CONFORMACION DE ONDAS

Ing. María Isabel Schiavon

1. CONCEPTOS BASICOS.

Al excitar una red lineal (constituida por elementos pasivos: R, L y C) con una onda senoidal, las tensiones y corrientes del circuito en régimen permanente serán también senoidales. En particular, la señal a la salida de la red será una onda senoidal que reproduce la forma de la onda de entrada, difiriendo solamente en amplitud y fase.

En consecuencia, la influencia del circuito sobre la señal puede ser totalmente especificada por su función transferencia (relación entre salida y entrada), que puede expresarse en función de dos parámetros:

- GANANCIA (módulo de la función transferencia): definida como el cociente entre las amplitudes de salida y entrada.
- DESFASAJE:: diferencia de fase entre salida y entrada

Si la excitación del circuito lineal no es senoidal (por ej. pulso, escalón, onda cuadrada, etc.) la forma no será conservada. El proceso por el cual una onda no senoidal es alterada en una transmisión mediante elementos lineales se conoce como:

CONFORMACION LINEAL DE ONDAS

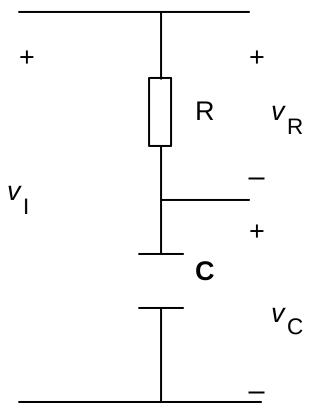
Debe hacerse especial énfasis en que la onda senoidal es la única que conserva su forma con precisión al pasar por una red lineal.

Toda onda no senoidal puede escribirse como suma algebraica de ondas senoidales de distinta frecuencia y fase mediante su descomposición en serie o integral de Fourier, según sea periódica o no. Cada uno de esos términos (armónicos) es alterado de distinta manera en su magnitud y fase según su frecuencia, o sea que conociendo como responde el circuito para cada armónico (que queda definido por la ganancia y el desfasaje) se puede tener idea de como será la señal de salida para distintos tipos de señales de entrada.

2. ANÁLISIS DE UNA RED LINEAL SIMPLE

2.1Respuesta en frecuencia. Función transferencia. Frecuencia de corte.

Se analizará la respuesta a una excitación senoidal de frecuencia variable de una red lineal simple compuesta por una resistencia (R) y un capacitor (C):



$$v_I = v_R + v_C = V_M \ \mathrm{sen}\, wt$$

$$t = RC = \omega_o^{-1}$$

FIGURA 1: CIRCUITO RC

Se define ω_o como la inversa de la constante de tiempo del circuito.

Tomado la salida del circuito sobre la resistencia, la función transferencia, H_R, queda determinada por la relación entre la tensión sobre la resistencia (v_R) y la tensión de entrada (v_i), pudiéndose determinar la ganancia (G_R) y el desfasaje en función de la frecuencia (q_R):

$$H_R = 1\big/(1 - j/w\,RC) = 1\big/(1 - j w_o/w) \Rightarrow$$

$$\left|H_R\right| = G_R = \sqrt[-1/2]{1 + \left[\frac{w_o}{w}\right]^2} \quad \text{y} \quad q_R = \text{arc tg}\,\frac{w_o}{w}$$

w_o es la frecuencia para la cual la ganancia del circuito es 0,707 o sea la amplitud de la salida es raíz de dos veces más chica que la amplitud de la entrada, y se define como frecuencia de corte del circuito pasivo lineal.

$$w_o = 1\big/RC = t^{-1}$$

Si se toma la salida sobre el capacitor, la función transferencia queda determinada por la relación entre la tensión sobre el capacitor y la tensión de entrada (H_C), obteniéndose:

$$H_C = 1\big/(1 + jw\,RC) = 1\big/(1 + j w/w_o) \Rightarrow$$

$$\left|H_C\right| = G_C = \sqrt[-1/2]{1 + \left[\frac{w}{w_o}\right]^2} \quad \text{y} \quad q_C = -\,\text{arc tg}\,\frac{w}{w_o}$$

donde $w_o = 1\big/RC = t^{-1}$ es la frecuencia de corte.

Generalizando, la frecuencia de corte de un circuito depende de los parámetros del mismo y se define para una excitación senoidal, como la frecuencia para la cual la ganancia del circuito es raíz cuadrada de dos veces más chica que la ganancia a frecuencias medias. En un circuito lineal con elementos pasivos la ganancia es uno y resulta equivalente decir que la amplitud de la salida es raíz cuadrada de dos veces más chica que la amplitud de la entrada (o lo que es lo mismo la ganancia es la inversa de raíz de dos).

A continuación se hará un análisis cualitativo y gráfico de la respuesta en frecuencia de las dos funciones transferencias que pueden ser definidas en el circuito *(G_R y G_C).* Para realizar el análisis gráfico se realizarán las gráficas de la ganancia en decibeles y del desfasaje en función del logaritmo de la frecuencia (diagramas de Bode).

