LAS CLASES DE CÁLCULO Y LOS PROBLEMAS NO ESPERABLES.
UNA EXPERIENCIA ÁULICA.

Introcaso, B., Braccialarghe, D., Emmanuele, D., González, M.I.

Grupo GIEM Rosario, Dpto. de Matemática, Escuela de Formación Básica – Facultad de Cs. Exactas, Ingeniería y Agrim. Universidad Nacional de Rosario. Av. Pellegrini 250, 2000 Rosario (Santa Fe).

RESUMEN

En este trabajo se analizan las dificultades de los estudiantes de primer año de las carreras de Ingeniería al enfrentar la resolución de problemas que no consideran "esperables" en función de su experiencia escolar. Se observa que las ideas que los alumnos traen sobre la Matemática están ligadas a una rigidez que los hace pensarla como una ciencia acabada y perfecta, donde siempre se espera obtener un resultado exacto para cualquier tipo de problema que se plantee. Contrariamente, no se respeta la precisión en cuanto al lenguaje. Finalmente, se propone que el tema de los problemas "no esperables" sea parte de la currícula, en vista de su importancia para afrontar situaciones cotidianas o relativas a la futura labor profesional de los estudiantes.

Palabras clave: problema – motivación – simbología

INTRODUCCIÓN

Este trabajo se lleva a cabo en el marco del proyecto "*La significación de los contenidos conceptuales en la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo en las carreras de Ingeniería y Agrimensura"* que desarrollamos en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Rosario. En este contexto hemos realizado estudios tendientes a indagar las causas del generalizado fracaso de los estudiantes de primer año de las carreras de Ingeniería en las materias de Cálculo. Pensamos que una de estas causas es la idea que el alumno trae sobre la Matemática cuando ingresa a la Facultad. Esta idea constituye un obstáculo al iniciar el proceso de aprendizaje del Cálculo ya que el estudiante debe pasar de una Matemática estática, donde pocas veces (o ninguna) se trabaja con aproximaciones, errores, desigualdades, tendencias, estimaciones, a una Matemática dinámica en la que prevalecen las ideas de acercamiento, proximidades, cotas.

Es innegable la importancia de los contenidos del Cálculo en la formación de los estudiantes de Ingeniería. Pero también es importante que los mismos sean aprendidos de manera significativa. Es decir, de modo que el alumno recurra a ellos para resolver problemas concretos que se presenten en situaciones cotidianas o en su futura labor profesional. Muy probablemente estos problemas tengan que ser resueltos en forma aproximada, o requieran de una estimación para su resolución.

El trabajo muestra la falta de solvencia de un grupo de estudiantes para enfrentar situaciones como las descriptas. Por un lado, en relación a la clase de problemas que son “esperables” para el alumno en función de su experiencia escolar. Por otro, en cuanto al valor de los símbolos y la capacidad del alumno para discernir si está trabajando en forma exacta o aproximada.

Respecto de esta clase de problemas que llamamos “esperables”, Vicente et al. (2008) mencionan que varios autores han analizado las reglas y presupuestos ocultos que gobiernan (implícita o tácitamente) la interacción docente-alumno al enfrentar la resolución de problemas. Entre estos presupuestos se destacan:

– Todo problema presentado por el docente o por el libro de texto puede resolverse y tiene sentido.
– Cada problema tiene una única respuesta correcta, y ésta es precisa y numérica.
– La solución de cada problema puede y debe obtenerse ejecutando una o más operaciones aritméticas con los números del problema, y casi con toda seguridad con todos ellos.
– La tarea puede realizarse con las herramientas matemáticas que han aprendido como estudiantes, en la mayoría de los casos aplicando los conceptos, fórmulas, y algoritmos expuestos en las clases de Matemática más recientes.
– La solución final, e incluso algún resultado intermedio, implica números “limpios” (generalmente números enteros pequeños).
– El problema por sí mismo contiene toda la información necesaria para generar la interpretación matemática correcta y llegar a su solución de modo que no debe buscarse información “extraña”.
– Las personas, objetos, lugares y razonamientos son diferentes en los problemas de Matemática de la escuela que en las situaciones del mundo real, por lo que no hay que preocuparse demasiado si la situación propuesta por el problema viola los conocimientos previos o las intuiciones basadas en las experiencias cotidianas.

