La resolución de un problema como metodología y objetivo de aprendizaje

Raúl Katz (1), Alicia Kurdobrin (2), María Cecilia Marinelli(3), Pablo Sabatinelli (4)

(1) Facultad Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura. UNR. Profesor Asociado.
(2) Facultad Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura. UNR. Profesor Adjunto.
(3) Facultad Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura. UNR. Ayudante de Primera.
(4) Facultad Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura. UNR. Ayudante de Primera.

Resumen

El presente trabajo se circunscribe a una experiencia realizada en una división de primer año en la asignatura Álgebra y Geometría Analítica, de la Facultad de Ciencias Exactas Ingeniería y Agrimensura. El mismo tiene como propósito mostrar situaciones emergentes en la resolución de un problema, y algunas reflexiones sobre los procesos cognitivos que se pusieron en juego. Se ha elegido la resolución de un problema y el aprendizaje colaborativo como estrategia didáctica a implementar.

Consideramos que actividades como la descripta deben ocupar un mayor espacio en el trabajo del aula por cuanto permiten explorar y analizar los razonamientos que ponen en juego los estudiantes al resolver un problema, ofreciendo de este modo elementos para actuar didácticamente y contribuir a la superación de las dificultades que se identifican.

Palabras claves

Resolución de problemas – trabajo colaborativo – emergencia de creencias erróneas.

Introducción

El presente trabajo se circunscribe a una experiencia realizada en una división de primer año en la asignatura Álgebra y Geometría Analítica I, de la Facultad de Ciencias Exactas Ingeniería y Agrimensura perteneciente a la Universidad Nacional de Rosario. El mismo tiene como propósito mostrar situaciones emergentes de la resolución de un problema, y algunas reflexiones sobre los procesos cognitivos que se pusieron en juego.

Se ha elegido la resolución de un problema y el aprendizaje colaborativo como estrategia didáctica a implementar.

¿Por qué la solución de un problema?

La solución de un problema exige por parte de los alumnos una actitud activa y un esfuerzo por buscar sus propias respuestas, su propio conocimiento.

Se busca fomentar en los alumnos la utilización de conocimientos disponibles para dar respuesta a situaciones distintas que demanden un proceso de reflexión y toma de decisiones sobre una secuencia de pasos a seguir, en lugar de aplicar rutinas aprendidas y automatizadas o esperar una respuesta elaborada por otros, ya sea un texto o el mismo docente. Pero al mismo tiempo se pretende la elaboración de nuevos conocimientos y/o procedimientos.

¿Por qué el aprendizaje colaborativo?

El aprendizaje colaborativo implica participar en discusiones, desarrollar propuestas, discutir y buscar acuerdos durante las discusiones, defender ideas, posiciones y propuestas, aceptar e integrar las ideas de otro etc.

De este modo se aprende de la reflexión común del intercambio, de analizar entre dos o más un tema a través de lo cual se obtiene un resultado enriquecido.

El problema propuesto

Describir el lugar geométrico de todos los puntos B que forman con los puntos O(0,0,0) y A(1,2,1) un triángulo de área 4

Conocimientos previos disponibles. Interrogantes y supuestos que se formularon.

Al momento de plantear el problema se habían abordado los siguientes contenidos: el estudio geométrico y analítico de los vectores, tanto en el plano como en el espacio; las distintas ecuaciones de una recta en el plano y sus propiedades métricas.

Por tal razón se consideró que la situación planteada podía ser comprendida por los estudiantes y provocarles un sentimiento de desafío intelectual.

a) Nuestros interrogantes a priori fueron:
b) Fijado un punto B solución ¿descubrirán los estudiantes que también son soluciones todos los puntos de la recta que contiene al punto B y es paralela a la recta determinada por los puntos O y A?
c) Una vez encontrada dicha recta ¿encontrarán luego que los puntos de las infinitas rectas paralelas, que se encuentran a igual distancia de la determinada por O y A, también cumplen con las condiciones del problema?
d) ¿Reconocerán que los puntos pertenecen a una superficie cilíndrica?
e) ¿Encontrarán a través de los recursos vectoriales la ecuación de dicha superficie?
f) Si la primera búsqueda los lleva a obtener la ecuación del lugar geométrico, ¿intentarán reconocer dicho lugar geométrico?