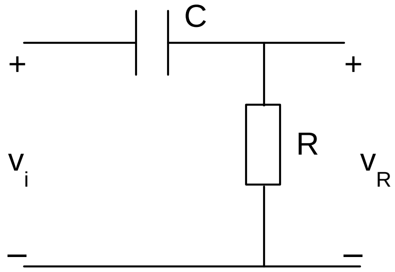
La unidad *DeciBel* se define en base a una relación de potencias, y de allí se deduce la unidad (DeciBel) relacionado con la ganancia de tensión:

$$\left[G_P\right]_{dB} = 10 \log \frac{P_2}{P_1} = 20 \log \frac{v_2}{v_1} + 10 \log \frac{z_2}{z_1}$$

$$\textit{resultando} \qquad \left[G_v\right]_{dB} = 20 \log \frac{v_2}{v_1}$$

2.2Circuito derivador o pasa - alto.

En la red definida anteriormente (fig.1) se toma la salida sobre la resistencia (fig.2). En esas condiciones la ganancia (G_R) está definida por la relación entre la tensión sobre la resistencia y la tensión de entrada



$$\tau = 1/\omega_O = RC$$

FIGURA 2: CIRCUITO DERIVADOR O PASA-ALTO.

$$\left|G_R\right| = \sqrt[-1/2]{1+\left[\frac{w_o}{w}\right]^2} \qquad y \qquad q_R = \text{arc tg} \frac{w_o}{w}$$

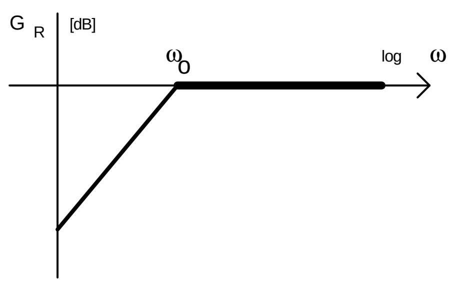
Analizando en los distintos rangos de frecuencia, tomando como referencia la frecuencia de corte:

$$\text{Si} \quad w = w_o \quad \Rightarrow \quad \left|G_R\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad y \quad q_R = \frac{p}{4}$$

$$\text{Si} \quad w >> w_o \quad \Rightarrow \quad \left|G_R\right| \to 1 \quad y \quad q_R \to 0$$

$$\text{Si} \quad w << w_o \quad \Rightarrow \quad \left|G_R\right| \to 0 \quad y \quad q_R \to \frac{p}{2}$$

Realizando el diagrama de Bode para el circuito con salida sobre la resistencia:



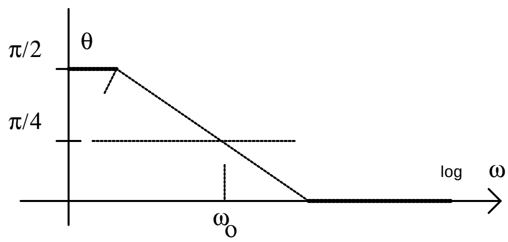


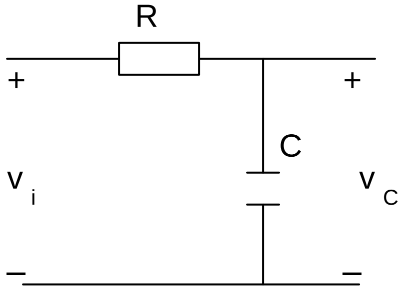
FIGURA 3: DIAGRAMA DE BODE PARA EL CIRCUITO CON SALIDA SOBRE LA RESISTENCIA

En estas gráficas puede observarse que el circuito con salida en la resistencia deja pasar las señales de altas frecuencias (mayores que la frecuencia de corte) sin producir modificaciones ni en la amplitud ni en la fase, mientras que atenúa y desfasa las frecuencias menores que la de corte (filtra las bajas frecuencias). Por ello se lo identifica como circuito pasa - alto o derivador.

La onda de salida de un circuito pasa - alto o derivador no presenta componente de continua, pues el circuito atenúa (filtra) las frecuencias menores que la de corte y, en particular, la frecuencia nula (continua).

2.3 Circuito integrador o pasa - bajo

En la red definida anteriormente (fig.1) se toma la salida sobre el capacitor (fig. 4).



$$\tau = 1/\omega_o = RC$$

FIGURA 4: CIRCUITO INTEGRADOR O PASA-BAJO.

En esas condiciones la ganancia está definida por la relación entre la tensión sobre el capacitor y la tensión de entrada (G_C).

$$|G_C| = \sqrt[-1/2]{1+\left[\frac{w}{w_o}\right]^2} \quad \text{y} \quad q_C = \text{arc tg}\,\frac{w}{w_o}$$

analizando para distintas frecuencias, resulta:

$$\text{Si} \quad w = w_o \quad \Rightarrow \quad |G_C| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad q_C = -\frac{p}{4}$$

$$\text{Si} \quad w >> w_o \quad \Rightarrow \quad |G_C| \to 0 \quad \text{y} \quad q_C \to -\frac{p}{2}$$

$$\text{Si} \quad w << w_o \quad \Rightarrow \quad |G_C| \to 1 \quad \text{y} \quad q_C \to 0$$