De acuerdo con nuestra experiencia, existe una opinión, generalmente aceptada, de que la Matemática es una ciencia puramente deductiva, es decir que sus conclusiones se obtienen a partir de ciertas proposiciones o enunciados básicos (axiomas), empleando para ello los razonamientos que reglamenta la lógica deductiva. Esta idea, que es parcialmente cierta, lleva a considerar a la Matemática como acabada y perfecta, y donde siempre se espera obtener un resultado exacto para cualquier tipo de problema que se plantee.

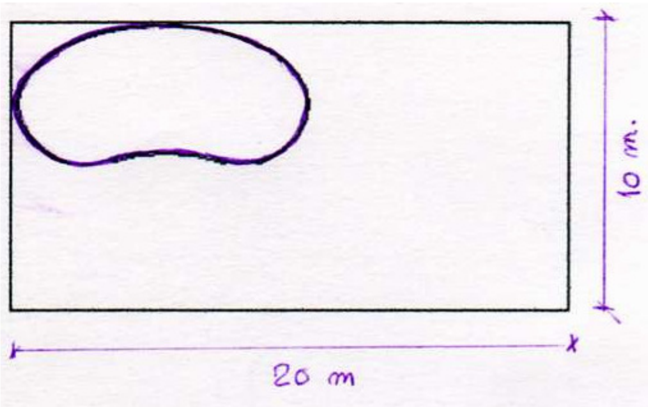
Para comenzar a indagar en el tema, propusimos un problema a alumnos ingresantes a carreras de Ingeniería, con la intención de analizar, por un lado, su actitud frente al mismo, y por otro su capacidad de diferenciar entre un cálculo exacto y uno aproximado.

DESCRIPCIÓN DE LA EXPERIENCIA

La experiencia se planteó a un grupo de alrededor de 60 alumnos ingresantes a carreras de Ingeniería de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario, en el marco de una segunda clase de Análisis Matemático I. En la primera se había realizado una introducción a los temas que trata el Cálculo, en un laboratorio de informática. La actividad se realizó en presencia de dos docentes.

Enunciado del problema

En un patio rectangular de 20 m por 10 m se construyó una pileta en forma de riñón ocupando un cuarto de la superficie del patio, y con una profundidad de 1 m.



(a) Si se sabe que con un litro de pintura se cubren aproximadamente 2 m^2 ¿Cuántos litros hacen falta para pintar la superficie de la misma?

(b) ¿Cuántos litros de agua hacen falta para llenar la pileta?

(c) Si la pileta se llena a razón de 1000 litros por hora ¿Cuánto tiempo llevará llenarla?

Se pidió a los alumnos que anotaran todo lo que fueran pensando en una hoja (una por grupo, sin nombre) que después entregarían.

Hubo un buen clima de trabajo. Los estudiantes se mostraron interesados en realizar la actividad. Ninguno se retiró.

Durante los primeros minutos la profesora contestó preguntas como:

¿Qué es una superficie?

¿ $1m^3 = 1l$?

¿Es lo mismo *área* que *superficie*?

Después de media hora se percibió desazón. En el aula había dos docentes que no tenían posibilidad de caminar por todo el salón y algunos grupos debían esperar para realizar alguna consulta.

En un momento la profesora fue a la tarima y trató de escuchar lo realizado por los grupos. Volvió a pedir que anotaran todo lo que fueran pensando.

Profesora: ¿Cuál es el área de la pileta?

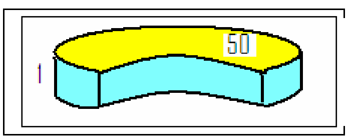
Un estudiante: Aproximadamente un cuarto de la superficie del patio.

Otro estudiante: Es exactamente un cuarto de la superficie del patio.

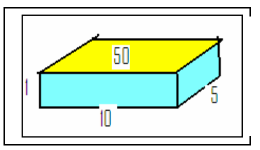
La profesora realizó el dibujo del patio y la pileta en el pizarrón. Sin embargo, muchos siguieron sosteniendo que el área era exactamente un cuarto de la superficie del patio porque así lo decía el enunciado del problema. Otros argumentaron que no debían guiarse por el dibujo sino por el enunciado.

Se diría que no les resultó fácil comprender el problema (cálculo del área lateral).

Casi todos los alumnos interpretaron que la pileta ocupaba una superficie cuya área era 50 m^2.

