta última se puede determinar teóricamente mediante razonamientos estadísticos.

1.22. Distribución estadística de las amplitudes de una señal

A pesar de que no se pueden predecir los valores instantáneos de una función aleatoria, en muchos casos se puede, al menos, determinar durante qué fracción del tiempo la función estará entre dos valores dados. Se define la *función de distribución de amplitudes* de $v(t)$ como una función $\rho(v)$ tal que la probabilidad de que

$$v_0 < v(t) < v_0 + dv \quad (139)$$

sea $\rho(v_0)dv$. Esto equivale a decir que durante una fracción $\rho(v_0)dv$ del tiempo, $v(t)$ tomará valores entre v_0 y $v_0 + dv$. Integrando $\rho(v)$ entre v_1 y v_2 se obtiene la probabilidad de que $v(t)$ esté comprendida entre esos dos extremos:

$$P(v_1 < v(t) < v_2) = \int_{v_1}^{v_2} \rho(v) dv. \quad (140)$$

Un ejemplo importante lo constituye el *ruido blanco*, característico de muchos procesos físicos, entre ellos el ruido térmico de las resistencias eléctricas. En el caso del ruido térmico, la distribución de amplitudes es *normal* o *gaussiana*, es decir

$$\rho(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi V^2}} e^{-\frac{v^2}{2V^2}} \quad (141)$$

donde V^2 es el valor cuadrático medio de la señal de ruido térmico. En la figura 9 se ha representado $\rho(v)$ junto con un ejemplo de forma de onda de ruido térmico.

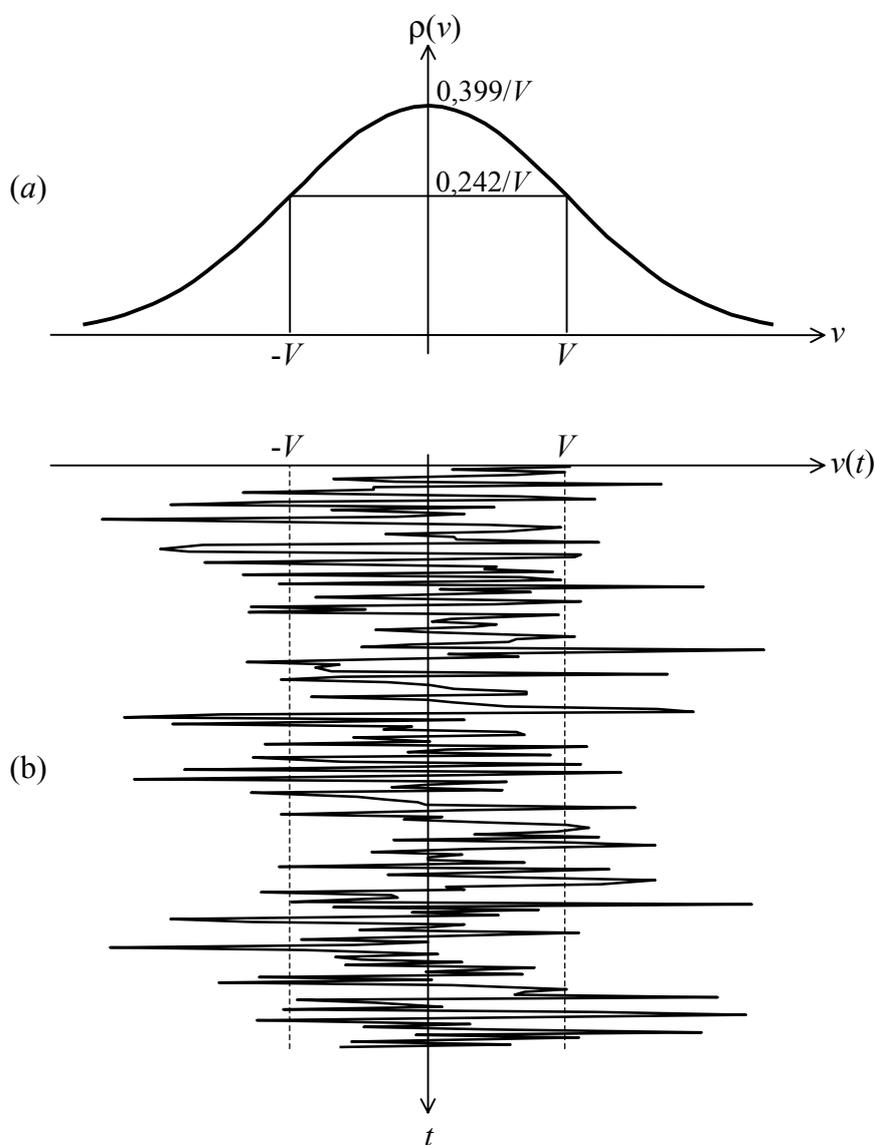


Figura 9. (a) Función de distribución de Gauss. (b) Ejemplo de ruido térmico.

La importancia de la distribución de amplitudes se pone de manifiesto en las mediciones de señal. Hay dos tipos de instrumentos para medir tensiones variables: los que responden al valor eficaz y los que responden al valor medio del módulo, aunque estos últimos vienen también calibrados en valor eficaz a través de un factor válido únicamente para formas de onda senoidales.

Si se mide con un instrumento de verdadero valor eficaz en principio la medición será correcta. Sin embargo, muchos instrumentos están contruidos para medir ondas senoidales en las cuales la relación entre valor de pico y valor eficaz (llamada *factor de pico* o *factor de cresta*) es sólo $\sqrt{2}$. Esto significa que en una lectura de fondo de escala, el voltímetro recibe a su entrada picos sólo $\sqrt{2}$ veces mayores que dicha lectura. Para una tensión con valor eficaz igual a la lectura de fondo de escala pero con picos mucho mayores (por ejemplo un tren de pulsos muy altos y muy angostos), se corre el riesgo de que el amplificador de entrada del instrumento entre en saturación, lo cual se manifiesta como un recorte de dichos picos con el consiguiente error. Por ello es que para cada instrumento se especifica el máximo factor de cresta que tolera a su entrada sin perder jerarquía en la medición.

En el caso del ruido con distribución de Gauss puede comprobarse que el verdadero factor de cresta es ∞ ya que teóricamente, por más alto que sea el pico, existe una probabilidad no nula de que aparezca. Sin embargo dicha probabilidad tiende vertiginosamente a 0, por lo cual los picos más elevados aparecen con tan poca frecuencia que no se comete error significativo al despreciarlos. Con ayuda de una tabla de la función de Gauss acumulada se encuentra que sólo aparecen picos 4 veces mayores que el valor eficaz un 0,01% del tiempo, por lo cual bastará utilizar voltímetros con factor de cresta 4 para obtener resultados satisfactorios.

En el caso de instrumentos de valor medio al problema anterior se agrega el hecho de que la corrección que se hace habitualmente a través del *factor de forma* (cociente entre el valor eficaz V_{ef} y el valor medio V_m), cuyo valor es

$$\frac{V_{ef}}{V_m} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, \quad (142)$$

vale sólo para ondas senoidales. Puede demostrarse que para una señal con distribución de Gauss se verifica

$$V_{ef} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} V_m. \quad (143)$$

Por otra parte, si V_o es el valor leído,

$$V_m = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} V_o, \quad (144)$$

de donde resulta que el verdadero valor eficaz es

$$V_e = \frac{2}{\sqrt{\pi}} V_o = 1,1284 V_o. \quad (145)$$

Esta relación sólo tiene validez si la señal medida es gaussiana.

2. INTRODUCCIÓN AL ESTUDIO DEL RUIDO ELÉCTRICO

2.1. Ruido

Se designa con el nombre de *ruido* a toda señal no deseada que se encuentra superpuesta a una señal útil. De esta definición general resulta que hay un fuerte elemento subjetivo en la cuestión de determinar qué parte de la señal es útil y qué parte es ruido. Supongamos, como ejemplo, que dos personas A y B sintonizan dos emisoras de radio E_a y E_b respectivamente, cuyas frecuencias estén muy próximas entre sí. Debido a que los circuitos de sintonía no son pasabandas ideales, parte de la señal de E_b será captada por el receptor de A y parte de la señal de E_a por el de B .

Es claro que la señal útil para A será ruido para B y viceversa.

Aún en casos en que la parte ruidosa de la señal está perfectamente identificada, ésta puede transformarse en señal útil, por ejemplo cuando se desea medir o caracterizar espectralmente el ruido de un amplificador. Con estos ejemplos se pone de manifiesto la naturaleza de la determinación de qué es señal deseable y qué es ruido. En lo sucesivo supondremos que dicha descomposición ya ha sido realizada.

2.2. Clasificación de las fuentes de ruido

El ruido eléctrico (que es el único que estudiaremos) puede originarse de varias maneras:

- a) *Ruido errático*: Incluye el ruido atmosférico y el ruido espacial, que es consecuencia entre otras causas de la ionización y recombinación de moléculas gaseosas por acción de la radiación solar, cósmica, campos eléctricos intensos, etc. Afecta principalmente las transmisiones inalámbricas.
- b) *Ruido producido por el hombre*: Comprende la radiación electromagnética emitida por artefactos empleados por el hombre. En general se origina en conmutaciones, chispas o emisión voluntaria o involuntaria de radiofrecuencia. También incluye las perturbaciones ocasionadas por la modificación de la carga en sistemas de alimentación y por filtrado insuficiente en las fuentes de corriente continua que rectifican una corriente alterna. Este último es el clásico zumbido a la frecuencia de línea en los amplificadores de audio.
- c) *Ruido circuital*: Es el ruido introducido por los propios elementos del circuito y se debe a los fenómenos físicos que tienen lugar en ellos. Por ejemplo la agitación térmica de los electrones en las resistencias (que da origen al ruido térmico), las pequeñas variaciones de temperatura con el tiempo, la naturaleza discreta de las cargas que atraviesan una barrera de potencial en los dispositivos electrónicos y la fluctuación de conductancia en los contactos imperfectos.

Los zumbidos se pueden eliminar con filtros adecuados, típicamente capacitores o inductores ubicados estratégicamente para bloquear las componentes espectrales ubicadas en las correspondientes bandas de frecuencia. En general son de carácter determinístico, ya que contienen frecuencias perfectamente definidas (por ejemplo, los armónicos de una fuente de alimentación o tonos derivados de una subportadora en señales de FM).

El ruido electromagnético puede minimizarse por medio de blindajes electrostáticos y/o magnéticos, según qué campo predomine. En algunos casos el uso de conexiones balanceadas (dos líneas con señales opuestas en fase y una línea común de masa) permite cancelar el ruido captado por los conductores. Puede ser determinístico o aleatorio, o una superposición de componentes de ambos tipos.

Debido a su propia naturaleza, asociada a procesos físicos inevitables,³ el ruido circuital es el más difícil de eliminar. La única forma de reducirlo es con diseños cuidadosos y ajustados que además empleen elementos de bajo ruido. En general el ruido circuital es aleatorio. La mayor parte de este capítulo está dedicada al estudio del ruido circuital.

2.3. Ruido térmico

Los electrones libres responsables de la conducción eléctrica en un material conductor, al estar sometidos a agitación térmica dan origen a minúsculas corrientes en todas las direcciones y sentidos dentro del material. En ausencia de campo eléctrico externo no hay direcciones privilegiadas, por lo tanto debido a la enorme cantidad de electrones libres se produce una compensación estadística que tiende a anular la corriente resultante. Esta compensación no es perfecta, sin embargo, generándose efectivamente una corriente, que fluctúa aleatoriamente y que constituye el denominado *ruido térmico* o *ruido de Johnson* en honor de quien lo observó por primera vez en 1928.

A los efectos del análisis, se puede sustituir una resistencia ruidosa R_n en un circuito eléctrico por cualquiera de los modelos señalados en la figura 10 (b) y (c). La resistencia R que aparece en ellos tiene el mismo valor que la resistencia original, pero sin ruido. El modelo con fuente de corriente refleja la breve descripción anterior, mientras que el que emplea una fuente de tensión surge de que al circular por R la corriente de ruido $i_n(t)$, ésta ocasiona una caída de tensión

$$e_n(t) = R i_n(t). \quad (146)$$

Observamos que las fuentes no llevan referencia de signos. Esto es sólo para distinguir en un circuito las fuentes aleatorias de las que no lo son, y porque el parámetro de interés es la densidad espectral de potencia media, que es positiva. No habría inconveniente, empero, en asignar una referencia de signos, tal como si se midiera la tensión con un osciloscopio.

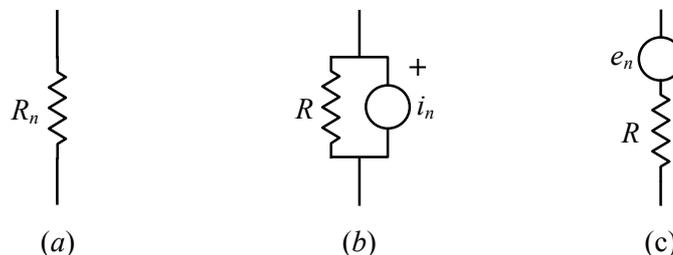


Figura 10. (a) Resistencia ruidosa. (b) Modelo con fuente de corriente de ruido. (c) Modelo con fuente de tensión de ruido.

³ En muchos casos dichos procesos físicos son los que permiten el funcionamiento de los dispositivos. Por ejemplo, un semiconductor utilizado a muy baja temperatura (cercana al cero absoluto) tendría muy bajo ruido pero no podría amplificar adecuadamente.