La solución del problema exige una comprensión de la propuesta y la conversión de la información que incluye al lenguaje matemático. Pero además demanda la concepción de un plan, la ejecución del mismo y el análisis de la solución obtenida, para lo cual se requiere activar los conceptos que se tienen almacenados y organizados en la memoria.

Consideramos la posibilidad de que el proceso de solución podría ponerse en funcionamiento de forma automática, pero que en definitiva el logro de la solución y su posterior interpretación, dependería de cómo los estudiantes articulan un conjunto de esquemas para movilizar sus saberes. De ahí nuestro interés por evaluar los procesos de solución seguidos y no sólo el resultado final.

El trabajo en el aula

Se conformaron 10 grupos de 6 alumnos, en promedio, cada uno. Los mismos se configuraron de acuerdo a cómo se iban acomodando en el aula, sin condicionamientos por parte de los docentes.

En lo que sigue se describen las actuaciones de los diferentes grupos, registradas a través de las soluciones presentadas en forma escrita y de algunas exposiciones orales.

Grupo 1

Representan los puntos dados en un sistema de ejes coordenados ortogonales del espacio.

Plantean $Aréa(OAB)=\frac{b.h}{2}=4$. Calculan $\left|\overline{OA}\right|$ y lo toman como el valor de b (base) y calculan después el valor de h.

Luego dibujan una recta en el espacio determinada por los puntos O y A y un vector $\overline{n}=(a,b,c)$ normal a la misma, al que asocian con la altura. Plantean a continuación $\overline{OA}\times\overline{n}=0$, por considerar que la altura es perpendicular a la base y obtienen, sin ellos saberlo, la ecuación de un plano que contiene al origen de coordenadas y es perpendicular a $\overline{OA}$ (no a $\overline{n}$)

La interacción del grupo con el docente les permitió reconocer la ecuación del plano, lo que implicó la construcción de un nuevo conocimiento.

Cuando se les preguntó si $\overline{n}=(a,b,c)$ puede tener cualquier módulo, responden que no, que el módulo tiene que ser igual al valor calculado para h.

La condición $\left|\overline{n}\right|=\frac{4\sqrt{6}}{3}$ (se tomó el origen de $\overline{n}$ coincidiendo con el punto O) se tradujo en una ecuación de segundo grado en tres variables. El movimiento de un bolígrafo en el espacio los llevó a reconocer que la ecuación obtenida correspondía a una esfera de radio r, igual a la altura. Los puntos del plano en común con la esfera, fueron reconocidos como puntos de una circunferencia centrada en O y radio r y como soluciones al problema.

De este modo el grupo, con la colaboración del docente, logró visualizar algunas soluciones pero no a todas ellas.