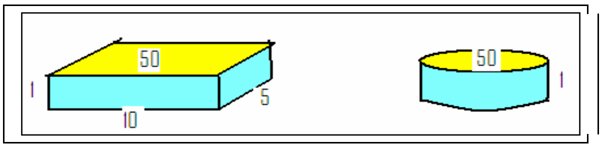


Algunos propusieron calcular el área lateral de la pileta considerando el paralelepípedo



ya que pensaban que: dos sólidos cuyas bases tienen la misma área tienen la misma área lateral.

Para poder analizar esta idea la profesora hizo el siguiente dibujo en el pizarrón



y pidió que calcularan el área lateral para que comprobasen que no era en general así. No realizaron el cálculo. No queda claro si se convencieron de esta idea.

Luego de esta aclaración se les volvió a pedir que siguieran trabajando y que anotaran las ideas que fueran teniendo.

Antes de cumplirse la hora los estudiantes dieron por concluida la actividad y entregaron.

ALGUNAS REFLEXIONES SOBRE LA ACTIVIDAD

Si bien el problema es aparentemente sencillo, de fácil lectura y relacionado con una situación factible, no es para los alumnos un problema “esperable” en una clase de Matemática.

Entre algunas de las situaciones que se plantean, podemos destacar la insistencia por parte de los alumnos en considerar al área de la base de la pileta como un cuarto de la del patio “porque así parece deducirse del enunciado”, independientemente de lo que su sentido común pudiera indicarles.

Aunque algunos pocos hayan intentado alguna forma de aproximación al resultado, la pregunta generalizada fue: “finalmente, ¿cómo se hacía?”, desestimando absolutamente sus propios ensayos y buscando una “respuesta exacta”.

Es decir, su actitud frente al problema fue de incomodidad, ya que no se trataba de un problema “tipo” encuadrado en las pautas descriptas en la Introducción de este trabajo. Pareciera, además, que los alumnos no pueden reconocer que la realidad puede ser descripta de manera aproximada. En su trayecto por la escolarización no pudieron valorar puntos de vistas contrapuestos y complementarios como lo exacto y lo aproximado.

No sabemos concluyentemente si los alumnos confundieron una aproximación con un cálculo exacto (de hecho, al ser interpelados sobre este punto, admiten que sus cálculos eran aproximados independientemente de haber utilizado un signo “=”), pero sí es visible la falta de valoración de lo simbólico cuando expresan algo que debería ser semejante, “casi igual”, como rotundamente igual e idéntico. Es muy probable que esta desvirtuación haya sido favorecida (y hasta provocada) por el excesivo énfasis que se pone tanto en la Escuela Primaria como en la Media sobre un modo típico de resolución de problemas en Matemática que está relacionado, más que nada, con la aplicación de una fórmula o método algorítmico de cálculo, y muy poco, o nada, con la resolución de problemas a partir de la reflexión y de los conocimientos propios de los alumnos en ese estado, previo a la adquisición de un conocimiento posterior. Por ejemplo, ¿no es posible que a un alumno del secundario que desconoce el cálculo de áreas mediante el cálculo de integrales definidas se le preguntase por el área encerrada bajo la curva sinusoidal entre 0 y $\frac{\pi}{2}$? Claramente esto no se da en forma frecuente, por no decir que no ocurre. Por ello mismo este tipo de problemas no es "esperable" por el alumno, quien se desconcierta y se molesta ante este tipo de enunciados. Otro factor que aquí debemos tener en cuenta es que estos alumnos son producto de largos años de escolaridad donde lo que prima es hacer que los sujetos obedezcan y no que piensen en forma autónoma. En general, los profesores pretenden que el alumno resuelva el ejercicio que se le plantea como aplicación directa de lo enseñado en la clase, desestimándose cualquier otra respuesta que provenga de saberes propios del alumno (en donde el docente no intervino) o que provenga de una valoración propia del alumno a partir de los conocimiento de que dispone. En este caso quien siente malestar es el docente, para quien lo que no es "esperable" es otro tipo de resolución distinta a la planificada. Y, en algunos casos si la resolución propuesta por el alumno difiere de aquella que es esperada por el docente, se desarticulan las estrategias didácticas de modo tal que ambos califican la experiencia como traumática e inservible.