El ruido térmico tiene valor medio nulo, es decir,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} i_n(t) dt = 0, \quad (147)$$

pues de no ser así habría un flujo continuo de electrones de un extremo a otro de la resistencia, con la consiguiente acumulación de carga. Se demuestra en termodinámica que $i_n(t)$ tiene la siguiente función de autocorrelación promedio:

$$\overline{\Phi_{i_n i_n}}(\tau) = \frac{kT}{R} \frac{e^{-\frac{|\tau|}{t_0}}}{t_0}, \quad (148)$$

donde $k = 1,381 \times 10^{-23}$ J/K (constante de Boltzmann),
 T = temperatura absoluta [K],
 R = resistencia [Ω],
 t_0 = tiempo medio entre colisiones electrónicas (del orden de 10^{-12} s).

Entonces, de (138):

$$\overline{i_n^2}(f) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{kT}{R t_0} e^{-\frac{|\tau|}{t_0}} e^{-j2\pi f \tau} d\tau = \frac{4kT}{R} \frac{1}{1 + (2\pi f t_0)^2}. \quad (149)$$

Para frecuencias mucho menores que $1/(2\pi t_0)$ (que es del orden de 10^{11} Hz vale la aproximación

$$\overline{i_n^2} = \frac{4kT}{R} \quad (150)$$

Para esto basta con que la frecuencia no supere los 10.000 MHz, condición que en la práctica habitual se cumple salvo en aplicaciones de extremadamente alta frecuencia, en las cuales otros problemas cobran mayor importancia que el ruido térmico (figura 11).

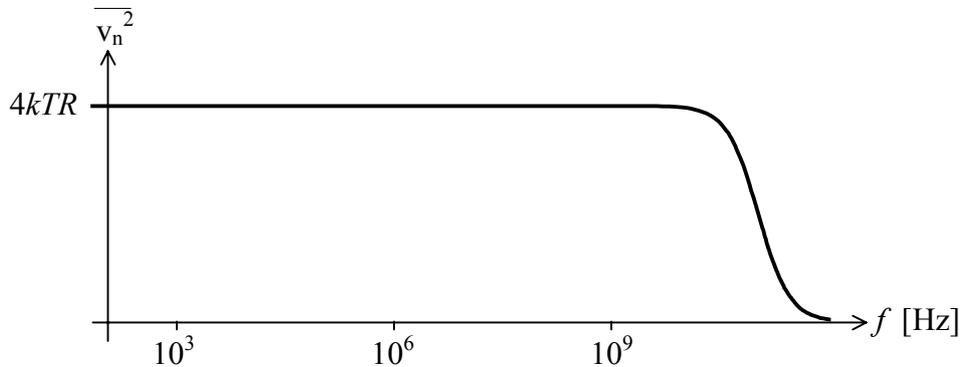


Figura 11. Densidad espectral de potencia media del ruido térmico. A todas las frecuencias prácticas es constante (ruido blanco).

Vemos que el espectro de densidad de potencia media es constante con la frecuencia (para $f < 10^{10}$ Hz). Esto era de esperar, pues la autocorrelación promedio es casi un impulso (debido a la diminuta magnitud de t_0), por lo tanto su transformada de Fourier es constante. Por analogía con la luz blanca, que contiene todas las frecuencias visibles en iguales proporciones, a este ruido se le llama *ruido blanco*.

Considerando R como función de transferencia entre i_n y e_n (ecuación (146)) y aplicando (108), resulta:

$$\overline{e_n^2}(f) = R^2 \frac{4kT}{R} = 4kTR. \quad (151)$$

Puede calcularse el valor cuadrático medio en la banda de frecuencias de f_1 a f_2 mediante la ecuación (107):

$$E_n^2[f_1, f_2] = \int_{f_1}^{f_2} 4kTR df = 4kTR(f_2 - f_1), \quad (152)$$

o bien, llamando $B = f_2 - f_1$ (ancho de banda),

$$E_{nB}^2 = 4kTRB. \quad (153)$$

Ejemplo: El valor eficaz de ruido térmico en una resistencia de $1 \text{ k}\Omega$ en la banda de audio (de 20 Hz a 20 kHz) es, a $25 \text{ }^\circ\text{C}$,

$$E_{nB} = \sqrt{4 \times 1,38 \times 10^{-23} \times 298 \times 10^3 \times 19980} = 0,573 \mu\text{V}. \quad (154)$$

Dicho valor eficaz es bastante pequeño pero debe tenerse en cuenta si se trabaja con señales del orden del μV . Si la resistencia hubiera sido de $1 \text{ M}\Omega$ el valor eficaz de ruido térmico habría sido de $18 \mu\text{V}$.

NOTA 1: La aplicación de una tensión externa en los bornes de la resistencia no modifica en absoluto la fuente de ruido, ya que su único efecto es agregar una componente de velocidad de arrastre a cada electrón, que es despreciable frente a las enormes velocidades térmicas (10^5 m/s).

NOTA 2: La forma de la autocorrelación de i_n puede justificarse intuitivamente así: el máximo valor de la autocorrelación se obtiene cuando no hay desplazamiento entre la señal y su versión retardada ($\tau = 0$), pues el integrando es un cuadrado y por lo tanto siempre positivo. Si el desplazamiento temporal es menor que t_0 la forma de i_n no pudo variar demasiado ya que menos de la mitad de los electrones cambió de dirección a causa de los choques. Para $\tau \gg t_0$ ya prácticamente no hay similitud entre las ondas desfasadas en τ y de ahí la rápida caída a 0.

Las amplitudes del ruido térmico tienen una distribución de Gauss por lo cual, según se indicó en la sección 1.22 su medición debe efectuarse con instrumentos con un factor de pico del orden de 4 o más.

2.4. Circuitos con resistencias ruidosas

Una propiedad importante del ruido térmico es que dos fuentes *físicamente distintas* (aunque provengan de resistencias de igual valor) son *no correlacionadas*. Como consecuencia inmediata de esto, podemos aplicar el principio de superposición (ecuación (121)) de las densidades espectrales al caso de dos resistencias R_1 y R_2 en serie. Resulta una resistencia equivalente $R_1 + R_2$ cuya fuente de ruido tiene una densidad espectral de potencia media igual a la suma de las correspondientes a cada una de ellas:

$$\overline{v_{n, total}^2} = 4kTR_1 + 4kTR_2 = 4kT(R_1 + R_2) \quad (155)$$

Esta propiedad admite dos generalizaciones. Si en un circuito hay varias resistencias (no necesariamente en serie), la tensión de ruido térmico entre un par de terminales cualquiera puede calcularse por superposición, es decir que si $v_k(t)$ es una de las fuentes de ruido y $v_{ok}(t)$ la tensión que ella ocasiona entre dichos terminales cuando actúa sola, entonces la tensión total vale

$$v_o(t) = v_{o1}(t) + \dots + v_{oN}(t). \quad (156)$$

Además cada $v_{ok}(t)$ puede considerarse como la respuesta de un sistema lineal $H_k(\omega)$ a la entrada $v_k(t)$, es decir

$$V_{ok}(\omega) = H_k(\omega) V_k(\omega), \quad (157)$$

como se muestra en la figura 12. Hemos visto (véase problema 20) que si las señales de entrada a los sistemas son no correlacionadas entonces las de salida también lo son. Por lo tanto las densidades de potencia a la salida pueden superponerse:

$$\overline{v_o^2}(f) = |H_1(2\pi f)|^2 \overline{v_1^2}(f) + \dots + |H_N(2\pi f)|^2 \overline{v_N^2}(f) \quad (158)$$

La segunda generalización es el *teorema de Nyquist*, que es similar al teorema de Thévenin y se enuncia así:

Un dipolo pasivo formado por resistencias ruidosas a una misma temperatura T , condensadores e inductancias (con o sin acoplamiento magnético) cuya función impedancia es $Z(j\omega)$, puede sustituirse por una impedancia no ruidosa de igual valor en serie con una fuente de ruido con densidad espectral de potencia media

$$\overline{v_n^2}(f) = 4kT \operatorname{Re} [Z(j2\pi f)]. \quad (159)$$

($\operatorname{Re}[Z(j2\pi f)]$ es la parte real de la impedancia). El circuito equivalente se ilustra en la figura 13(b). La demostración de este teorema se da en el apéndice 2.

Un corolario importante de este teorema es que un elemento reactivo puro carece de ruido térmico. En el caso de los capacitores e inductores reales, esto no es rigurosamente cierto debido a las resistencias parásitas.

Ejemplo: Consideremos el circuito de la figura 14 (a). Calcularemos v_o debido a las resistencias ruidosas.

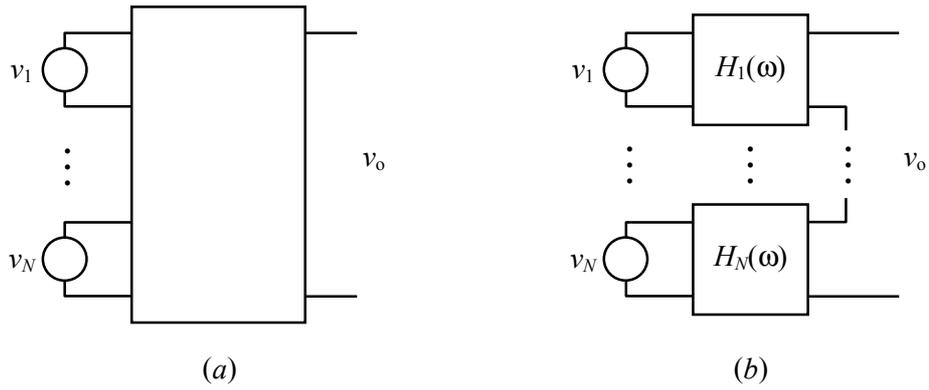


Figura 12. (a) Circuito con fuentes de ruido térmico. (b) Descomposición en varios sistemas lineales.



Figura 13. (a) Dipolo pasivo con ruido. (b) Circuito equivalente de Nyquist

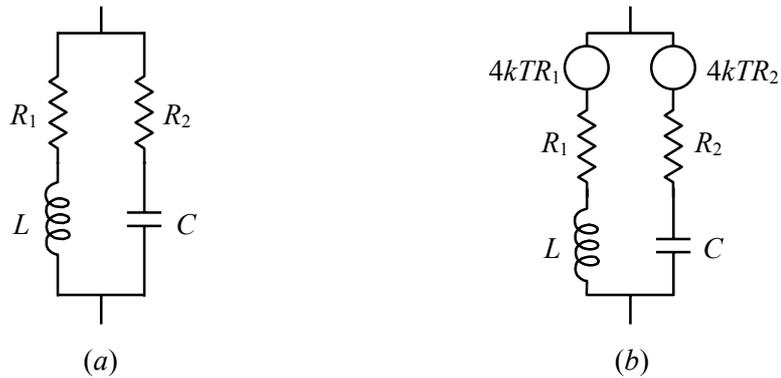


Figura 14. (a) Circuito ruidoso. (b) Circuito equivalente con fuentes de ruido v_1 y v_2 .

Por superposición resulta

$$V_o = V_1 \frac{R_2 + \frac{1}{j\omega C}}{R_1 + R_2 + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} + V_2 \frac{R_1 + j\omega L}{R_1 + R_2 + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}. \quad (160)$$

Debe notarse que $v_1(t)$ y $v_2(t)$ no son en realidad transformables porque carecen de contenido cuadrático finito. La ecuación anterior indica formalmente cuáles serían las funciones de transferencia entre v_1 y v_o , y entre v_2 y v_o si v_1 y v_2 fueran transformables. Ahora aplicamos la ecuación (158):

$$\overline{v_o^2} = \frac{\overline{v_1^2} \left[R_2^2 + \frac{1}{(\omega C)^2} \right] + \overline{v_2^2} \left[R_1^2 + (\omega L)^2 \right]}{(R_1 + R_2)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \quad (161a)$$

$$\overline{v_o^2} = 4kT \frac{R_1 \left[R_2^2 + \frac{1}{(\omega C)^2} \right] + R_2 \left[R_1^2 + (\omega L)^2 \right]}{(R_1 + R_2)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \quad (161b)$$

Para comparar, repitamos el cálculo usando el teorema de Nyquist:

$$\overline{v_o^2} = 4kT \operatorname{Re} \frac{(R_1 + j\omega L) \left(R_2 + \frac{1}{j\omega C} \right)}{R_1 + R_2 + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)} = \quad (162a)$$

$$= 4kT \operatorname{Re} \frac{(R_1 + j\omega L) \left(R_2 + \frac{1}{j\omega C} \right) \left[R_1 + R_2 - j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right]}{(R_1 + R_2)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$$

Operando algebraicamente resulta

$$\overline{v_o^2} = 4kT \frac{R_1 \left[R_2^2 + \frac{1}{(\omega C)^2} \right] + R_2 \left[R_1^2 + (\omega L)^2 \right]}{(R_1 + R_2)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}, \quad (162b)$$

resultado idéntico al de la ecuación (161b).

La elección de uno u otro método depende del problema. En el ejemplo anterior la aplicación del teorema de Nyquist puede parecer algo más larga, pero debe notarse que se ha calculado también $Z(j\omega)$ de modo que se dispone del modelo completo de la impedancia ruidosa. Por otra parte el teorema de Nyquist requiere que el circuito esté en equilibrio térmico. Si no es así el cálculo debe hacerse necesariamente por superposición.

Agreguemos, finalmente, que el ruido térmico no tiene correlación con fuentes no aleatorias ni con otras fuentes de señal aleatorias independientes. Esto significa que las potencias medias de la señal y del ruido pueden sumarse para obtener la potencia media total.