El diagrama de Bode resulta:

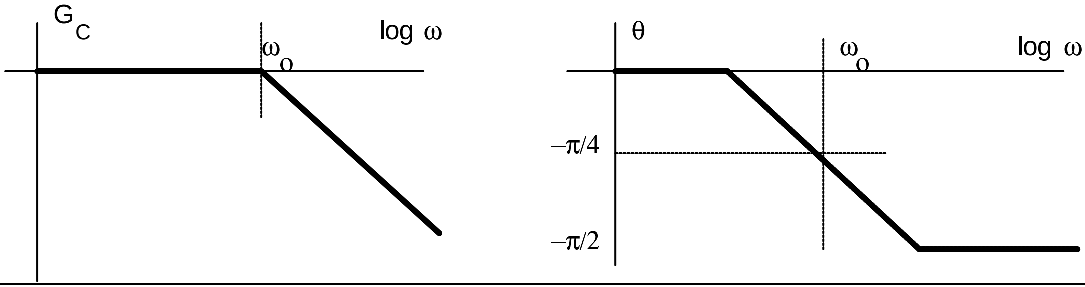


FIGURA 5: DIAGRAMA DE BODE PARA EL CIRCUITO CON SALIDA SOBRE EL CAPACITOR.

En base al diagrama se puede extraer la siguiente conclusión que permite identificar el circuito con salida en el capacitor como circuito pasa - bajo o integrador:

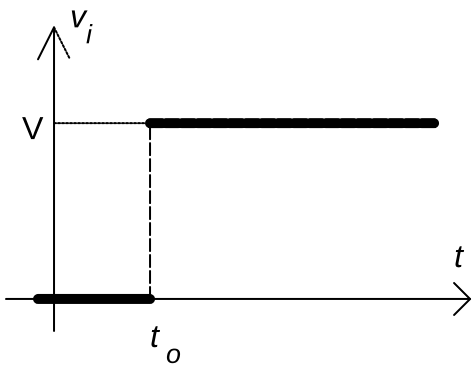
> *El circuito con salida en el capacitor deja pasar las señales de bajas frecuencias (menores que la de corte) sin cambiar ni su amplitud ni su fase, mientras que atenúa y desfasa las frecuencias mayores que la de corte (altas frecuencias).*

3. RESPUESTA A ONDAS NO SENOIDALES

3.1. Tipos de Ondas de Excitación.

Se analizará la respuesta del circuito RC para las ondas indicadas a continuación:

a. Escalón



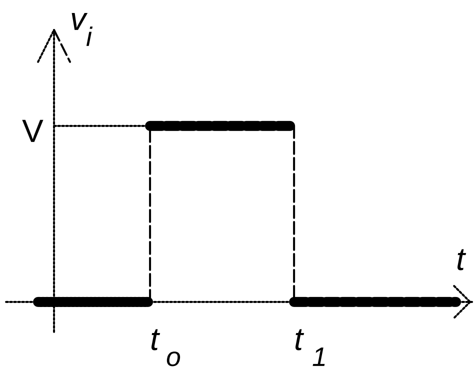
$$v_i = V\ H_{(t - t_o)}$$

$$H_{(t - t_o)} = 0 \quad si \quad t < t_o$$

$$H_{(t - t_o)} = 1 \quad si \quad t > t_o$$

FIGURA 6: ESCALON DE TENSION

b. Pulso



$$v_i = V\ H_{(t - t_o)} - H_{(t - t_1)}$$

$$v_i = V \quad si \quad t_o < t < t_1$$

$$v_i = 0 \quad si \quad t < t_o \ ;\ t > t_1$$

FIGURA 7: PULSO DE TENSIÓN

c. Onda Cuadrada:

Una onda cuadrada es una sucesión de pulsos negativos y positivos que se repiten periódicamente.

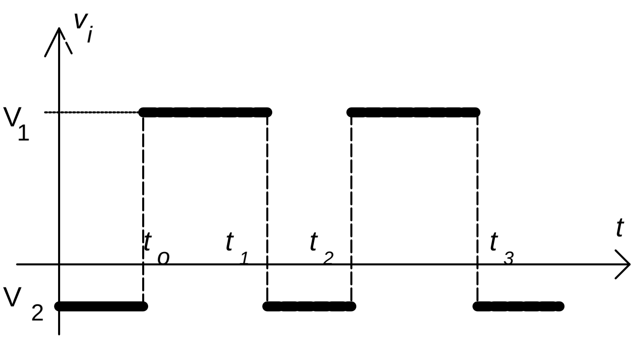


FIGURA 8: ONDA CUADRADA

Se define $\Delta V = V_1 - V_2$.