CONCLUSIONES

La enseñanza de la Matemática en la Educación Media y en la Superior debe contribuir a desarrollar en los alumnos capacidades. Una de estas capacidades es la de elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y valorar la conveniencia de la elección de la misma en función de la situación a resolver. Advertimos que en general los alumnos están intentando resolver problemas "de Matemática" (más que problemas, a secas) y en este contexto se ven en la necesidad de encuadrar tanto la forma de resolución como la respuesta: por ejemplo, en el contexto del problema propuesto en este trabajo, si los estudiantes entienden que no podrán calcular la superficie lateral de la pileta en forma exacta, se paralizan. Parecería que este es el legado de la escuela en el ámbito de la Matemática: lo que debería ser algo natural se va perdiendo a medida que se escolariza. Como refiere Colmez (1979): "el aprendizaje de técnicas de solución de problemas bien catalogados, cuyo enunciado contiene ciertas palabras clave que permiten descubrir al alumno el mecanismo que debe aplicar, reduce al alumno al papel de un ordenador que debe aprender ciertos programas. Este concepto, lamentablemente, no ha desaparecido todavía; se sabe que a menudo conduce al bloqueo del alumno por miedo a no saber qué hacer, y que lo deja desarmado el día que se encuentra frente a un problema no programado". La resolución de un problema como el planteado en este trabajo es seguramente natural y sencilla fuera del ámbito de una clase de Matemática.

Así como la Geometría se algebrizó, la Matemática toda se "endureció", adquirió una rigidez que, de hecho, no es propia de la Matemática. Sí, en todo caso, de su lenguaje. Es decir: adquirió rigidez donde no debía: la Matemática debe ser precisa en el uso de los símbolos, en aquello que debe comunicarse.

Actualmente parece haber consenso entre los docentes sobre la importancia de que la Geometría vuelva al aula, como promotora del razonamiento lógico, de la orientación en el espacio, como indispensable para describir, analizar y comprender el mundo. De la misma manera, consideramos muy significativo que se trabajen la capacidad de estimar y la posibilidad de resolver problemas reales en forma aproximada.

Algunos libros proponen problemas motivadores (situaciones de la vida real acompañadas de cuestiones exploratorias) seleccionados de acuerdo a un observado interés del alumno (ver, por ejemplo, un problema motivados al Capítulo de Límite en el libro de Larson et al. (1999) en el Apéndice). Son también problemas de los que hemos calificado como "no esperables" y su resolución no requiere de la aplicación directa de una fórmula o algoritmo. Tampoco necesariamente se espera que haya una respuesta numérica. En ocasiones presentan cuestiones cuya respuesta queda en suspenso.

Consideramos que introducir este tipo de problemas en las clases puede generar situaciones de intranquilidad tanto para docentes como para alumnos. Sin embargo, debemos destacar el interés que los alumnos mostraron a la hora de encarar la resolución del problema, y animarnos entonces a proponer este tipo de situaciones, que seguramente constituyen una buena forma de luchar contra los presupuestos descriptos en la introducción, y lograr que los temas que se estudian en los cursos de Cálculo sean significativos para el alumno. Citando al Polya (1960), lograr que el alumno "esté dispuesto a revisar cualquiera de sus creencias (coraje intelectual), a cambiarla cuando exista una razón para ello (honestidad intelectual) y a no modificar frívolamente una creencia sin que haya alguna buena razón (sabia contención)."

REFERENCIAS

- Colmez, F. 1979. *Nuevas tendencias en la enseñanza de la matemática*, volumen IV, Capítulo 1, UNESCO, Montevideo.

- Larson, R., Hostetler, R., Edwards, B. 1999. *Cálculo y Geomtría Analítica* Vol. 1 (6º Ed.). Mc Graw Hill, Buenos Aires.
- Polya, G. 1960. *Matemáticas y razonamiento plausible*, Tecnos. Madrid.
- Vicente, S., Van Dooren, W. y Verschaffel, L. 2008. *Utilizar las matemáticas para resolver problemas reales.* Cultura y Educación Vol. 20 Nº 4 pp. 391-406.

Apéndice – Capítulo 1 (Larson et al., 1999, p. 46)

MOTIVACIÓN DEL CAPÍTULO

¿Cuánta altura?
¿Cuánta velocidad?