2.5. Ruido de emisión (Shot noise)

Cuando una corriente media I de portadores con carga q cruza una barrera de potencial como las que aparecen en las juntas semiconductoras, se origina una corriente de ruido que recibe el nombre de *ruido de emisión*. Su densidad espectral de potencia media es constante para frecuencias inferiores a 10^{10} Hz y vale

$$\overline{i_n^2} = 2qI. \quad (163)$$

Este tipo de ruido aparece en las válvulas termoiónicas y en las juntas de los dispositivos semiconductores. Fue predicho por Schottky en 1918 [8, 9] y medido por primera vez por Johnson en 1925 [10].

Analicemos primeramente el ruido de emisión en un diodo de junta. La corriente I está dada en ese caso por

$$I = I_0 \left(e^{qV/kT} - 1 \right), \quad (164)$$

donde $q = 1,602 \times 10^{-19}$ C (carga eléctrica del electrón);

V = tensión aplicada [V];

$k = 1,381 \times 10^{-23}$ J/K;

T = temperatura absoluta [K].

La componente $I_0 e^{qV/kT}$ proviene de los portadores mayoritarios que se difunden de una región a la otra, mientras que $-I_0$ es una corriente de portadores minoritarios generados térmicamente. Al ser los mecanismos de cada componente distintos, las señales de ruido son no correlacionadas y por lo tanto las densidades de potencia media se suman. Además, cada una de ellas puede calcularse según (163) donde q será igual en ambas pues electrones y huecos tienen la misma carga absoluta. Así:

$$\overline{i_n^2} = 2qI_0 e^{qV/kT} + 2qI_0 = 2q(I + 2I_0). \quad (165)$$

Nos encontramos así con el hecho algo sorprendente de que aún sin corriente hay ruido. Este se origina porque siempre está presente la corriente de portadores minoritarios generados térmicamente, que debe ser compensada por la corriente mayoritaria. Ambas generan ruido.

Para grandes polarizaciones inversas es $I = -I_0$, por lo tanto la ecuación (165) se transforma en

$$\overline{i_n^2} = 2qI_0, \quad (166)$$

y para grandes polarizaciones directas I_0 es despreciable, quedando

$$\overline{i_n^2} = 2qI. \quad (167)$$

El modelo equivalente de un diodo de juntura se muestra en la figura 15.

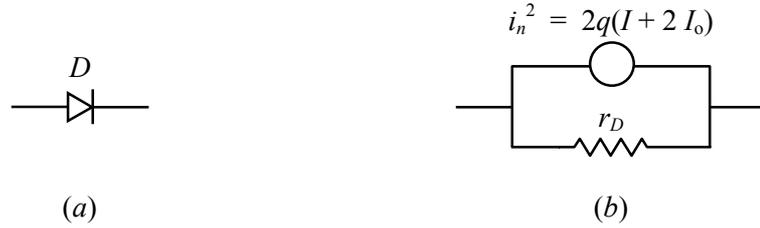


Figura 15. (a) Diodo semiconductor. (b) Modelo equivalente de ruido.

La resistencia r_D es la resistencia incremental del diodo, que viene dada por

$$r_D = \frac{1}{\frac{\partial I}{\partial V}} = \frac{kT}{q(I + I_0)}. \quad (168)$$

Esta resistencia r_D es no ruidosa. Es interesante verificar que cuando $I = 0$ el ruido residual es igual al ruido térmico de esta resistencia. En efecto, de (165) y (168), cuando $I = 0$, resulta

$$\overline{i_n^2} = 4qI_0 = 4kT \frac{1}{r_D}.$$

Esto explica por qué un diodo sin polarización ($I = 0$) sigue teniendo ruido. Simplemente, en esa condición se comporta como una resistencia, y como tal posee ruido térmico.

Al igual que en el caso de ruido térmico el ruido de emisión puede considerarse como ruido blanco y por lo tanto el valor cuadrático medio en la banda $B = f_2 - f_1$ es

$$\overline{I_{nB}^2} = 2qIB. \quad (169)$$

Ejemplo: El valor eficaz del ruido de emisión de un diodo por el cual circula 1 mA es, en la banda de audio,

$$I_{nB} = \sqrt{2 \times 1,6 \times 10^{-19} \times 1 \times 10^{-3} \times 19980} = 2,53 \text{ nA}. \quad (170)$$

Para el caso de transistores el análisis es más complicado ya que las dos junturas interactúan mutuamente y por lo tanto las corrientes que intervienen deben ser descompuestas en corrientes independientes a fin de obtener fuentes de ruido de emisión que sean no correlacionadas. Tal estudio puede consultarse en [4] (tomo 4 de la Serie SEEC). Aquí sólo daremos el circuito equivalente obtenido al como se muestra en la figura 16).

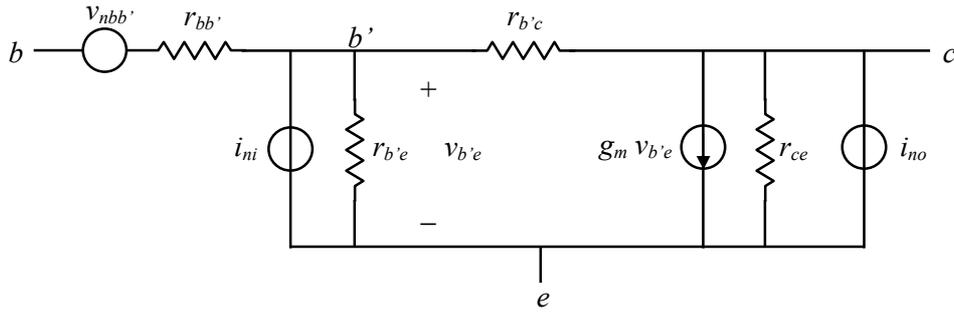


Figura 16. Modelo de ruido de emisión de un transistor.

Las resistencias que intervienen en dicho modelo son no ruidosas y las fuentes de ruido tienen las siguientes densidades de potencia media:

$$\begin{aligned} \overline{v_{nbb'}^2} &= 4kT r_{bb'} \\ \overline{i_{ni}^2} &= 2qI_b \\ \overline{i_{no}^2} &= 2qI_c \end{aligned} \quad (171)$$

Estas igualdades valen sólo si las corrientes inversas de saturación de las junturas son despreciables frente a las corrientes de polarización.

2.6. Ruido $1/f$

A pesar de que las fuentes de ruido examinadas hasta ahora tienen densidades espectrales de potencia media constantes con la frecuencia, el ruido de los dispositivos reales muestra una tendencia a incrementar su densidad espectral potencia a frecuencias bajas según una ley $1/f$. Este tipo de ruido se observa en diversos fenómenos naturales, tanto físicos como biológicos o sociales. Por ejemplo, la frecuencia de oscilación de los cristales piezoeléctricos, la temperatura ambiente estacional media, la precipitación pluvial anual, la tensión a través de las membranas neuronales, la frecuencia cardíaca y ciertos datos de la economía responden a fluctuaciones de tipo $1/f$.

Este ruido fue observado por primera vez por Johnson en 1925 [10], al intentar comprobar experimentalmente el ruido de emisión en las válvulas termoiónicas.

En el caso de los semiconductores el ruido $1/f$ se origina en la superposición de fenómenos elementales de tipo Lorentziano, es decir caracterizados por una única constante de tiempo. Algunos de ellos son la captura y recombinación de portadores en “trampas” superficiales y volumétricas, fluctuaciones de movilidad de portadores debido a variaciones de simetría cristalina por las impurezas, y minúsculas fluctuaciones térmicas. Normalmente predomina por sobre el ruido blanco por debajo de 2 kHz. En la figura 17 se ilustra la densidad espectral de potencia media.

También aparece ruido $1/f$ en las resistencias por la falta de homogeneidad del material. Esto es particularmente cierto en las resistencias compuestas por minúsculos

corpúsculos de carbón, así como en los potenciómetros u otros componentes con contactos. Por ser una componente que se agrega al ruido blanco de origen térmico, se suele denominar en estos casos *ruido adicional*.

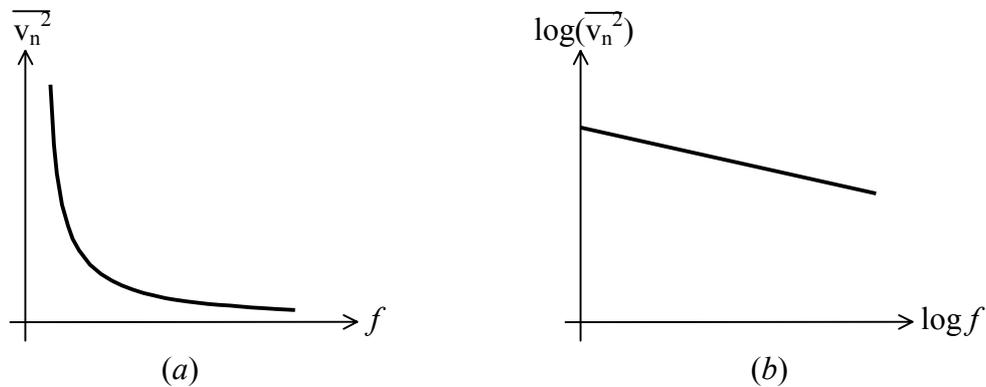


Figura 17. Densidad espectral de potencia media del ruido $1/f$ (ruido rosa). (a) En escala lineal. (b) En escala doblemente logarítmica

A diferencia del ruido térmico, el ruido $1/f$ circuital aparece siempre cuando hay circulación de corriente. En su forma más general la densidad espectral de este tipo de ruido puede expresarse como

$$\overline{i_n^2}(f) = \frac{KI^\beta}{f^\alpha}, \quad (172)$$

donde I es la corriente media que circula por el dispositivo, K es una constante que depende del dispositivo específico y α y β dos constantes características del tipo de dispositivo.

La corriente I puede fluctuar por causas externas, y de hecho actúa como un parámetro que modula la magnitud del ruido. Un elemento con muy poca corriente tendrá, correspondientemente, bajos niveles de ruido $1/f$, de allí que los diseños de muy bajo ruido suelen trabajar con corrientes de polarización muy bajas. La constante K en general no puede predecirse, ya que es específica para cada dispositivo. En caso de necesitar contar con el modelo del ruido $1/f$ de un determinado dispositivo, debería obtenerse por medición. La constante α está entre 0,5 y 2. Aunque el valor típico para el ruido circuital es próximo 1, algunos dispositivos MOS tienen $\alpha = 1,7$. Por su parte, β se encuentra entre 1 y 2. Para juntas típicas $\beta \cong 2$.

Es interesante observar que el ruido $1/f$ mantiene su característica espectral aun a muy bajas frecuencias. Así, se ha comprobado que la densidad espectral de algunos MOSFET para frecuencias tan bajas como 10^{-6} Hz (del orden de 1 ciclo cada 12 días) continúa respondiendo a una ley $1/f$. Para frecuencias menores (del orden de 1 ciclo por año) en general suele interpretárselo como derivas con el tiempo.

Por analogía con la luz, dado que el ruido $1/f$ tiene mayor densidad espectral en baja frecuencia que en alta, suele denominárselo *ruido rosa* (ya que en el color rosa están presentes todas las frecuencias pero hay predominio del rojo). En la terminología inglesa se lo conoce también como *flicker noise*, es decir *ruido fluctuante*.

El ruido $1/f$ propiamente dicho (es decir, con $\alpha = 1$) tiene la interesante propiedad de ser *fractal*, es decir que su aspecto no cambia ante cambios de escala temporal.

Otra propiedad interesante del ruido $1/f$ es que su contenido de potencia en cualquier banda de octava (o de fracción fija de octava) es el mismo:

$$V_{[f_0, Mf_0]}^2 = \int_{f_0}^{Mf_0} \frac{K'}{f} df = K' \ln \left(\frac{Mf_0}{f_0} \right) = K' \ln M, \quad (173)$$

donde M es una constante que depende del ancho de banda relativo. Para tercio de octava, $M = 2^{1/3}$. Esto tiene aplicación en las mediciones o ajustes que se realizan por bandas de octava, tercio de octava, etc. Un ejemplo importante es su uso como señal de prueba para la ecualización de un sistema de sonido. En este caso se alimenta el sistema con ruido rosa y un analizador de espectro por bandas de tercio de octava mide el valor eficaz de la señal captada por un micrófono de respuesta plana en frecuencia (micrófono de instrumentación) en cada banda. Luego se ajustan los controles de las diversas bandas de un ecualizador de tercios de octava de modo que el analizador indique un nivel constante para todas las bandas. Cuando se ha logrado esto, el sistema ha quedado ajustado de manera que la respuesta electroacústica es plana.

2.7. Ruido de ráfaga o de fritura

Los semiconductores dopados con metales pesados como el oro exhiben un ruido de baja frecuencia característico, denominado *ruido de ráfaga* (*burst noise*), consistente en breves ráfagas de ruido de baja frecuencia con cambios de nivel entre dos o más valores, como se muestra en la figura 18. Cuando este ruido es amplificado y emitido por altavoces percibe como el ruido que produce la cocción de maíz inflado, razón por la cual se lo denomina también *ruido de fritura* (*pop-corn noise*).