T_1, es la duración de cada uno de los intervalos de tiempo en que la onda toma el valor máximo (V_1) y T_2 corresponde a cada uno de los intervalos en que la onda toma el valor mínimo (V_2). El período (T) queda determinado por la suma de T_1 y T_2.

$$T = T_1 + T_2 \qquad\qquad \Delta V = V_1 - V_2,$$

Si la onda es cuadrada y simétrica tiene valor medio nulo se cumple:

$$V_1 = -V_2 \qquad\qquad T_1 = T_2 = T/2$$

Toda estas ondas no senoidales pueden escribirse como suma algebraica de ondas senoidales de distinta frecuencia y fase mediante su descomposición en serie o integral de Fourier, según sea periódica o no. Cada uno de los términos que la componen (armónicos) es alterado de distinta manera en su magnitud y fase según su frecuencia, o sea que conociendo como responde el circuito para cada armónico (que queda definido por la ganancia y el desfasaje) y superponiendo los efectos se puede tener idea de como será la señal de salida para esas señales de entrada.

3.2.- Circuito pasa - alto o derivador

a. Entrada Escalón

En $t = t_0$ se produce un cambio brusco de tensión a la entrada, como el condensador no puede variar su tensión en forma instantánea, la salida variará bruscamente en la misma proporción (las señales de alta frecuencia pasan a la salida sin cambios). A partir de ese instante de tiempo la entrada se mantiene constante, el capacitor comienza a cargarse y, en consecuencia la salida comienza a decrecer exponencialmente a cero con la constante de tiempo del circuito.

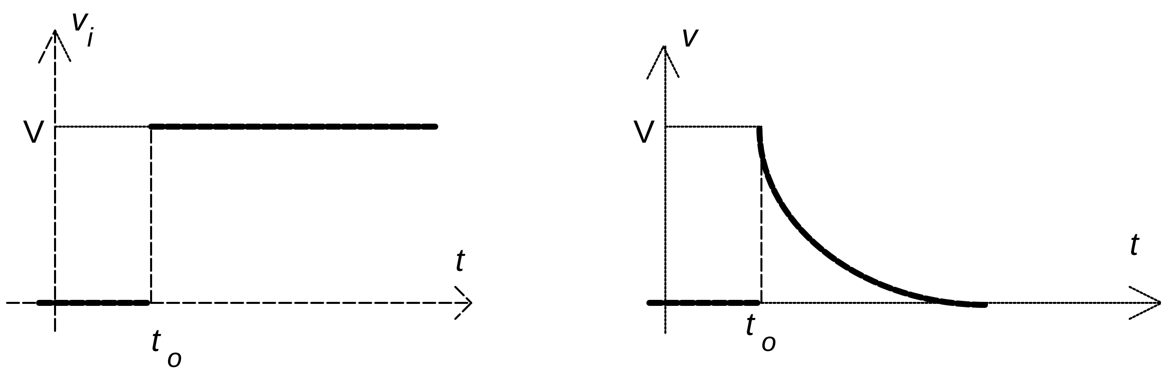


FIGURA 9: RESPUESTA DE UN CIRCUITO PASA-ALTO A UN ESCALÓN

b. Entrada Pulso $\qquad v_i = V\ H_{(t-t_o)} - H_{(t-t_1)}$

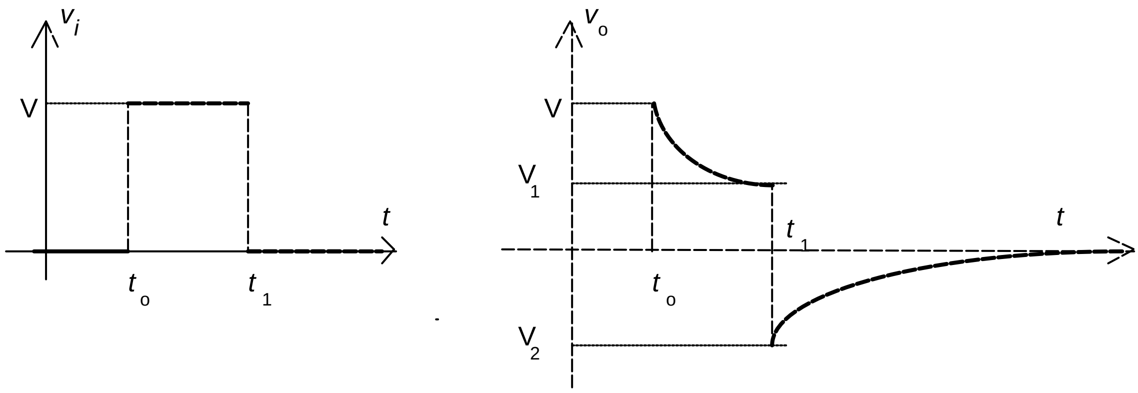


FIGURA 10: RESPUESTA DEL CIRCUITO PASA - ALTO A UN PULSO

Se definen las siguientes relaciones:

$$t_p = t_1 - t_0 \qquad \tau = RC$$

$$V_1 = V\, e^{-t_p/\tau} \qquad V_2 = V_1 - \Delta V$$

c.- Entrada Onda Cuadrada

La onda cuadrada es una sucesión de pulsos negativos y positivos que se repiten periódicamente. Se definen los siguientes valores característicos:

$$T = T_1 + T_2 \qquad \Delta V = V_1 - V_2,$$

En el inicio se genera un régimen transitorio cuya duración depende de la relación entre la constante de tiempo τ y los semiperíodos T_1 y T_2, este régimen no será considerado en el presente estudio.

$$\Delta V = V_1 - V_2 = V_{1a} - V_{2b} = V_{1b} - V_{2a}$$

$$V_{1b} = V_{1a}\, e^{-T_1/\tau} \qquad V_{2b} = V_{2a}\, e^{-T_2/\tau}$$

$$T = T_1 + T_2$$

La forma de la onda de salida, así como la duración del transitorio que se genera en el inicio, va a depender de la relación que existe entre la constante de tiempo τ y los semiperíodos T_1 y T_2.