Grupo 2

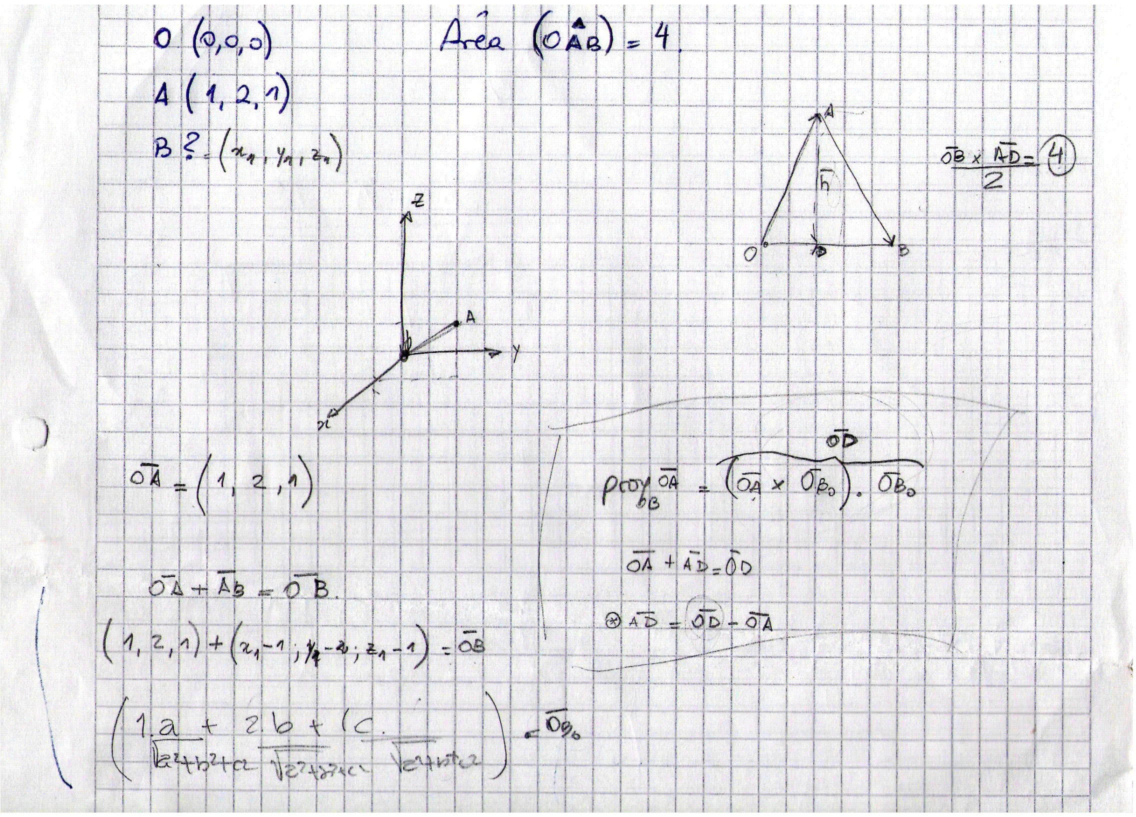
La elaboración del grupo sugiere que trabajaron divididos en dos subgrupos. Por un lado plantean correctamente $\left|\overline{OA} \wedge \overline{OB}\right| = 8$. Cuando calculan el producto vectorial lo igualan a 8.

En el siguiente paso corrigen el error anterior, igualando a ese valor el módulo del vector. Obtienen correctamente la ecuación del lugar geométrico, pero no reconocen haber encontrado la solución al problema. En su creencia de la existencia de única solución proponen encontrar otras dos ecuaciones análogas (cambiando los pares de vectores) para construir un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas. La dificultad algebraica no les permite avanzar en el cálculo.

Los miembros del otro subgrupo, atendiendo a una cultura matemática que han ido construyendo a lo largo de su escolaridad, buscan encuadrar la solución remitiéndose al cálculo del área de un triángulo conociendo su base y su altura.

A tal fin proponen obtener el vector $\overline{OD}$ = $\overline{proy_{\overline{OB}}\overline{OA}}$. De este modo el vector $\overline{OD}$ quedaría expresado en función de las coordenadas del punto B, que se desconocen.

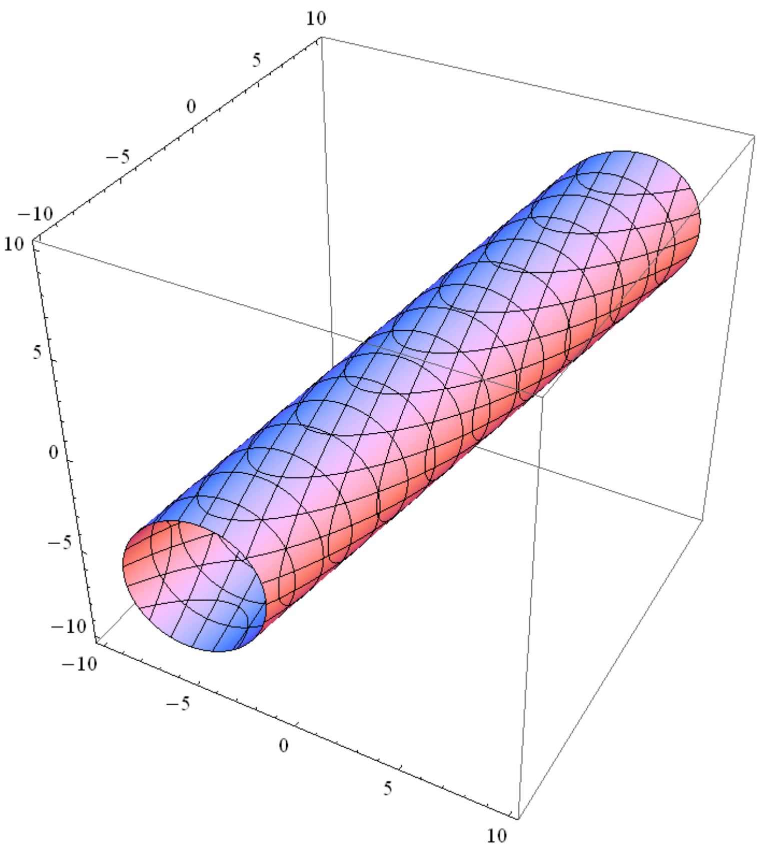
A través del planteo de $\left|\overline{OB}\right| . \left|\overline{AD}\right|$ = 8, lograrían una ecuación del lugar geométrico pedido, cosa que no alcanzan a obtener por la complejidad del cálculo implicado.