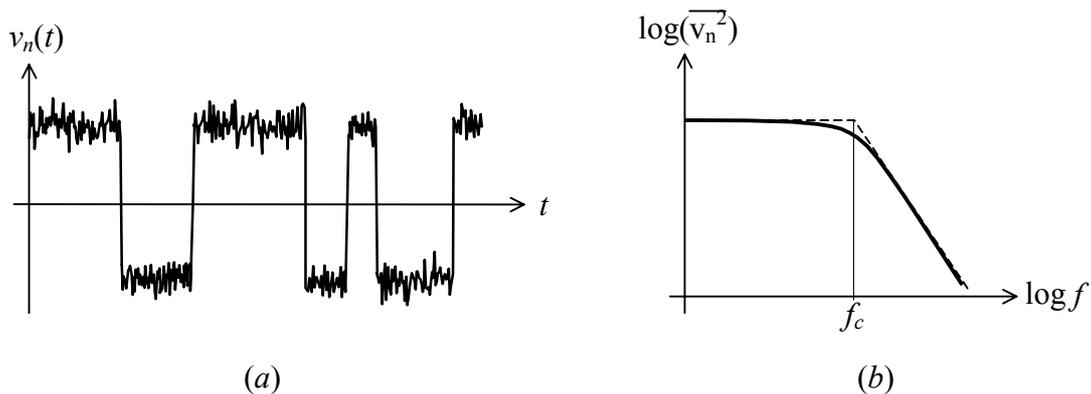


Figura 18. Ruido de fritura. (a) Forma de onda. (b) Densidad espectral en escala doblemente logarítmica

La densidad espectral de potencia del ruido de ráfaga se aproxima por la expresión siguiente:

$$i_n^2(f) = \frac{KI^c}{1 + (f/f_c)^2}, \quad (174)$$

donde K es una constante [$A^{2/c}/\text{Hz}$]
 I es la corriente media por el dispositivo
 c es un exponente entre 0,5 y 2
 f_c es una frecuencia específica para cada caso.

La distribución de amplitudes del ruido de ráfaga es fuertemente no gaussiana, dado que tienden a aparecer dos o más picos modales. El ruido de ráfaga está siempre acompañado por el ruido $1/f$ y el ruido de emisión.

2.8. Ancho de banda equivalente de ruido

Si conectamos una señal de ruido blanco $\overline{v_i^2}$ a la entrada de un cuadripolo con función de transferencia $H(\omega)$ (por ejemplo un amplificador o un filtro), el valor cuadrático medio de la salida en toda la banda de frecuencias es

$$V_o^2 = \int_0^\infty \overline{v_i^2} |H(2\pi f)|^2 df = \overline{v_i^2} \int_0^\infty |H(2\pi f)|^2 df. \quad (175)$$

Por lo general las redes que se utilizan en la práctica contienen un rango de frecuencias en el cual la respuesta es aproximadamente constante e igual a su máximo valor, H_o . Se define el ancho de banda equivalente de ruido B del cuadripolo como

$$B = \frac{1}{H_o^2} \int_0^\infty |H(2\pi f)|^2 df, \quad (176)$$

de modo que resulte

$$V_o^2 = \overline{v_i^2} H_o^2 B. \quad (177)$$

En otras palabras B es un ancho de banda tal que con ganancia constante H_o produce la misma tensión eficaz de ruido a la salida que el dispositivo original.

Ejemplo: Muchos amplificadores pueden considerarse como un filtro pasabajos de primer orden, es decir

$$H(2\pi f) = \frac{H_o}{1 + j f / f_o}. \quad (178)$$

El ancho de banda equivalente será

$$B = \int_0^\infty \frac{df}{1 + (f/f_o)^2} = f_o \int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{2} f_o \quad (179)$$

Como es sabido, f_o es la frecuencia superior de corte, es decir la frecuencia en la que la amplitud se reduce en 3 dB o ancho de banda del sistema. Puede verse, así, que el ancho

de banda equivalente de ruido no coincide con el ancho de banda a 3 dB. Esto se debe a que la ganancia decae lentamente, permitiendo el paso de una cantidad importante de ruido más allá de la frecuencia de corte. En el caso de cortes más abruptos (polos de orden superior) el ancho de banda equivalente de ruido difiere menos del ancho de banda a 3 dB.

2.9. Algunas definiciones sobre potencia

2.9.1. Potencia disponible

Se llama potencia disponible de una fuente a la máxima potencia que la misma puede entregar a un circuito exterior. Si la fuente tiene un equivalente de Thévenin con parámetros R_{th} y E_{th} , es fácil probar que la potencia máxima se obtiene cuando se carga con una resistencia $R_L = R_{th}$, y su valor es:

$$P_{disp} = \frac{E_{th}^2}{4R_{th}}. \quad (180)$$

Cuando $R_L = R_{th}$ se dice que hay *adaptación de impedancia* entre la carga y la fuente. Si la fuente es senoidal con valor eficaz E_{th} y su impedancia equivalente es $Z_{th}(j\omega)$, entonces la máxima potencia se obtiene al cargar con $Z_L(j\omega) = \overline{Z_{th}(j\omega)}$, y es

$$P_{disp} = \frac{E_{th}^2}{4 \operatorname{Re}[Z_{th}(j\omega)]}. \quad (181)$$

Si la fuente contiene otras frecuencias habrá que sumar las potencias disponibles correspondientes a todas ellas (Sección 1.5)

2.9.2. Potencia disponible de ruido

Dado un dipolo ruidoso, su potencia disponible de ruido en una banda de frecuencias $B = f_2 - f_1$ es la potencia disponible del mismo considerado como fuente de ruido.

Ejemplo: Consideremos un dipolo con impedancia $Z(j\omega)$ que tiene solamente ruido térmico. Si su temperatura es constante puede aplicarse el teorema de Nyquist. Entonces en la banda diferencial dB se tiene

$$dP_{disp} = \frac{4kT \operatorname{Re}[Z(j\omega)] dB}{4 \operatorname{Re}[Z(j\omega)]} = kT dB. \quad (182)$$

Integrando en una banda B resulta

$$P_{disp B} = kTB. \quad (183)$$

Es decir que en un mismo ancho de banda cualquier dipolo tiene la misma potencia disponible de ruido térmico. Es interesante calcular la potencia total disponible de ruido

térmico (recordemos que el ruido térmico es blanco sólo hasta unos 10^{11} Hz). Adoptando un ancho de banda equivalente de 10^{11} Hz resulta $P_{disp} = 0,4$ nW.

2.9.3. Ganancia de potencia disponible

Se puede definir la ganancia de potencia en un amplificador de dos formas distintas. La primera, como el cociente A_p entre la potencia P_o entregada a la carga por el amplificador y la potencia P_i entregada al amplificador por la fuente de señal es decir:

$$A_p = \frac{P_o}{P_i}. \quad (184)$$

La segunda definición, que adoptaremos aquí, es como cociente entre la potencia disponible en los bornes de salida, P_{od} , y la potencia disponible en la fuente de señal, P_{sd} . Para distinguir esta ganancia de la anterior se la llama *ganancia de potencia disponible* y se simboliza con G . Así,

$$G = \frac{P_{od}}{P_{sd}}. \quad (185)$$

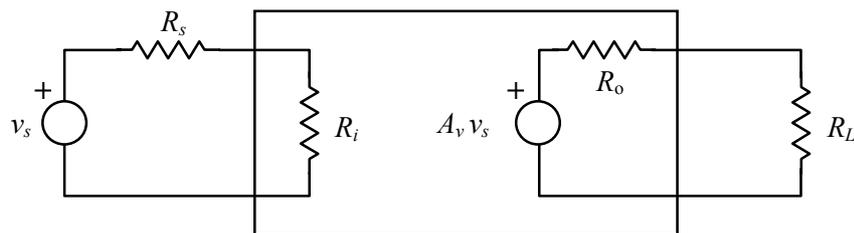


Figura 19. Modelo para el cálculo de A_p y G .

Calculemos ambas ganancias para el amplificador de la figura 19. Las potencias entregadas al amplificador y a la carga son respectivamente

$$P_i = \frac{v_s^2 R_i}{(R_s + R_i)^2}, \quad (186)$$

$$P_o = \frac{A_v^2 v_s^2 R_L}{(R_o + R_L)^2}. \quad (187)$$

Por lo tanto

$$A_p = \frac{P_o}{P_i} = A_v^2 \frac{R_L (R_i + R_s)^2}{R_i (R_o + R_L)^2}. \quad (188)$$

Las potencias disponibles, por otra parte, son

$$P_{sd} = \frac{v_s^2}{4 R_s}, \quad (189)$$

$$P_{od} = \frac{A_v^2 v_s^2}{4 R_o}. \quad (190)$$

Luego

$$G = \frac{P_{od}}{P_{sd}} = A_v^2 \frac{R_s}{R_o}. \quad (191)$$

Si $R_i = R_s$ y $R_o = R_L$ ambas definiciones coinciden, ya que cuando hay adaptación de impedancia las potencias entregadas son iguales a las disponibles. Esto puede verificarse también con las expresiones deducidas. Si, por el contrario, $R_i \neq R_s$ o $R_o \neq R_L$, es evidente que la ganancia de potencia disponible ofrece una mayor sencillez para el análisis. El uso de la ganancia de tensión con respecto a la fuente de señal a circuito abierto simplifica los cálculos con respecto a si se usara la ganancia de tensión con respecto a la tensión de entrada del amplificador

2.10. Factor de ruido y figura de ruido

2.10.1. Factor de ruido

La resistencia interna de la fuente de señal de un amplificador genera ruido térmico que se amplifica, junto con la señal útil, originando ruido en la salida. En los amplificadores reales no es éste el único ruido existente, ya que los elementos que integran un amplificador (transistores, resistores) son ruidosos y por lo tanto cabe esperar de ellos alguna contribución al ruido total.

Una manera de especificar cuán ruidoso es un amplificador es referir el ruido total al ruido que produciría la amplificación sólo del ruido térmico de la fuente de señal, ya que éste es el mínimo ruido posible. Se denomina *factor de ruido*, y se simboliza con F , al cociente entre la potencia total de ruido a la salida, P_{oB} y la potencia de ruido a la salida debido el ruido *térmico* de la resistencia de la fuente de señal, P_{otB} , ambas en un ancho de banda B (que debe indicarse cuando se especifica F , para evitar ambigüedades), es decir,

$$F = \frac{P_{oB}}{P_{otB}}. \quad (192)$$

Normalmente la temperatura de referencia para el ruido térmico es de 290 K. Obsérvese que en la ecuación anterior pueden reemplazarse las potencias efectivamente entregadas a la carga por las respectivas potencias disponibles, ya que ambas difieren en un mismo factor que se cancelará al aparecer tanto en el numerador como en el denominador. Vale, entonces,

$$F = \frac{P_{odB}}{P_{otdB}}. \quad (193)$$

También puede prescindirse de la resistencia de salida, obteniéndose

$$F = \left(\frac{V_{no}}{A_v V_{ts}} \right)^2 = \frac{V_{no}^2}{A_v^2 4kT R_s B}. \quad (194)$$

donde V_{no} es la tensión eficaz de ruido de salida (con $R_L = \infty$) en la banda B y V_{ts} es la tensión de ruido térmico a la entrada.

Ejemplo: En el amplificador de la figura 19 supongamos que $R_s = 1\text{k}\Omega$ y $A_v = 100$. Si a la salida se mide, en la banda de audio (sección 2.3), una tensión eficaz de ruido $V_{no} = 100 \mu\text{V}$ a circuito abierto, calcular el factor de ruido.

La potencia de ruido térmico entregada a la carga es

$$P_{otB} = 4kTR_s B A_v^2 \frac{R_L}{(R_o + R_L)^2}. \quad (195)$$

y la potencia *total* de ruido suministrada a la carga vale

$$P_{oB} = V_{no}^2 \frac{R_L}{(R_o + R_L)^2}. \quad (196)$$

Entonces

$$F = \frac{P_{oB}}{P_{otB}} = \frac{(100 \mu\text{V})^2}{(0,56 \mu\text{V})^2 \times 100^2} = 3,19. \quad (197)$$

Esto significa que el conjunto del amplificador y la resistencia interna del generador de señal R_s producen 3,19 veces más ruido que dicha resistencia sola o, lo que es lo mismo, el amplificador produce 2,19 veces más ruido que la resistencia.

Un factor de ruido muy próximo a 1 implicará, en consecuencia, que el amplificador es mucho menos ruidoso que la fuente de señal. Un amplificador en esas condiciones significará, probablemente, un costo adicional insuficientemente aprovechado.

2.10.2. Figura de ruido

El factor de ruido se expresa comúnmente en decibeles (dB), y en este caso se denomina **figura de ruido**,⁴ y se lo simboliza con NF:

⁴ Este nombre es en realidad una mala traducción de “noise figure”. En este caso “figure” significa “cifra” y no “figura”, por lo cual un nombre más correcto sería *cifra de ruido*. Conservamos, no obstante, la denominación “figura de ruido” para compatibilidad con las especificaciones técnicas en castellano de los componentes.

$$NF = 10 \log F. \quad (198)$$

(Se multiplica por 10 y no por 20 porque F es un cociente de potencias y no de tensiones o corrientes). En el ejemplo anterior,

$$NF = 10 \log 3,19 = 5,0 \text{ dB}. \quad (199)$$

Una figura de ruido de 3 dB implica que el amplificador produce tanto ruido como la resistencia de la fuente de señal. Un amplificador “silencioso” poseerá, típicamente, una figura de ruido de 0,5 dB, lo que significa que el amplificador aporta aproximadamente un 10% de la potencia de ruido total.

2.10.3. Figura de ruido puntual y promedio

Tanto el factor de ruido como la figura de ruido dependen del ancho de banda B considerado. Si se toma el límite cuando B tiende a 0 alrededor de una frecuencia fija f_0 resultan el *factor de ruido puntual* y la *figura de ruido puntual*. Se especifica esta última generalmente en aquellos dispositivos destinados a funcionar en circuitos sintonizados.

Para dispositivos que trabajan en toda una banda de frecuencias (por ejemplo en la de audio o la de vídeo) la figura de ruido en esa banda suele denominarse en las hojas de datos *figura de ruido promedio*.