Tal como se analizó anteriormente, la salida en régimen permanente (fig. 11) no tiene nivel de continua (el circuito filtra las componentes de baja frecuencia y, en particular, la continua). O sea que el régimen transitorio se extingue cuando el nivel de continua se hace cero.

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior se obtiene:

$$V_{1a} = \Delta V \frac{1 - e^{-T_2/\tau}}{1 - e^{-T/\tau}} \qquad V_{1b} = \Delta V\, e^{-T_1/\tau} \frac{1 - e^{-T_2/\tau}}{1 - e^{-T/\tau}}$$

$$V_{2a} = -\Delta V \frac{1 - e^{-T_1/\tau}}{1 - e^{-T/\tau}} \qquad V_{2b} = -\Delta V\, e^{-T_2/\tau} \frac{1 - e^{-T_1/\tau}}{1 - e^{-T/\tau}}$$

si $T_1 = T_2 = T/2$, resulta:

$$V_{1a} = -V_{2a} = \frac{\Delta V}{1 + e^{-T/2t}} \qquad V_{1b} = -V_{2b} = \frac{\Delta V\, e^{-T/2t}}{1 + e^{-T/2t}}$$

desarrollando en serie de Taylor:

$$V_{1a} = \frac{\Delta V}{2}\left(1 + \frac{T}{4t} + \ldots\ldots\right) \qquad V_{1b} = \frac{\Delta V}{2}\left(1 - \frac{T}{4t} + \ldots\ldots\right)$$

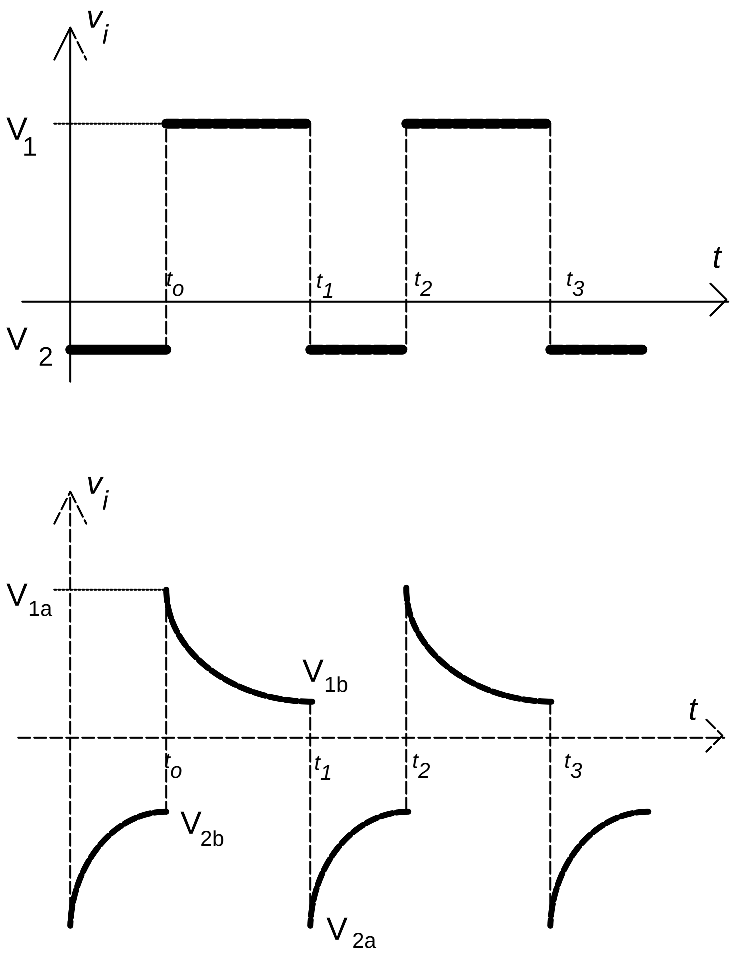


FIGURA 11: EXCITACIÓN ESCALON Y SALIDA DE UN CIRCUITO PASA - ALTO

Se define la FLECHA (f%) parámetro que da idea de la inclinación del techo plano de la onda, o sea de la deformación de la misma:

$$f\% = \frac{V_{1a} - V_{1b}}{\Delta V/2}\ \%$$

Si se cumple que $\tau >> T/2$ es posible despreciar los términos de orden superior en el desarrollo en serie de Taylor y la flecha resulta:

$$f\% = \frac{T}{2t}\% = \frac{w_0}{2\ f_{alimentación}}\% = \frac{p\ f_o}{f_{alimentación}}\%$$

y es posible establecer la relación entre la frecuencia de corte del circuito definida para una onda de entrada senoidal, y la flecha que se mide a la salida si se alimenta con onda cuadrada.
En el circuito pasa - alto se puede determinar mediante un ensayo con onda cuadrada la flecha y de esta manera se puede hallar la frecuencia de corte utilizando la aproximación indicada anteriormente. Esta determinación tiene un error aceptable si la flecha medida es menor o igual que 10%, pues para ese caso la influencia de los términos de orden superior en el desarrollo en serie es despreciable.