Extracto del artículo «How High? How Fast?», *Newsweek*, de Sharon Begley y Adam Rogers, 22 de julio de 1996. Copyright © 1996, Newsweek Inc. Derechos reservados. Reproducido bajo autorización.

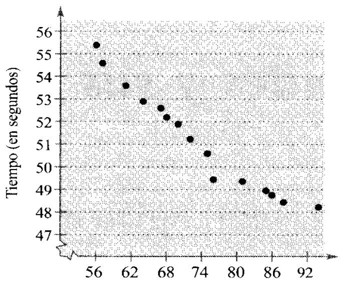
Observemos más de cerca la marcha de los récords. La cadencia decreciente salta a la vista. El récord del mundo en los 400 metros libres femeninos, por ejemplo, ha caído más de dos minutos —un 33 por 100— desde 1921 (6:16.6) hasta 1976 (4:11.69). En los siguientes 20 años, sólo ha bajado ocho segundos, hasta los 4:03.85 de Janet Evans en los Juegos Olímpicos de Seúl de 1988. Si marcara los récords del mundo en un papel, obtendría curvas que parecen aproximarse asintóticamente a un límite, acercándose a él más y más pero sin llegar nunca a alcanzarlo. Es como si las curvas fueran pequeños imanes con polaridad sur y el límite una barra con polaridad norte impuesta. Pero, ¿cuál es el límite?

Llevando al límite la velocidad de natación

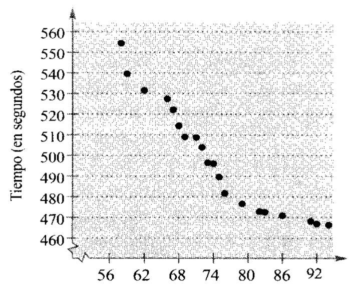
Una ojeada a las marcas establecidas en diversos deportes a lo largo del siglo pasado muestra que los humanos continúan corriendo más rápido, saltando más alto y lanzando más lejos cada vez. ¿A qué se debe?

Uno de los factores es el entrenamiento. Los psicólogos están trabajando para identificar los sistemas del cuerpo humano que limitan el rendimiento y crear técnicas de entrenamiento que desarrollen esos sistemas. Del mismo modo, los psicólogos del deporte trabajan con individuos y miembros de equipos para ayudarles a desarrollar el «flujo» mental que les permita alcanzar el rendimiento óptimo. Más aún, los entrenadores han ideado mecanismos para controlar los cuerpos de los atletas y proporcionarles mucha más información sobre su propio rendimiento que la que era disponible hace apenas veinte años.

El equipamiento también se ha perfeccionado notablemente a lo largo de los años. En algunos deportes el avance es evidente. Las bicicletas son más ligeras y aerodinámicas que nunca. La mejora de las pistas ha elevado la velocidad de los corredores, y las pértigas de aluminio han incrementado drásticamente la altura de los saltos. Incluso deportes como la natación, sin equipamiento aparente, se han beneficiado de la tecnología. El afeitado del vello corporal recortó en un segundo las marcas de los nadadores de 100 metros libres masculinos, y se espera que los nuevos tipos de bañadores reduzcan el rozamiento y mejoren aún más las marcas. Las dos nubes de puntos en la página siguiente muestran los sucesivos récords mundiales (en segundos) en dos pruebas de natación masculinas.



Año (0 ↔ 1900)
100 metros libres



Año (0 ↔ 1900)
800 metros libres

En un artículo escrito para *Newsweek*, Sharon Begley y Adam Rogers cuestionaron los límites de la resistencia humana evidenciados por los récords mundiales en varios eventos deportivos.

CUESTIONES

1. A partir de esas nubes de puntos, ¿puede determinar en qué año comenzó la práctica del afeitado del vello corporal? Explique su razonamiento.
2. ¿En qué otros años piensa que pudo haber avances tecnológicos en la natación? Explique la respuesta.
3. ¿Cuál parece ser el tiempo límite en que un hombre es capaz de nadar los 100 metros? ¿Y los 800 metros? ¿Cómo lo ha determinado?
4. Copie las nubes de puntos y trace la curva que parece ajustar mejor los datos. ¿Qué tipo de ecuación cree que produciría la curva que ha dibujado?
5. Lea el extracto del *Newsweek* en la página anterior. ¿Qué quieren decir los autores con la expresión «acercarse asintóticamente a un límite»?