2.10.4. Relación señal / ruido

En la sección 2.10.1 se vio que el factor de ruido se puede calcular con la ecuación

$$F = \frac{V_{no}^2}{A_v^2 V_{ts}^2}. \quad (200)$$

Reescribiendo esta ecuación y utilizando la definición de ganancia de potencia disponible resulta

$$F = \frac{V_{no}^2}{4R_o} \frac{4R_s}{V_{ts}^2} \frac{R_o}{R_s A_v^2} = \frac{P_{nod}}{P_{nsd}} \frac{1}{G} = \frac{P_{sd} / P_{nsd}}{P_{od} / P_{nod}}. \quad (201)$$

P_{sd} / P_{nsd} es el cociente entre la potencia disponible de señal y la potencia disponible de ruido a la entrada o, más brevemente, la *relación señal/ruido* de la fuente de señal. Análogamente, P_{od} / P_{nod} es la relación señal/ruido a la salida del amplificador.

De acuerdo con la ecuación (201) el factor de ruido indica cuánto se deteriora la relación señal/ruido a causa del amplificador. Por ejemplo si $F = 2$, la relación señal / ruido se reduce a la mitad. Debe tenerse en cuenta sin embargo que la relación señal / ruido de la entrada es, en la ecuación (201), una relación señal/ruido térmico. Por lo tanto dicha ecuación sólo se puede aplicar si el ruido de la fuente de señal es únicamente térmico (ver problema 31).

La relación señal / ruido suele expresarse en dB:

$$(S/R)_{dB} = 10 \log (S/R) = 10 \log \frac{P_d}{P_{nd}}. \quad (202)$$

La relación anterior puede reescribirse entonces como

$$NF = (S/R)_{s|dB} - (S/R)_{o|dB}, \quad (203)$$

o bien

$$(S/R)_{o|dB} = (S/R)_{s|dB} - NF. \quad (204)$$

Así, si la relación señal / ruido a la entrada de un amplificador es 70 dB y la figura de ruido es 3 dB, entonces la relación señal ruido a la salida será 67 dB. Este empeoramiento resulta más significativo cuando las señales son muy ruidosas (por ejemplo, $(S/R)_{dB} = 10$ dB).

2.10.5. Figura de ruido de un transistor

La figura de ruido de un transistor es la figura de ruido que se obtiene cuando se la conecta como amplificador. En la figura 20 se muestra un caso típico. Este parámetro depende fundamentalmente de la corriente de polarización del colector I_C y de la resistencia R_s vista desde la base hacia el exterior (en el caso de la figura 20 vale $R_s = R_1 // R_2 // R_g$).

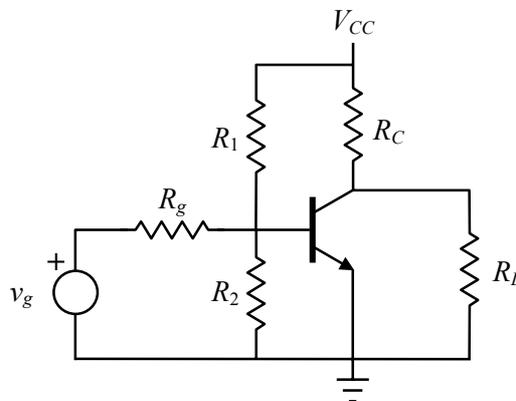


Figura 20. Transistor conectado como amplificador

En las hojas de datos de los transistores se especifica la figura de ruido indicándose siempre las condiciones en que se realiza la medición. Se dan los valores de la corriente de polarización I_C y el valor de R_s . Cuando se especifica la figura de ruido promedio se da el ancho de banda equivalente de ruido del amplificador empleado en la medición (el cual se conecta a la salida para elevar la señal de ruido hasta un nivel que se pueda medir con instrumentos normales). Cuando se especifica la figura de ruido puntual se indica la frecuencia a la cual se mide o bien se da en un gráfico logarítmico en todo un rango de frecuencias, como se muestra en la figura 21 (a). El aumento que se

observa para altas frecuencias se debe a que la ganancia disminuye pero el ruido a la salida, no). También se suele especificar la figura de ruido en función de I_C y de R_s (figura 21(b) y (c)). La familia de curvas de la figura 21(d) corresponde a los contornos de NF constante en el plano $I_C - R_s$ y es muy útil en el diseño ya que indica cuáles son los posibles valores de I_C y R_s si se desea determinada cota para NF . Así, para obtener una figura de ruido inferior a 2 dB los pares (I_C, R_s) deberán estar en la zona delimitada por la curva de $NF = 2$ dB y el ángulo superior izquierdo. De esta gráfica puede además obtenerse la mínima figura de ruido posible para determinada corriente de colector o R_s . Por ejemplo para $R_s = 1$ k Ω la NF mínima es de alrededor de 1,5 dB (obtenido por interpolación).

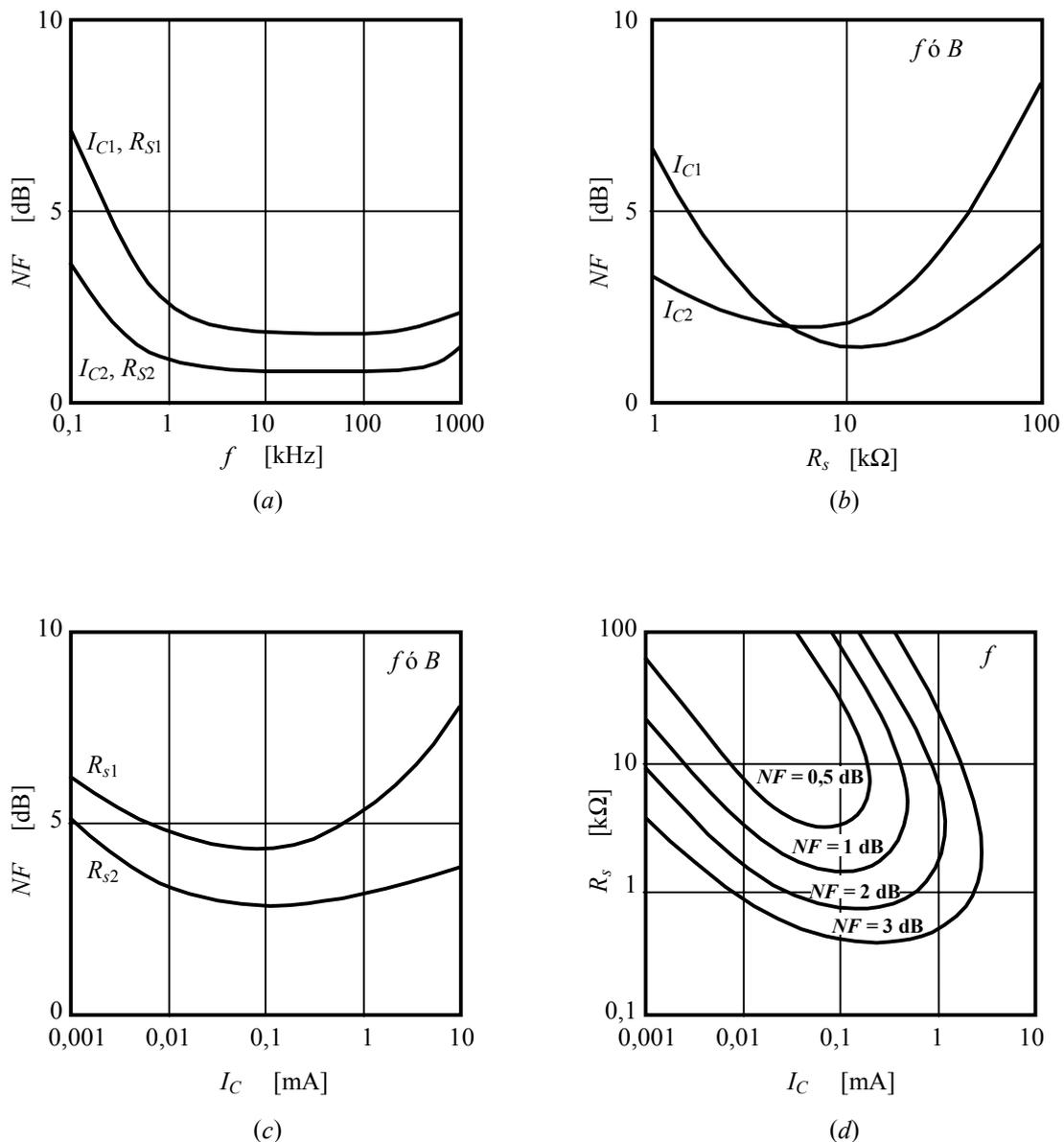


Figura 21. (a) NF en función de f para condiciones de I_C y R_s dadas. (b) NF en función de R_s para f ó B dados. (c) NF en función de I_C para f ó B dados. (d) Contornos de NF constante para f dada.

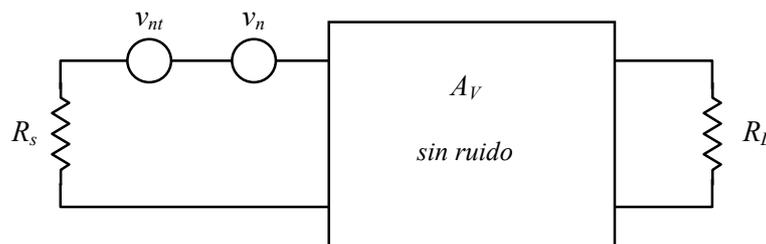
2.10.6. Factor de ruido en amplificadores en cascada

Un amplificador normalmente está constituido por varias etapas conectadas en cascada, cada una de las cuales contribuye al ruido total deteriorando la relación señal / ruido. Nos interesa averiguar cómo afectan los factores de ruido de las sucesivas etapas en el factor de ruido total del amplificador. Para ello, observemos previamente que el ruido debido al amplificador puede considerarse producido por una fuente v_n a la entrada del mismo, no correlacionada con el ruido térmico, como se indica en la figura 22(a), en la que además se pasivó la fuente de señal. El valor eficaz que debe tener se calcula fácilmente a partir del factor de ruido expresado según la ecuación (200):

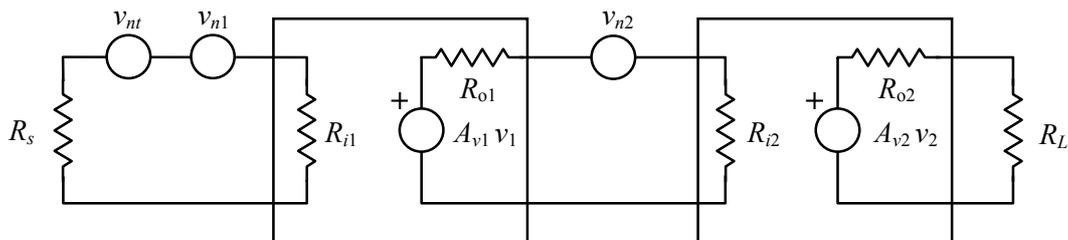
$$F = \frac{V_{no}^2}{A_v^2 V_{nt}^2} = \frac{A_v^2 (V_{nt}^2 + V_n^2)}{A_v^2 V_{nt}^2} = 1 + \frac{V_n^2}{V_{nt}^2} \quad (205)$$

de donde

$$V_n^2 = (F - 1) V_{nt}^2 = (F - 1) 4 k T R_s B. \quad (206)$$



(a)



(b)

Figura 22. (a) Amplificador con fuente de ruido a la entrada.
(b) Amplificador de dos etapas.

Consideremos ahora un amplificador de dos etapas como el de la figura 20(b) (luego se generalizará para más etapas). Para la primera etapa es:

$$V_{n1}^2 = (F_1 - 1) 4 k T R_s B. \quad (207)$$

Para la segunda etapa, la resistencia vista desde su entrada es la resistencia de salida de la etapa anterior, es decir R_{ol} , por lo tanto

$$V_{n2}^2 = (F_2 - 1) 4 k T R_{ol} B. \quad (208)$$

Obsérvese que la resistencia R_{ol} es no ruidosa, ya que el ruido del primer amplificador se ha supuesto concentrado en V_{n1} . Aquí sólo se está empleando su valor para obtener el valor de V_{n2}^2 a partir del conocimiento de F_2 , aplicando la ecuación (206).

La tensión cuadrática que acabamos de calcular puede referirse a la entrada dividiendo por A_{v1} . Entonces el valor cuadrático medio de la tensión de ruido total referida a la entrada, V_N^2 , es

$$V_N^2 = V_{nt}^2 + V_{n1}^2 + \frac{V_{n2}^2}{A_{v1}^2} = 4 k T R_s B \left(F_1 + \frac{F_2 - 1}{A_1^2 R_s} R_{ol} \right), \quad (209)$$

Dividiendo por V_{nt}^2 y teniendo en cuenta la ecuación (191) que da la ganancia de potencia disponible resulta:

$$F = \frac{V_N^2}{V_{nt}^2} = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_1}. \quad (210)$$

Es fácil generalizar esta fórmula para n etapas, planteando un modelo análogo al de la figura 22 (b) o bien considerando las $n - 1$ primeras etapas como una sola etapa y aplicando la fórmula anterior (problema 33). Resulta, para n etapas,

$$F = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_1} + \frac{F_3 - 1}{G_1 G_2} + \dots + \frac{F_n - 1}{G_1 G_2 \dots G_{n-1}}. \quad (211)$$

Si la ganancia de potencia disponible de la primera etapa (G_1) es elevada, los factores de ruido de las sucesivas etapas tienen poco peso en el factor de ruido total. Éste es uno de los motivos para adoptar la configuración emisor común en la primera etapa de los amplificadores a transistores, ya que esta configuración es la que tiene mayor ganancia de potencia.