En estas condiciones, si la constante de tiempo es mucho mayor que cada semiperíodo de la onda de excitación a la salida se obtiene la forma de onda que se ve en la figura 12, y es posible determinar la frecuencia de corte del circuito mediante la medición de la flecha.

$$t >> T_1, T_2 \qquad V_{1a} - V_{2b} = \Delta V \qquad V_{1b} - V_{2a} = \Delta V$$

$$f\% = \frac{V_{1a} - V_{1b}}{\Delta V / 2}\% = \frac{w_0}{2 f_{alimentacion}}\%$$

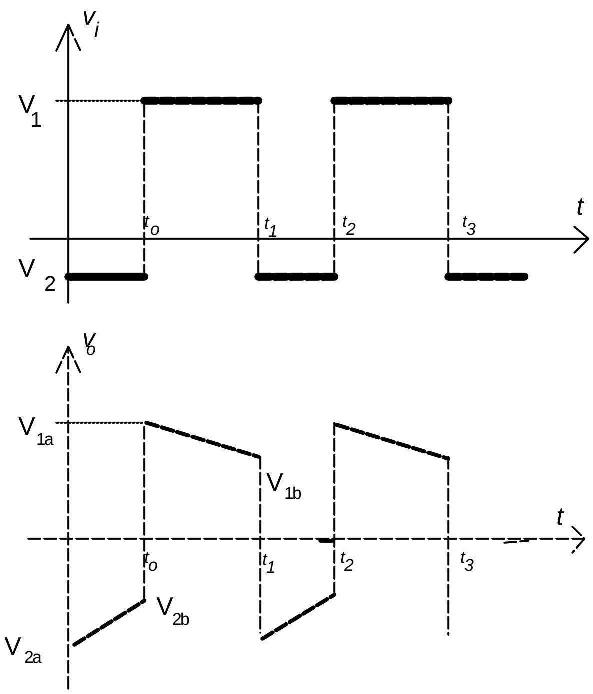


FIGURA 12: SALIDA DE UN CIRCUITO PASA - ALTO EXCITADO CON ONDA CUADRADA SI $\tau >> T_I$

Si la constante de tiempo es mucho menor que cada semiperíodo ($\tau << T_1$, $\tau << T_2$) la salida resulta:

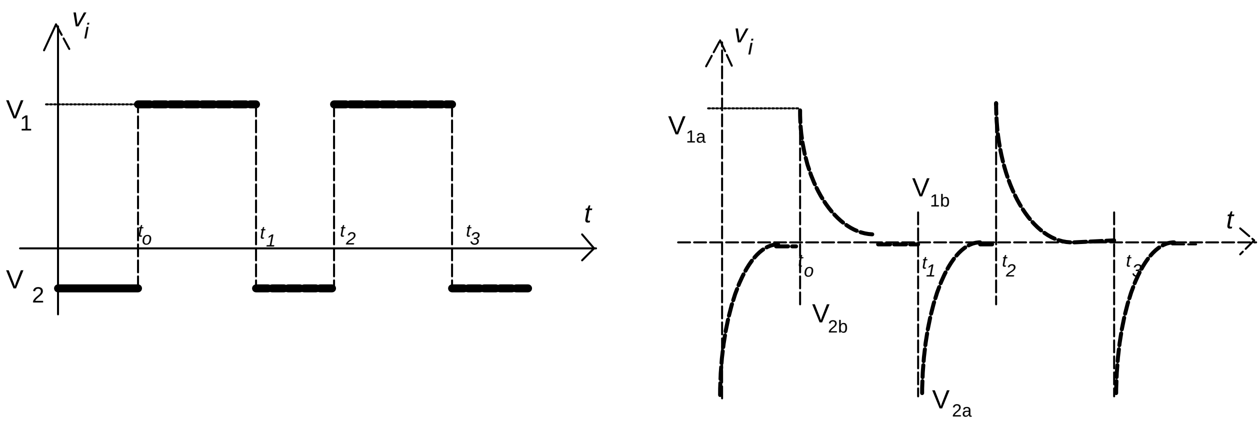


FIGURA 13: SALIDA DE UN CIRCUITO PASA-ALTO EXCITADO CON ONDA CUADRADA SI τ << T_I

$$V_{1a} = -V_{2a} = \Delta V \qquad\qquad V_{1b} = V_{2b} = 0$$

3.3 Circuito pasa-bajo o integrador

a. Entrada Escalón

En t = t_o se produce un cambio brusco de tensión a la entrada, y como el condensador no puede variar su tensión en forma instantánea la variación es absorvida por la resistencia, la salida permanece inalterada (las señales de alta frecuencia no pasan a la salida). A partir de ese instante de tiempo la entrada se mantiene constante, el capacitor comienza a cargarse y, en consecuencia, la salida comienza a crecer exponencialmente hacia el valor final (V) con la constante de tiempo del circuito (RC).