Grupo 3

Plantean $\dfrac{\left|\overline{OA} \wedge \overline{OB}\right|}{2} = 4$, operan algebraicamente y obtienen la ecuación del lugar geométrico, al que no logran identificar. No aparecen indicios que les permita interpretar geométricamente lo operado algebraicamente.

Cuando los miembros de este grupo graficaron en el laboratorio de Informática la ecuación obtenida, lograron, a partir de la gráfica, la visualización de la ubicación del vértice B para satisfacer las condiciones del problema.



Grupo 4

Se observa que sus integrantes tienen ideas que no pueden llegar a concretar por falta de manejo analítico. Sugieren que las soluciones del problema son puntos de un plano perpendicular a $\overline{OA}$ y lo dibujan conteniendo al punto A. Obtienen algunos resultados parciales que no pueden relacionar.

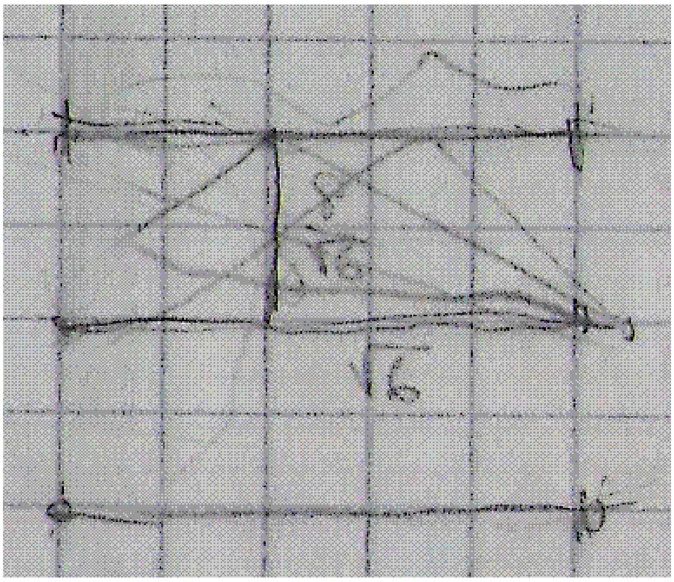
Grupo 5

Plantean $\dfrac{\overline{OA} \wedge \overline{OB}}{2} = 4$. Calculan el producto vectorial en función de las coordenadas de B y luego igualan a 8 al módulo de dicho vector, subsanando el error inicial. Obtienen así la ecuación del lugar geométrico de los puntos del espacio que cumplen con la condición establecida en el problema. Determinan además el valor de la altura correspondiente al segmento $\overline{OA}$.

Luego concluyen que los puntos se encuentran sobre "*el perímetro de una figura formada por un cilindro de radio* $\frac{4\sqrt{6}}{3}$ *formado a partir de la recta* $\overline{OA}$".

La gráfica que esbozan sugiere que la superficie cilíndrica es acotada con una altura igual a $\left|\overline{OA}\right|$, hecho que se corrobora en la charla con el grupo.

Su creencia errónea deriva de su historia escolar, donde el concepto de cilindro aparece en relación al cálculo de un volumen y no en la consideración de una superficie.



Grupo 6

Consideran el segmento $\overline{OA}$ como la base del triángulo y calculan correctamente el valor de la altura correspondiente a la base. Concluyen que la solución es cualquier punto perteneciente a una recta paralela a $\overline{OA}$ que se encuentra a una distancia de $\frac{4\sqrt{6}}{3}$.