También es el sustento de la práctica de subdividir la ganancia en los sistemas de audio o de radiofonía en una etapa preamplificadora de bajo ruido y gran ganancia de potencia, y una etapa de amplificación de potencia en la que el ruido es irrelevante y se prioriza obtener la mayor linealidad posible.

Otra aplicación de ésta fórmula aparece en la medición del factor de ruido, que analizaremos en la sección siguiente.

2.10.7 Medición del factor de ruido

La disposición más usual para medir el factor de ruido es la indicada en la figura 23. Se utiliza un amplificador de medición pues el nivel de ruido a la salida del amplificador en ensayo generalmente es muy bajo para ser medido directamente por un instrumento normal. De acuerdo con la ecuación (211) el ruido introducido por este amplificador de medición, se ve atenuado si la ganancia de potencia del amplificador en ensayo es gran-

de. No obstante, para fines de medición se recomienda utilizar un amplificador de bajo ruido. El filtro pasabanda se coloca para delimitar la banda de frecuencias B en la cual se especificará el factor de ruido medido. Finalmente el instrumento de medición deberá ser un voltímetro de verdadero valor eficaz. Si se dispone únicamente de uno de valor medio, las lecturas de ruido deberán multiplicarse por 1,284 de acuerdo con lo visto en la sección 1.22 (admitiendo que el ruido es Gaussiano).

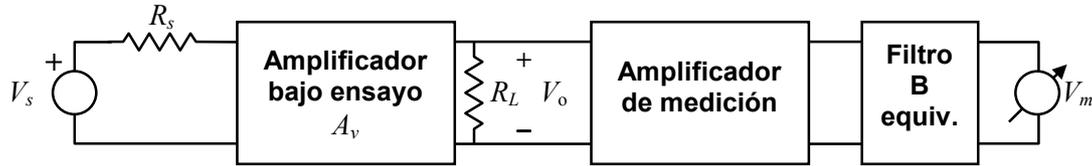


Figura 23. Disposición para medir el factor de ruido.

Hay dos procedimientos de medición. En el primero V_s es un oscilador senoidal cuya frecuencia esté en la banda B . Se ajusta su valor eficaz de modo que sea α veces el del ruido térmico de R_s , donde α es un factor mucho mayor que 1:

$$V_s = \alpha V_{st} = \alpha \sqrt{4kTR_s B} \quad (212)$$

Entonces se mide V_o . Despreciando el ruido,

$$V_o = A_v \alpha V_{st}. \quad (213)$$

A continuación se pasiva (anula) V_s y se vuelve a medir V_o , que ahora será la componente de ruido.

$$V_{no} = A_v \sqrt{V_{st}^2 + V_n^2} \quad (214)$$

donde V_n es la tensión de ruido introducido por el amplificador en ensayo, referida a su entrada. Entonces

$$F = \frac{V_{no}^2}{A_v^2 V_{st}^2} = \left(\frac{\alpha V_{no}}{V_o} \right)^2. \quad (215)$$

En la práctica $\alpha = 10$ con lo cual la figura de ruido se calcula así:

$$NF = 20 - 20 \log \frac{V_o}{V_{no}}. \quad (216)$$

Debe notarse que la primera medición sólo es necesaria si se desconoce A_v y de hecho es una forma indirecta de medir la ganancia. Sin embargo hemos despreciado el ruido, por lo cual la ganancia calculada es algo mayor que la real. En relación con la fórmula (216), su aplicación es extremadamente simple si se dispone de un instrumento con una escala en dB, ya que basta tomar la diferencia en dB entre la primera y segunda lectura y restarla de 20 para obtener NF.

El segundo procedimiento de medición consiste en emplear como fuente de señal un diodo con polarización directa como generador de ruido blanco. El resto de la medición es idéntico al anterior.

2.10.8. Resumen de las características del factor de ruido

El factor de ruido no es más que una forma de especificar el ruido introducido por el amplificador refiriéndolo al ruido térmico de la fuente de señal. Su principal ventaja es la simplicidad de su medición, y su principal desventaja, que no permite una comparación directa de los niveles de ruido introducidos por diversos amplificadores. Un buen factor de ruido (próximo a 1) no necesariamente significa que el amplificador sea poco ruidoso, ya que F puede ser bajo porque el ruido térmico de R_s es muy elevado (véase el problema 35). Si la resistencia de la fuente de señal es igual para dos amplificadores, entonces sí, es menos ruidoso el que tiene menor F . En otras palabras, sólo pueden compararse las prestaciones en cuanto a ruido de amplificadores con la misma resistencia de la fuente de señal.

Otra ventaja es que la figura de ruido representa directamente el deterioro de la relación señal / ruido (ecuación (204)), pero esta propiedad debe utilizarse con precaución, ya que sólo es válida cuando el ruido de la fuente de señal es sólo térmico.

2.11. Modelo de ruido con fuente de tensión y de corriente a la entrada.

Hemos asociado al factor de ruido un primer modelo de ruido, refiriendo el ruido del amplificador a su entrada, a través de una fuente v_n (véase la figura 22(a)). Sin embargo éste no es un modelo del amplificador aislado sino de todo el circuito, incluida la influencia de R_s (excepto en lo que se refiere a su propio ruido). El modelo que se muestra en la figura 24(a) es, en cambio un modelo *del amplificador*, en el cual los parámetros $\overline{e_n^2}$ e $\overline{i_n^2}$ no dependen del circuito externo.

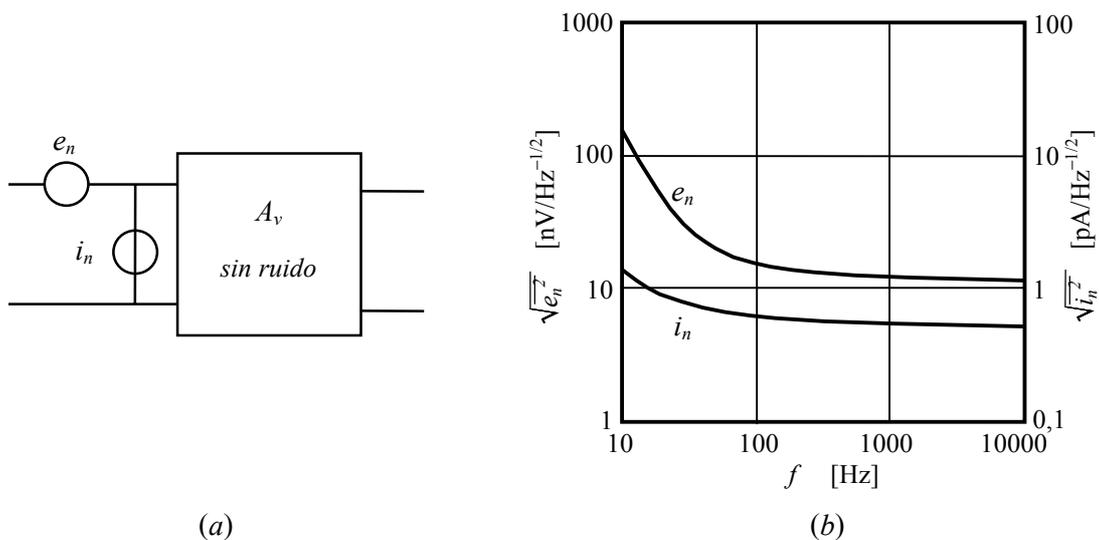


Figura 24. (a) Modelo de ruido para el amplificador. (b) Especificaciones.

Este modelo con dos fuentes a la entrada es común en amplificadores operacionales y otros amplificadores integrados, ya que representa adecuadamente las dos principales fuentes de ruido de los transistores de entrada, indicadas en el modelo de la figura 16. Los parámetros se especifican como en la figura 24(b).⁵

Las fuentes están levemente correlacionadas, ya que a excepción de la primera etapa, las fuentes de ruido de las siguientes etapas aparecen reflejadas tanto en e_n como en i_n , expresándose esta correlación por medio del *coeficiente de correlación* dado por

$$\gamma = \overline{\varphi_{i_n e_n}}(0). \quad (217)$$

El coeficiente de correlación en general no se especifica ya que los errores originados en la propia dispersión de $\overline{e_n^2}$ e $\overline{i_n^2}$ tienen considerablemente mayor importancia que los que se derivan de despreciarlo. Normalmente se acepta que $\gamma = 0$ y entonces puede trabajarse como si i_n y e_n fueran *no correlacionadas*.

Ejemplo 1: Calculemos la fuente de tensión equivalente a la entrada para el amplificador de la figura 25(a), el cual supondremos con impedancia de entrada infinita. Por

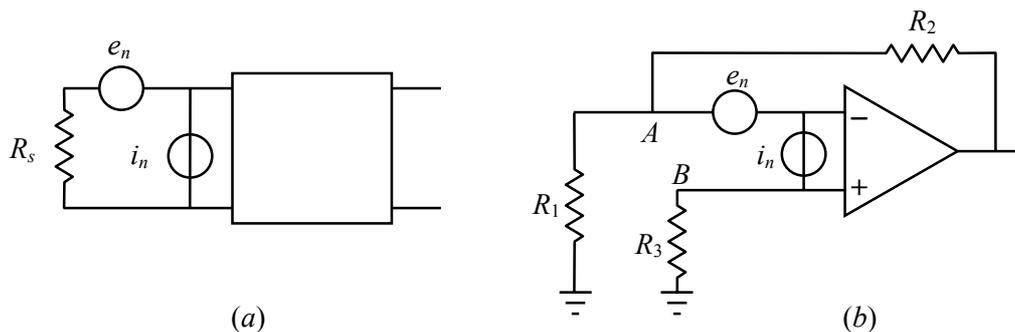


Figura 25. (a) Amplificador con resistencia a la entrada. (b) Amplificador operacional realimentado. No se han explicitado los modelos de ruido térmico.

ello la corriente i_n puede considerarse que circula completamente por R_s . Entonces, si v_n es la tensión equivalente a la entrada del amplificador en el sentido dado en la figura 22 (a), resulta

$$\overline{v_n^2} = \overline{e_n^2} + R_s^2 \overline{i_n^2}. \quad (218)$$

Vemos entonces por qué el modelo con una sola fuente depende no sólo del amplificador sino también del circuito externo, en este caso, de la resistencia R_s . La tensión v_n proviene de los generadores de ruido del amplificador, pero está modificada por la presencia de R_s . Obsérvese que esto no tiene nada que ver con el ruido que pudiera aportar dicho circuito externo. Si además consideramos aquél, obtenemos el ruido total e_N :

⁵ Nótese que en general en las especificaciones se da la raíz cuadrada de la densidad espectral por lo cual deberá elevarse al cuadrado antes de utilizarla.

$$\overline{e_N^2} = 4kTR_s + \overline{e_n^2} + R_s^2 \overline{i_n^2}. \quad (219)$$

Podemos aprovechar este resultado para calcular el factor de ruido dividiendo por el ruido térmico:

$$F = 1 + \frac{1}{4kT} \left(\frac{1}{R_s} \overline{e_n^2} + R_s \overline{i_n^2} \right). \quad (220)$$

Es fácil verificar que el mínimo factor de ruido se obtiene cuando

$$R_s = R_{sm} = \sqrt{\frac{\overline{e_n^2}}{\overline{i_n^2}}}, \quad (221)$$

y vale

$$F_{\min} = 1 + \frac{\sqrt{\overline{e_n^2} \overline{i_n^2}}}{2kT} \quad (222)$$

Esto es importante cuando existe la posibilidad de intercalar un adaptador (transformador) de impedancia, ya que puede lograrse que el amplificador “vea” la impedancia óptima.

Ejemplo 2: Repitamos lo anterior para el amplificador operacional realimentado de la figura 25 (b). Esa configuración corresponde a un amplificador inversor si la fuente se intercala entre R_1 y masa y a un no inversor si la fuente se intercala entre R_3 y masa. Para resolver este circuito primero desplazamos la fuente de corriente hasta los puntos A y B , como se muestra en la figura 26 (a), lo cual puede hacerse pues suponemos que las fuentes e_n e i_n son ideales. Luego desdoblamos dicha fuente en dos iguales y opuestas en paralelo con las resistencias R_1 y R_3 , tal como se indica en la figura 26 (b). Podría parecer que indicar la polaridad de estas fuentes de corriente es contradictorio con la

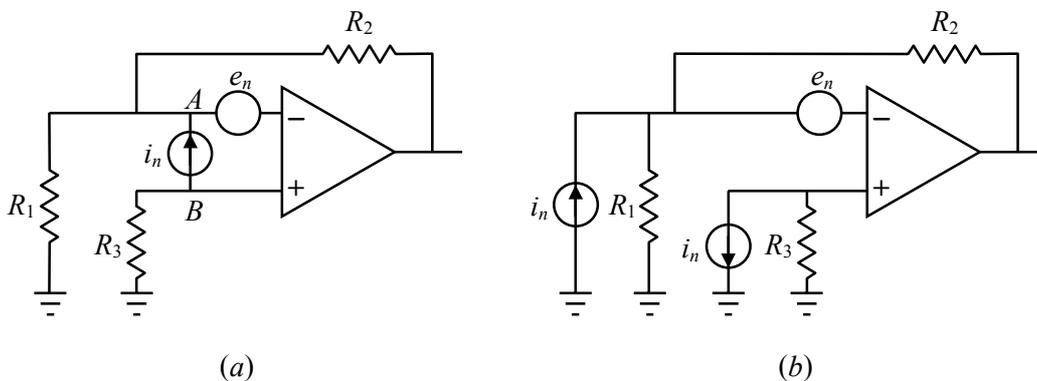


Figura 26. (a) Amplificador con resistencia a la entrada. (b) Amplificador operacional realimentado. No se han explicitado los modelos de ruido térmico.

convención adoptada previamente de no explicitar la polaridad de las fuentes aleatorias. No es así, sin embargo, pues al desdoblarse una fuente, las fuentes resultantes son correlacionadas, por lo tanto antes de pasar al dominio espectral debemos operar con ellas en el dominio temporal, en el que sí importan las polaridades.