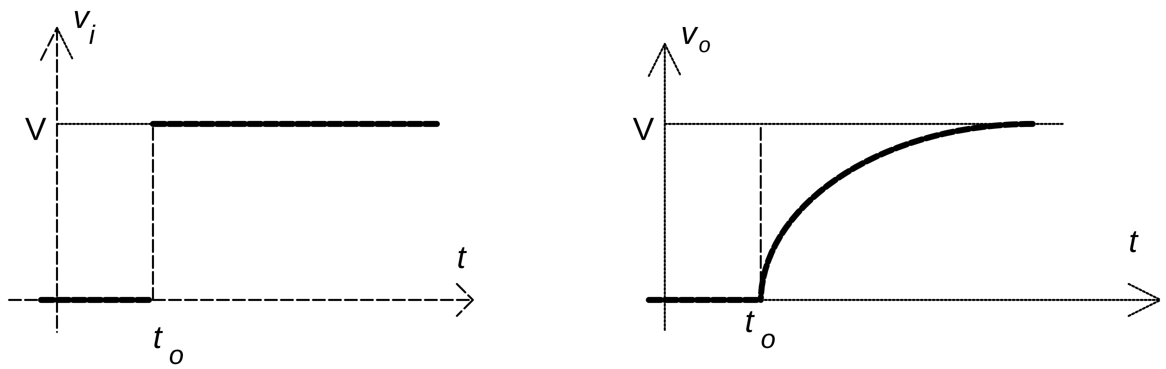
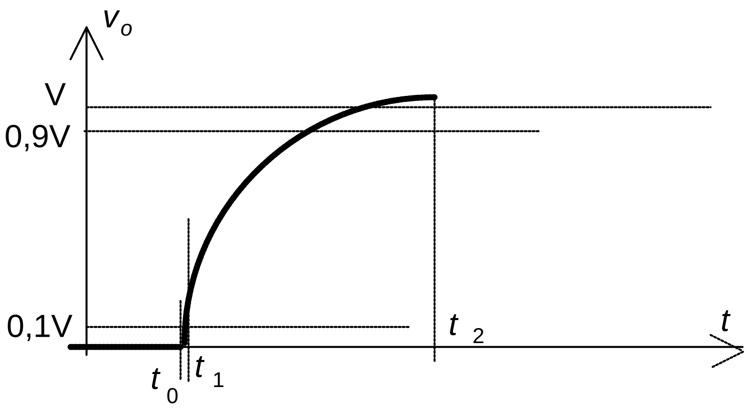


FIGURA 14: RESPUESTA A UN ESCALON

Se define el tiempo de respuesta (t_r) como el tiempo que tarda la tensión en crecer del 10 al 90% del cambio total de tensión. En el caso de un escalón con valor inicial nulo, es el tiempo que tarda la tensión en crecer del 10 al 90% del valor final.

El tiempo de respuesta da idea de la rapidez con que el circuito puede responder a una variación brusca de tensión, y está relacionado con la frecuencia de corte del circuito, o sea que midiendo el tiempo de respuesta es posible determinar la frecuencia de corte del circuito:

$$t_r = t_2 - t_1 = 2{,}2\tau = 2{,}2/\omega_o = 0{,}35/f_o \qquad\qquad \omega_o = 2\pi/f_o$$



$$t_r = t_2 - t_1$$

$$0{,}9V = V\,(1 - e^{-t_2/\tau})$$

$$0{,}1V = V\,(1 - e^{-t_1/\tau})$$

despejando

$$t_r = 2{,}2\,\tau$$

FIGURA 15: DEFINICION DE TIEMPO DE RESPUESTA.

b. Entrada Pulso

La respuesta a un pulso depende del ancho del mismo (t_p), produciéndose una distorsión pues la salida se extiende más allá del ancho del pulso (la carga acumulada en el condensador necesita un cierto tiempo para reacomodarse).