Después, esbozan un dibujo que sugiere una superficie cilíndrica sin hablar específicamente de tal superficie.

No operan algebraicamente.

Grupo 7

Aparecen distintos intentos de encarar el problema a través de "fórmulas estancas". No relacionan los distintos resultados obtenidos y no obtienen soluciones al problema.

Grupo 8

Calculan $|\overline{OA}| = \sqrt{6}$ que consideran la medida de la base del triángulo y determinan la medida de la altura correspondiente a dicha base.

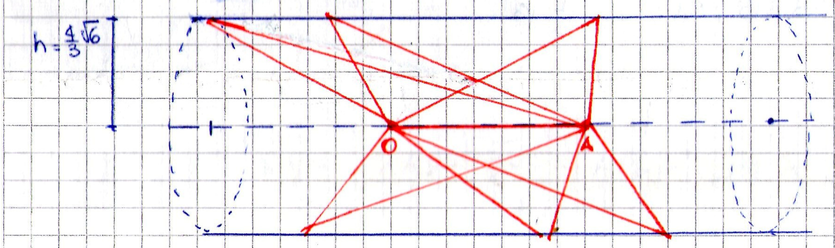
Realizan la representación gráfica de un cilindro de radio igual al valor de la altura calculada y reconocen que los puntos de dicha superficie cilíndrica satisfacen las condiciones del problema.

De este modo la resolución comienza por el enfoque geométrico, para luego obtener la expresión analítica del lugar geométrico, planteando $\dfrac{|\overline{OA} \wedge \overline{OB}|}{2} = 4$.

También proponen resolver analíticamente el problema planteando que la distancia de B a la recta determinada por los puntos O y A sea $\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$.

La resolución que plantean pone de manifiesto la habilidad para convertir un problema de un sistema semiótico de representación a otro.

La articulación de diferentes representaciones de conceptos matemáticos se considera fundamental para el aprendizaje de la matemática.



Se debe encontrar una ecuación que describa la ubicación de los puntos que pertenecen al cilindro con radio $\frac{4}{3}\sqrt{6}$ siendo su eje la recta que contiene al vector $\vec{OA}$. Es decir los puntos que disten $\frac{4}{3}\sqrt{6}$ unidades de dicha recta.

$$\frac{|\vec{OA} \wedge \vec{OB}|}{2} = 4 \quad ; \quad B(x, y, z) \Rightarrow \vec{OB} = (x, y, z)$$

$$\vec{OA} \wedge \vec{OB} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (2z - y \,;\, x - z \,;\, y - 2x)$$