Sustituyendo las fuentes de corriente por sus equivalentes de Thévenin y agregando las tensiones de ruido térmico v_{T1} , v_{T2} y v_{T3} que aportan las resistencias, resultan las siguientes fuentes temporales en serie con cada resistencia:

$$\begin{aligned} v_1 &= v_{T1} + i_n R_1, \\ v_2 &= v_{T2}, \\ v_3 &= v_{T3} - i_n R_3. \end{aligned} \quad (223)$$

Ahora es sencillo obtener la tensión a la salida, v_{no} por superposición en el dominio temporal:

$$v_{no} = [v_{T3} + e_n - i_n(R_3 + R_1 // R_2)] \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) + v_{T2} - v_{T1} \frac{R_2}{R_1}. \quad (224)$$

Al haber operado en el dominio temporal hemos sido capaces de volver a reunir en una sola la fuente de corriente que habíamos desdoblado, por lo que ahora todas las tensiones y corrientes que aparecen son no correlacionadas. Vale entonces la superposición de las densidades espectrales de potencia media. Resulta, tras sustituir las densidades espectrales de los generadores de ruido térmico,

$$v_{no}^2 = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)^2 \left[4kT(R_3 + R_1 // R_2) + \overline{i_n^2}(R_3 + R_1 // R_2)^2 + \overline{e_n^2}\right]. \quad (225)$$

Entonces en el caso del amplificador no inversor, en el cual la ganancia es $1 + R_2/R_1$, la tensión total de ruido referida a la entrada vale

$$\overline{v_n^2} = 4kT R_e + \overline{i_n^2} R_e^2 + \overline{e_n^2}, \quad (226)$$

donde $R_e = R_3 + R_1 // R_2$.

Esta expresión es análoga a la obtenida anteriormente para un amplificador no realimentado, y con ella puede obtenerse el factor de ruido:

$$F = \frac{R_e}{R_3} + \frac{1}{4kT R_3} \left(\overline{i_n^2} R_e^2 + \overline{e_n^2}\right). \quad (227)$$

2.12. Ruido de banda ancha

Se denomina *ruido de banda ancha* de un amplificador al valor eficaz del ruido a la salida en toda la banda de frecuencias. Si $e_N(f)$ es la densidad de potencia media de la tensión de ruido referida a la entrada y $A(f)$ la función de transferencia (o ganancia de tensión) del amplificador, entonces el ruido de banda ancha V_N será:

$$V_N^2 = \int_0^{\infty} \overline{e_N^2}(f) |A(f)|^2 df. \quad (228)$$

Ejemplo: Calculemos el ruido de banda ancha de un amplificador con $\overline{e_N^2}(f)$ y $|A(f)|$ como se indican en la figura 27. Las expresiones exactas son:

$$\overline{e_N^2}(f) = \overline{e_{N_0}^2} \left(1 + \frac{f_N}{f} \right), \quad (229)$$

$$|A(f)|^2 = A_0^2 \left(\frac{f/f_1}{1 + f/f_1} \right)^{2R_1} \left(\frac{1}{1 + f/f_2} \right)^{2R_2}. \quad (230)$$

Sin embargo realizar la integración utilizando estas expresiones es complicado, por lo

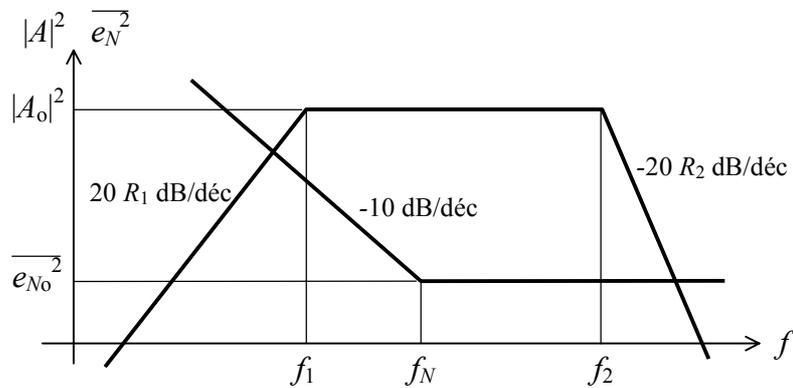


Figura 27. Curvas aproximadas por las asíntotas de $|A(f)|$ y $\overline{e_N^2}(f)$, en un caso típico.

cual conviene hacer las siguientes aproximaciones:

$$\overline{e_N^2}(f) \cong \begin{cases} \overline{e_{no}^2} f_N / f & \text{si } f \leq f_N \\ \overline{e_{no}^2} & \text{si } f > f_N \end{cases} \quad (231)$$

$$|A(f)|^2 \cong \begin{cases} A_0^2 (f/f_1)^{2R_1} & \text{si } f \leq f_1 \\ A_0^2 & \text{si } f_1 < f \leq f_2 \\ A_0^2 (f_2/f)^{2R_2} & \text{si } f > f_2. \end{cases}$$

Ahora puede aplicarse la ecuación (228). Resulta:

$$V_N^2 \cong A_o^2 \overline{e_{no}^2} \left[\frac{2R_2 f_2}{2R_2 - 1} + \frac{f_1}{2R_1} + f_N \left(\ln \frac{f_N}{f_1} - 1 \right) \right]. \quad (232)$$

Esta forma de cálculo simplificada da resultados aceptables teniendo en cuenta la dispersión de los parámetros.

Casi siempre el ruido de banda ancha está acotado por las limitaciones en alta y baja frecuencia. Por ejemplo, las capacidades parásitas y la propia caída en alta frecuencia de los ruidos que se suponen blancos impiden que el ruido de alta frecuencia se haga infinitamente grande. En baja frecuencia, si el comportamiento $1/f$ pudiera extrapolarse hasta frecuencias arbitrariamente bajas, dado que el logaritmo tiende a $-\infty$ cuando f tiende a 0, el ruido de banda ancha resultaría infinito. Aunque no se conoce hasta qué frecuencia sigue valiendo la ley $1/f$, las limitaciones prácticas están dadas por la acotación del tiempo de interés. Por ejemplo, si un circuito se va a utilizar durante 50 años, no tiene sentido considerar frecuencias menores que $1/(50 \text{ años}) = 6,3 \times 10^{-10} \text{ Hz}$. Puede comprobarse fácilmente que la potencia contenida entre esta frecuencia y 1 Hz es apenas 9 veces mayor que la comprendida entre 1 Hz y 10 Hz y, salvo para circuitos en los que se busca una estabilidad a largo tiempo inusualmente alta, dicha potencia carece de efectos prácticos.

2.13. Temperatura de ruido

La *temperatura de ruido*, T_n es una forma de especificar el ruido tanto de un dipolo como de un cuadripolo. En el caso de un dipolo, es la temperatura adicional (por sobre la temperatura ambiente) que debería tener el dipolo para que su ruido fuera asimilable a un ruido de origen térmico. Así, por ejemplo, una resistencia ideal tiene una temperatura de ruido igual a 0, ya que sin incrementar la temperatura su ruido es igual al térmico. Por el contrario, una antena, que capta ruido errático, tendrá más ruido que el correspondiente a su resistencia galvánica más su impedancia de radiación, por lo que su temperatura de ruido será más elevada..

En el caso de un amplificador, se define como la temperatura *adicional* que tendría que tener la resistencia del generador de señal, R_s , (por encima de 290 K) para que se le pudiera atribuir todo el ruido a la salida. Se relaciona con el factor de ruido por

$$T_n = 290 \text{ K} (F - 1). \quad (233)$$

Apéndice 1

Debemos probar que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} v_T(t) v_T(t - \tau) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} v(t) v(t - \tau) dt \quad (\text{A1-1})$$

Para ello veremos que la diferencia de las integrales tiende a 0. Ante todo podemos sustituir $v_T(t)$ por $v(t)$ ya que la integral sólo se extiende al intervalo $[-T/2, T/2]$.

$$\begin{aligned} \Delta(T) &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} v(t) v(t - \tau) dt - \int_{-T/2}^{T/2} v(t) v_T(t - \tau) dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} v(t) (v(t - \tau) - v_T(t - \tau)) dt \end{aligned} \quad (\text{A1-2})$$

Es fácil ver que $v(t - \tau) - v_T(t - \tau)$ sólo es $\neq 0$ en un intervalo de amplitud $|\tau|$ y por lo tanto independiente de T . En la figura A1 se muestra un ejemplo en el cual $\tau > 0$. En dicho intervalo ese término es igual a $v(t - \tau)$, por lo cual está acotado por M . Entonces la integral del último miembro de (41) puede acotarse así:

$$\Delta(T) \leq \frac{1}{T} |\tau| M^2, \quad (\text{A1-3})$$

de donde $\Delta(T)$ tiende a 0 cuando T tiende a infinito, lo cual prueba la validez de (A1-1).

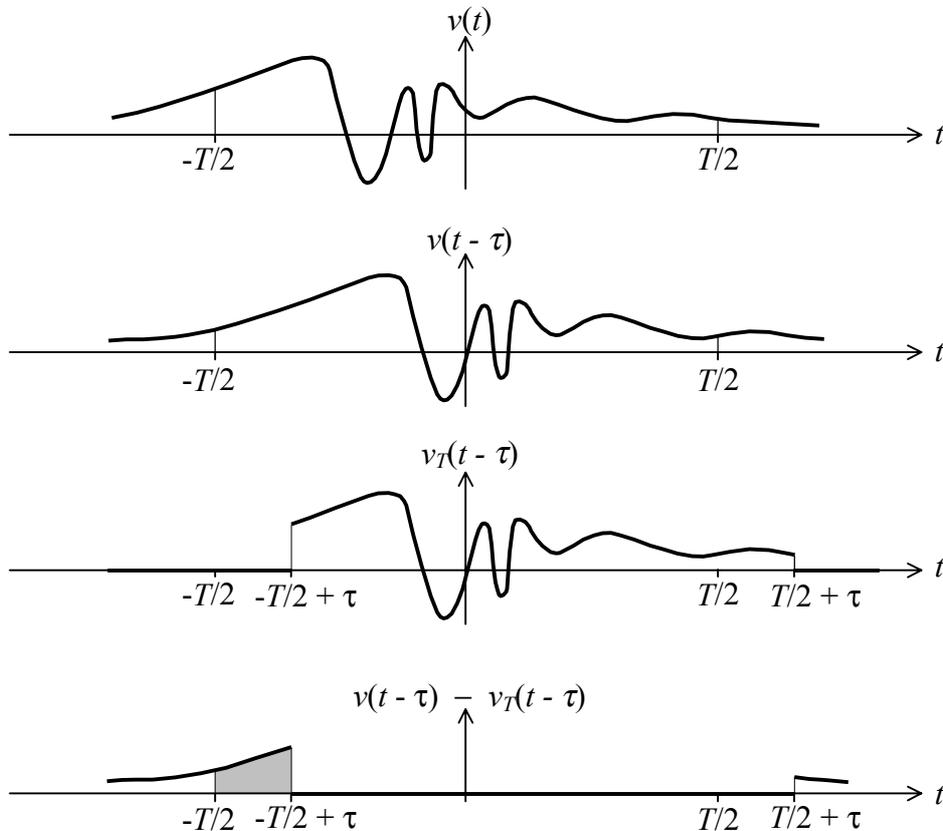


Figura A1. La zona rayada es la única que contribuye a la integral de (A1-2).

Apéndice 2

Prueba del Teorema de Nyquist

Por el teorema de Thévenin el dipolo se puede sustituir por su impedancia en serie con una fuente de tensión, en este caso de ruido. Calcularemos por balance energético la densidad de potencia media $\overline{v^2}$ de dicha fuente. Conectemos en los bornes del dipolo una resistencia de valor R . La potencia media transferida de Z a R por unidad de ancho de banda es

$$P_{Z \rightarrow R} = \overline{v^2} \left| \frac{R}{R + Z} \right|^2 \frac{1}{R}, \quad (\text{A2-1})$$

mientras que la potencia transferida de R a Z es

$$P_{R \rightarrow Z} = 4kTR \left| \frac{\mathbf{Re} Z}{R + Z} \right|^2 \frac{1}{\mathbf{Re} Z}, \quad (\text{A2-2})$$

ya que sólo la parte real de $Z(\omega)$ consume potencia activa. Dado que la energía transferida en uno y otro caso es energía térmica, a menos que sea

$$P_{Z \rightarrow R} = P_{R \rightarrow Z} \quad (\text{A2-3})$$

uno de los dos dipolos se estaría calentando y el otro enfriando, lo cual no es posible por el Segundo Principio de la Termodinámica (se supone que se ha alcanzado el equilibrio térmico). Igualando, resulta

$$\overline{v^2} = \frac{|R + Z|^2}{R} \frac{\mathbf{Re} Z}{|R + Z|^2} 4kTR, \quad (\text{A2-4})$$

de donde

$$\overline{v^2}(f) = 4kT \mathbf{Re}(Z(2\pi f)), \quad (\text{A2-5})$$

lo cual prueba el teorema.

Problemas

Los problemas señalados con * son de carácter más matemático por lo que no es imprescindible resolverlos, pero deben leerse al menos pues contienen propiedades importantes utilizadas en el texto.