$$v_i = V\ H_{(t - t_o)} - H_{(t - t_1)}$$

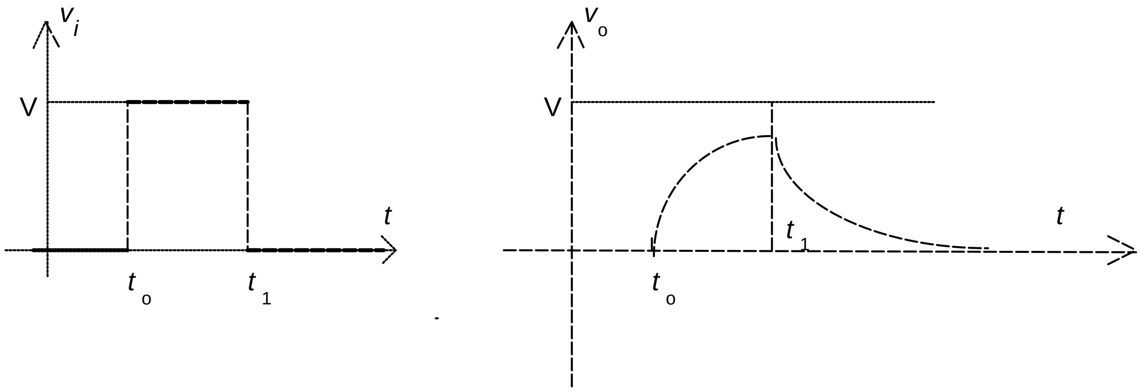


FIGURA 16: RESPUESTA A UN PULSO

$$t_p = t_1 - t_0 \qquad\qquad t = RC \qquad\qquad V_1 = V\ (1 - e^{-t_p/t})$$

c. Entrada Onda Cuadrada.

En el inicio se genera un régimen transitorio, cuya duración depende de la relación entre la constante de tiempo τ y los semiperíodos T_1 y T_2, que no será considerado en el presente estudio. A la salida se halla presente la componente de continua de la onda de entrada. La forma de onda a la salida, así como la duración del transitorio que se genera en el inicio, depende de la relación entre la constantes de tiempo τ y los semiperíodos T_1 y T_2.

Resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones se obtienen los valores característicos de la onda de salida:

$$V_{1s} = V_1 + (V_{2s} - V_1)\, e^{-T_1/t} \qquad\qquad V_{2s} = V_2 + (V_{1s} - V_2)\, e^{-T_2/t}$$

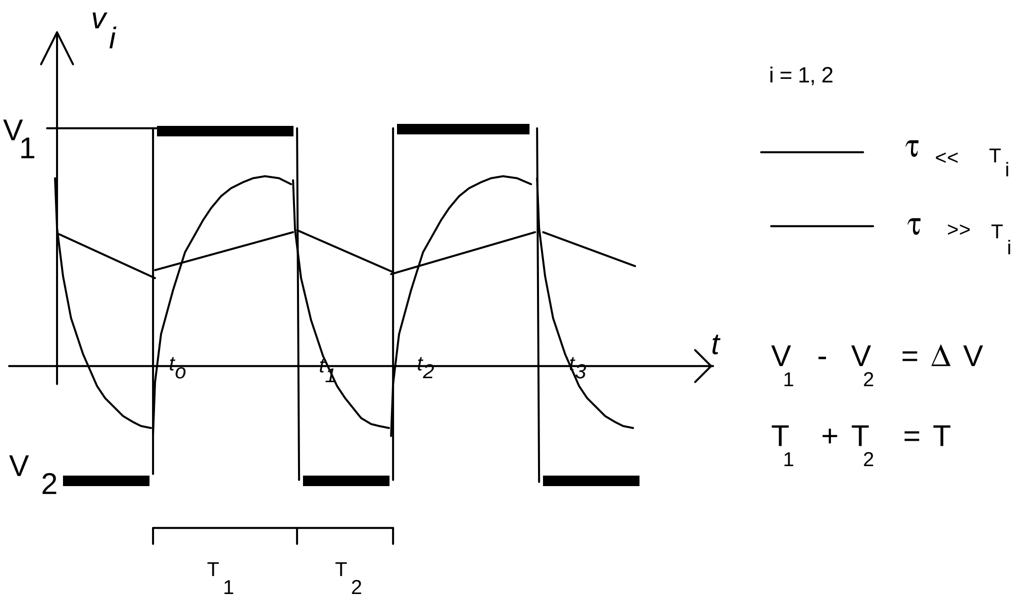


FIGURA 17: RESPUESTA DE UN CIRCUITO PASA - BAJO A UNA EXCITACION ESCALON

resultando

$$V_{1s} = \frac{V_1\left(1 - e^{-T_1/\tau}\right) + V_2\, e^{-T_1/\tau}\left(1 - e^{-T_2/\tau}\right)}{1 - e^{-T/\tau}}$$

$$V_{2s} = \frac{V_1\, e^{-T_1/\tau}\left(1 - e^{-T_1/\tau}\right) + V_2\left(1 - e^{-T_2/\tau}\right)}{1 - e^{-T/\tau}}$$

si la onda de entrada es simétrica y de valor medio nulo $\Rightarrow$ [T_1=T_2=T/2] y [V_2 = -V_2=V], resulta:

$$V_{1s} = -V_{2s} = V\,\frac{1 - e^{-T/2\tau}}{1 + e^{-T/2\tau}}$$

Como conclusión se puede recalcar:

> *En la salida del circuito integrador o pasa - bajo se halla presente la componente de continua de la onda de entrada.*

Como el tiempo de respuesta está directamente relacionado con la frecuencia de corte del circuito: es posible determinar experimentalmente la frecuencia superior de corte de un circuito excitándolo con onda cuadrada de frecuencia adecuada y midiendo el tiempo de respuesta a la salida.

$$t_r = t_{(0,9V)} - t_{(0,1V)} = 2{,}2\tau = 2{,}2/\omega_o = 0{,}35/f_o \qquad \omega_o = 2\pi/f_o$$

donde V es el salto total de la onda de entrada.