NOTA

Grupo 9

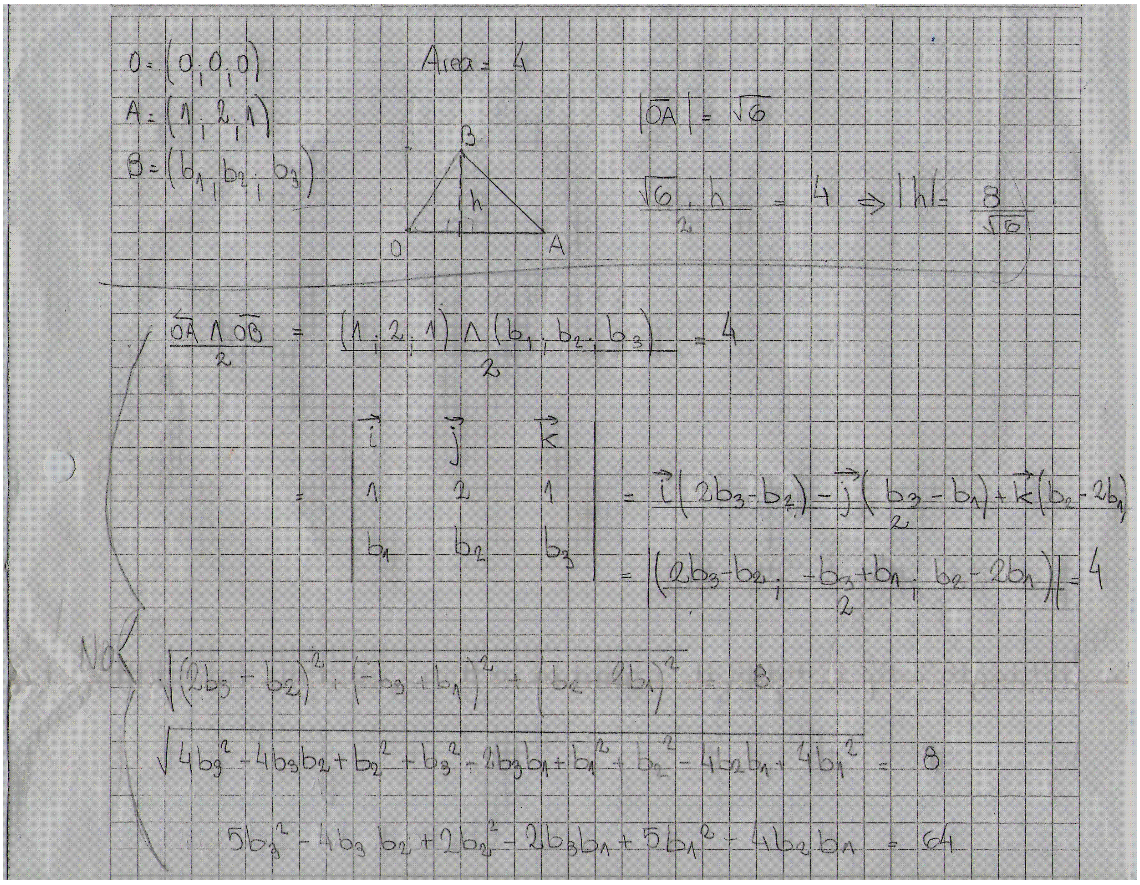
Por un lado plantean $\frac{\overline{OA} \wedge \overline{OB}}{2} = 4$, aunque después calculan el módulo del producto vectorial. Sin embargo al desarrollar el cálculo del módulo no igualan a 8 lo que no les permite obtener una ecuación sino sólo una expresión.

Luego introducen la condición $\left(\overline{OA}, \overline{OB}\right) = 90º$ para obtener un triángulo rectángulo y tomando $\left|\overline{OA}\right|$ como la base, calculan la altura correspondiente.

Grupo 10

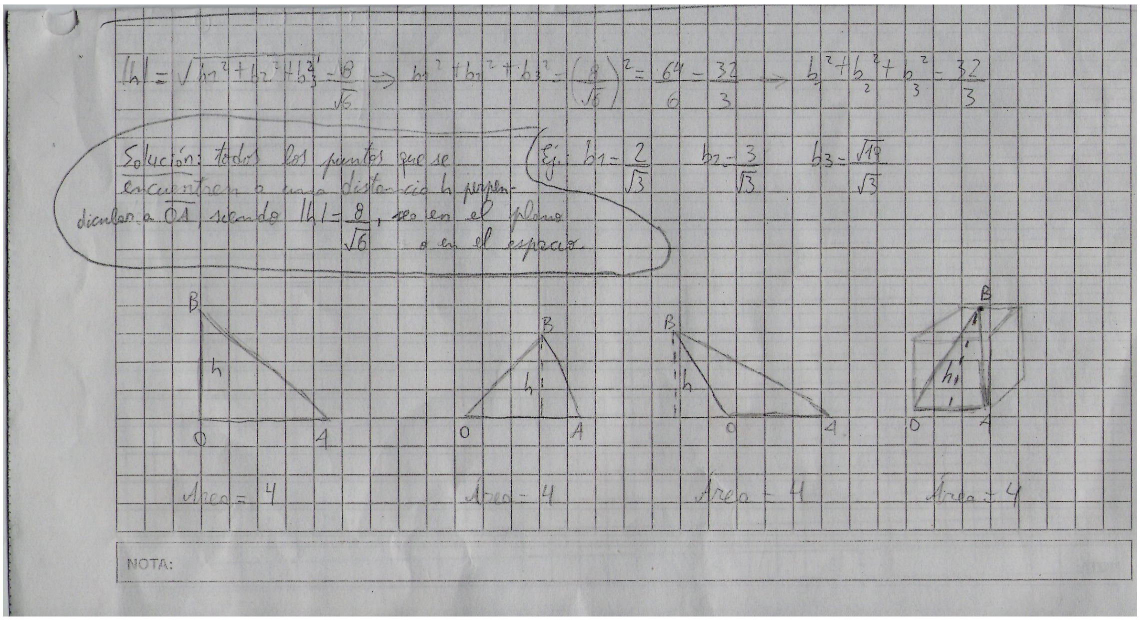
Calculan correctamente la altura (h) del triángulo.