- 1) Proponer una función periódica cualquiera (por ejemplo lineal o exponencial para $0 \leq t < T$) y determinar sus espectros de amplitud y fase.
- 2) Consideremos un cuadripolo no lineal que eleva al cuadrado la tensión aplicada a su entrada y un filtro pasabajos lineal con frecuencia de corte ω_0 con atenuación 0 dB para bajas frecuencias. Calcular el espectro de frecuencias de la respuesta ante la entrada $v(t) = 1 + \cos \omega_0 t$ de los siguientes sistemas: a) el elemento cuadrador b) el filtro c) el filtro en cascada con el cuadrador d) el cuadrador en cascada con el filtro.
- 3) Para la función propuesta en 1) determinar a) el contenido de potencia, b) el espectro de potencia c) el contenido de potencia en la banda que contiene las tres primeros armónicos.
- 4) ¿Bajo que condiciones vale el principio de superposición para el contenido de potencia? Indicación: Considerar $f_1(t) = f_2(t) = \cos \omega t$.
- 5) Para la función $1 + \cos t + 0,5 \cos 2t + 0,1 \cos 3t$ graficar la función de potencia acumulada $Q(f)$ y dar una expresión analítica del espectro de densidad de potencia $P(f)$

- 6) * Demostrar las siguientes propiedades de la transformada de Fourier:

a) Si $f(t)$ es par entonces $F(f(t)) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt$.

b) Si $f(t)$ es impar entonces $F(f(t)) = j \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \sen \omega t dt$

c) Si $F[f_1(t)] = F_1(j\omega)$ y $F[f_2(t)] = F_2(j\omega)$ y α, β son constantes entonces

$$F[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha F_1(j\omega) + \beta F_2(j\omega).$$

d) Si $F(f(t)) = F(j\omega)$ entonces

$$F[f'(t)] = j\omega F(j\omega),$$

$$F[f^{(n)}(t)] = (j\omega)^n F(j\omega).$$

e) Teorema del desplazamiento en el dominio de frecuencias: Si $F[f'(t)] = F(j\omega)$, entonces:

$$F[f'(t) e^{-a t}] = F(a + j\omega),$$

donde a puede ser real, imaginario o complejo.

f) Teorema del desplazamiento en el dominio de tiempos: Si $F(f(t)) = F(j\omega)$ entonces:

$$F[f(t - t_0)] = F(j\omega) e^{-j \omega t_0}$$

(también llamado teorema del retardo).

g) Si $F(j\omega)$ es una transformada de Fourier de una función real entonces:

$$\overline{F(j\omega)} = F(-j\omega)$$

$$|F(j\omega)| = |F(-j\omega)|$$

h) Si $\mathbf{F}(f(t)) = F(j\omega)$ entonces

$$\mathbf{F}[f(-t)] = F(-j\omega)$$

- 7) a) Utilizando la propiedad de muestreo del impulso de Dirac $\delta(t)$, es decir que para toda función $f(t)$ continua en 0 vale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0)$$

verificar que $\mathbf{F}(\delta(t)) = 1$.

b) Aplicar a) y el teorema del desplazamiento frecuencial para demostrar que

$$\mathbf{F}(\cos \omega_0 t) = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

c) Calcular la transformada de Fourier de sólo n ciclos de la función $\cos \omega_0 t$ y analizar si se aproxima el resultado de b) cuando n crece.

- 8) Dada la función periódica

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n \omega_0 t + \phi_n)$$

comprobar que su transformada de Fourier es una serie de impulsos de Dirac centrados en las frecuencias armónicas $n\omega_0$ y $-n\omega_0$.

- 9) Modulación de amplitud. Si $m(t)$ es una señal cuyo espectro de frecuencias es $M(j\omega)$ entonces el espectro de $m(t) \cos \omega_0 t$ es

$$\mathbf{F}[m(t) \cos \omega_0 t] = \frac{1}{2} [M(j(\omega - \omega_0)) + M(j(\omega + \omega_0))]$$

Sugerencia: aplicar el problema 6) c). Este resultado permite una traslación del espectro similar a la de 6)e) pero prácticamente realizable.

- 10) Probar que si $H(j\omega)$ es la función de transferencia de un sistema y $h(t)$ es tal que $\mathbf{F}(h(t)) = H(j\omega)$ entonces $h(t)$ (llamada función de Green) es la respuesta del sistema ante un impulso $\delta(t)$ de Dirac.
- 11) Probar la ecuación (108).
- 12) Probar que la densidad de potencia media coincide con la densidad de potencia para las funciones periódicas. Sugerencias: Aplicar a cada armónico el problema 1)c).
- 13) * Probar la igualdad de Plancherel

$$\int_{-\infty}^{\infty} [v(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |V(j\omega)|^2 d\omega.$$

utilizando el teorema de convolución y la expresión de la transformada inversa de Fourier.

- 14) Probar que $g_1(t) * g_2(t) = g_2(t) * g_1(t)$.
- 15) * Probar que $g_2(t)$ y $g_2(t - \tau)$ tienen el mismo espectro de densidad de potencia media. Sugerencia: Aplicar la definición para cada función y antes de plantear el límite tomar la diferencia. Para calcular el límite tener en cuenta que si $y(T) \rightarrow y_0$ entonces $y^2(T) \rightarrow y_0^2$ y que $||a| - |b|| \leq |a - b|$
- 16) * a) Demostrar que si $g(t)$ tiene transformada de Fourier convergente entonces su espectro de densidad de potencia media es nulo. Interpretar este resultado. b) Demostrar que si a una función se le suma otra con transformada convergente su espectro de densidad de potencia media no cambia

Nota: De los problemas anteriores se deduce que hay infinitas funciones con una misma densidad de potencia media. De ahí la denominación de funciones aleatorias para una función descrita por su densidad de potencia media.

- 17) Demostrar que: a) $\sin \omega t$ y $\sin 2\omega t$ son no correlacionadas. b) $\sin \omega t$ y $\cos \omega t$ son ortogonales pero no son no correlacionadas.
- 18) Si $g_1(t), g_2(t)$ son periódicas de período T entonces

$$\overline{\varphi}_{12}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} g_1(t) g_2(t - \tau) dt$$

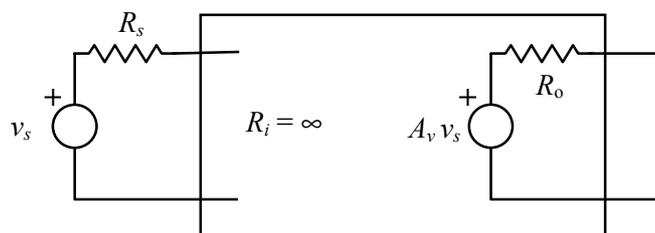
- 19) Dadas una senoide, una onda triangular, una onda diente de sierra sin valor medio y un tren de pulsos no simétrico, todos de igual frecuencia, determinar en todos los casos posibles el valor de que hace máxima la correlación (sin calcular explícitamente las correlaciones).
- 20) * Mostrar que dos señales no correlacionadas al atravesar sendos sistemas lineales estables mantienen la no correlación. Sugerencia: Expresar las respuestas por medio del teorema de convolución (sección 1.16) aplicar la definición de autocorrelación y luego permutar convenientemente el orden de integración. Para funciones no transformables restringirlas a un intervalo $[-T/2, T/2]$ y usar artificios similares a los utilizados en el texto. Pasar por alto las convergencias de los integrales.
- 21) * Probar que si $g_1(t)$ y $g_2(t)$ son no correlacionadas entonces

$$\overline{(g_1 + g_2)^2} = \overline{g_1^2} + \overline{g_2^2}$$

Sugerencia: Emplear la fórmula que relaciona la densidad de potencia media con la autocorrelación.

- 22) Calcular el modelo equivalente de ruido de los siguientes circuitos: a) Un capacitor de 100 pF en paralelo con la serie de un inductor de 1 mHy y un resistor de 1 Ω . b) La serie de un resistor de 10 k Ω , un inductor de 10 mHy y un capacitor de 1 μ F. c) El paralelo de un capacitor de 1 μ F y un resistor de 1 M Ω . d) El paralelo entre dos series iguales formadas por un resistor de 100 Ω y un capacitor de 1 μ F, al que se le han cortocircuitado los puntos medios con una resistencia de 1 k Ω .
- 23) ¿Qué factor de pico deberá admitir un voltímetro para medir ruido térmico despreciando picos que aparezcan menos del 1% del tiempo.?

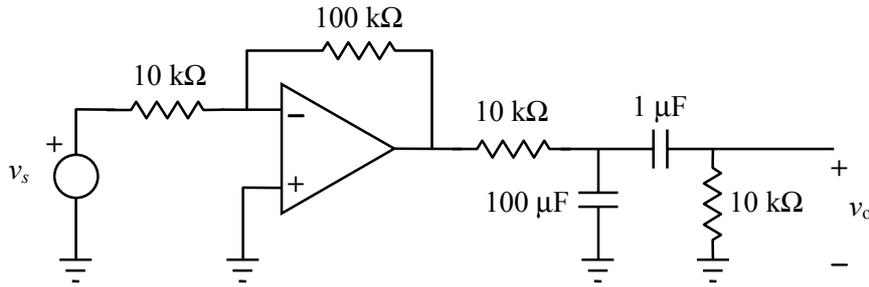
- 24) Probar que un diodo sin tensión en bornes se comporta desde el punto de vista del ruido como una resistencia igual a su resistencia incremental.
- 25) a) Por un diodo circula 1 A. ¿Cuál es el valor eficaz de su corriente de ruido en la banda de 100 kHz a 200 kHz? b) En la banda de 1 kHz a 10 kHz un diodo muestra una corriente eficaz de ruido de 17 nA. ¿Qué corriente circula por él?
- 26) La gráfica logarítmica de la densidad de potencia de la corriente de ruido de un diodo posee aproximadamente un tramo de recta que cae hasta la frecuencia de 2000 Hz, a partir de la cual se mantiene constante igual a $320 \text{ (pA)}^2/\text{Hz}$. Suponiendo que los únicos tipos de ruido presentes son el de emisión y el $1/f$ determinar a) la corriente que circula por el diodo y b) la constante K del ruido $1/f$ teniendo en cuenta que la corriente por el diodo es de 250 mA. Indicación: las rectas mostradas son las asíntotas de la curva exacta.
- 27) Calcular el ancho de banda equivalente de ruido de un filtro pasabajos con un polo de segundo orden en la frecuencia f_0 . Calcular el ancho de banda a -3 dB y comparar (observar que este último no es igual a f_0 , a diferencia de un filtro de primer orden).
- 28) ¿Cuál es la potencia disponible de ruido de un diodo en una banda B ? (Despreciar el ruido $1/f$.)
- 29) Comprobar que la ganancia de potencia y la ganancia de potencia disponible coinciden cuando hay adaptación de impedancia a la entrada ya la salida de un amplificador.
- 30) Calcular el factor de ruido de un amplificador de corriente con ganancia de cortocircuito A_i , conociendo la corriente de ruido con la salida en cortocircuito I_{n0} .
- 31) Si la fuente de señal tiene una potencia disponible de ruido 100 veces mayor que la debida sólo a R_s ¿qué amplificador conviene elegir entre uno con $NF = 1 \text{ dB}$ y otro con $NF = 3 \text{ dB}$ si el primero es más costoso? ¿Puede cambiar la respuesta si el único ruido de la fuente de señal es el ruido térmico?
- 32) Consultar diversos manuales y hojas de datos de transistores e interpretar las especificaciones y curvas de ruido.
- 33) Generalizar la fórmula (210) para obtener la (211).
- 34) Calcular el valor exacto de F en una medición por el procedimiento descrito en 2.10.7
- 35) Verificar que en el siguiente circuito un aumento de R_s mejora el factor de ruido y sin embargo la relación señal/ruido a la salida empeora:



(R_o es ruidosa)

- 36) a) Sugerir un método para medir los parámetros del modelo de ruido con dos fuentes a la entrada. b) En el amplificador del problema anterior suponer que $R_i \neq \infty$ y calcular dichos parámetros (R_i es ruidosa).

37) Calcular el ruido de banda ancha del siguiente amplificador:



Suponemos que las densidades espectrales de potencia media de la corriente y la tensión de ruido bajan a razón de 10 dB/déc hasta 1 kHz, donde sus valores comienzan a ser constantes e iguales respectivamente a $(1 \text{ pA})^2/\text{Hz}$ y $(10 \text{ nV})^2/\text{Hz}$.

38) Si T_{n1}, \dots, T_{nm} son las temperaturas de ruido de m amplificadores conectados en cascada y T_1, \dots, T_n sus respectivas ganancias de potencia disponibles, verificar que la temperatura de ruido total es

$$T_n = T_{n1} + \frac{T_{n2}}{G_1} + \frac{T_{n3}}{G_1 G_2} + \dots + \frac{T_{nm}}{G_1 G_2 \dots G_m}$$

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Kolmogorov; Fomin. “Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional”. Editorial MIR. Moscú.
- [2] Apostol, T. “Análisis Matemático”. Editorial Reverté.
- [3] Javid; Brenner. “Analysis, Transmission and Filtering of Signals”. Editorial McGraw-Hill.
- [4] Thornton, R.D., DeWitt, D., Chenette, E.R., Gray, P. “Características y limitaciones de los transistores”. Serie SEEC, tomo 4. Editorial Reverté. Barcelona, 1971.
- [5] Ott. “Noise Reduction Techniques In Electronic Systems”. Editorial Wiley
- [6] National Semiconductor Corporation. “Audio Radio Handbook”. 1980
- [7] Connor, F.R.. “Ruido”. Serie Temas de Telecomunicación, tomo VI. Editorial Labor. Barcelona, 1975.
- [8] Schottky, W. Ann. der Phys. 57 (1918) 541.
- [9] Schottky, W. Ann. der Phys. 68 (1922) 157.
- [10] Johnson, J. B. Physics Review 26 (1925) 71.