Plantean $\frac{\left|\overline{OA} \wedge \overline{OB}\right|}{2} = 4$, operan algebraicamente y obtienen la ecuación del lugar geométrico aunque la desestiman por “no obtener las coordenadas de un punto”.



Luego se replantean la búsqueda de soluciones y muestran no sólo tres posibles soluciones en un mismo plano, sino también sugieren, mediante un gráfico, que hay otras fuera de ese plano.

Finalmente sostienen que: “*la solución son todos los puntos que se encuentran a una distancia h perpendicular a* $\overline{OA}$*, siendo h =* $\frac{8}{\sqrt{6}}$*, en el plano o en el espacio*”.



Conclusiones

En primer término queremos señalar la disposición favorable de los estudiantes para trabajar en forma colaborativa y la potencialidad que supone una actividad desarrollada alrededor de la resolución de un problema.

Los estudiantes a través de su trabajo, no sólo fueron portavoces de sus posturas y creencias, sino también de una cultura matemática que han ido construyendo a lo largo de su escolaridad, aportando de este modo valiosos elementos para enriquecer la tarea pedagógica del docente.

La comunicación de las resoluciones de algunos grupos no sólo favoreció la capacidad de escucha, también dio lugar a preguntas, acotaciones, intercambio de ideas; con lo cual se logró aprendizajes enriquecidos.

La resolución del problema posibilitó el establecimiento de lazos entre los conceptos y los procedimientos que se relacionan con dichos conceptos. De este modo el aprendizaje se hizo más significativo, se logró una mejor integración del conocimiento y comprensión de los conceptos.

Consideramos que actividades como la descripta deben ocupar un mayor espacio en el trabajo del aula por cuanto permiten explorar y analizar los razonamientos que ponen en juego los estudiantes al resolver un problema, ofreciendo de este modo elementos para actuar didácticamente y contribuir a la superación de las dificultades que se identifican o creencias erróneas que emergen. Tal es el caso del grupo de estudiantes que al pretender referirse a una superficie cilíndrica no pueden desligarse del cilindro circular con tapas, objeto de estudio para calcular su volumen en los niveles de escolaridad previa a la universitaria, y dar lugar al concepto de superficie cilíndrica como una superficie no acotada. En caso de persistir estas creencias erróneas encontraríamos otras dificultades en la construcción de nuevos conocimientos.

También observamos que un importante porcentaje de alumnos igualan un vector con su módulo, como si éste fuera el único elemento que lo caracteriza. Interpretamos que ese error deriva de la dificultad de transitar de los segmentos a los segmentos orientados. Los estudiantes están habituados a asociar el segmento con su medida.
Cuando hablamos del radio de una circunferencia, ¿estamos haciendo referencia a un segmento o a un número positivo que es su medida?
¿Son estas imprecisiones del lenguaje gravitantes en los aprendizajes?
En el caso señalado, en que los estudiantes igualan un vector con su módulo el error se corrige en los pasos siguientes, pero consideramos que debe prestarse mucha atención al lenguaje que se utiliza. En numerosas circunstancias el significado atribuido a un concepto por parte de un estudiante difiere del pretendido concepto que busca instalar el docente. De ahí la importancia de crear espacios donde los estudiantes puedan explicitar sus creencias y afloren sus interpretaciones.
¿No es la resolución de un problema y la posterior comunicación de los resultados que se obtienen un medio propicio para construir nuevos conocimientos en un marco donde el docente logre información sobre la forma en que los estudiantes interpretan, organizan y utilizan ciertos conceptos?

Referencias Bibliográficas

- Pérez Echeverría, M. (1994), “ La Solución de Problemas en Matemáticas” (Capítulo 2) en La solución de problemas. Coord: J. I. Pozo. Madrid, España. Aula XXI/Santillana.

- Zimmerman, W; Cunningham, S. (1991), “Visualization in Teaching and Mathematics” MAA Nº19