EXPLORACIÓN, CONSTRUCCIÓN Y CLASIFICACIÓN DE POLIEDROS

Martinez, Natalia y Götte, Marcela.
Docentes de la Facultad de Humanidades y Ciencias (UNL)

RESUMEN

En este trabajo se expone la implementación de una actividad perteneciente a una secuencia didáctica de geometría sintética en tres dimensiones acerca de los poliedros regulares y los sólidos arquimedianos. Si bien, la propuesta se basa en la ampliación del conocimiento de los alumno acerca de los sólidos convexos utilizando materiales concretos y software de geometría dinámica para su construcción; en esta presentación se adjunta una síntesis de la fundamentación y el desarrollo del estudio; su análisis didáctico y las conclusiones parciales en referencia a la primera actividad de la secuencia.

PALABRAS CLAVES: poliedros, construcción, clasificación

1. INTRODUCCIÓN

Los poliedros son entes geométricos que se destacan en distintos contextos como: en matemáticas, arquitectura, ingeniería, química y artes. Su presencia se impone en forma de templos, puentes, arcos, modelos de moléculas, gemas, esculturas, diseño gráfico, publicidad, decoración, paisajismo, coreografías, arreglos navideños y otras formas.

Aprender a observarlos y construirlos no sólo debe ser una experiencia alentadora y fascinante, sino que puede ser aprovechada para el desarrollo de actividades matemáticas que involucren la actividad demostrativa.

Con estos propósitos, hemos creado una secuencia didáctica que permite la exploración del mundo poliédrico desde la comparación de los sólidos regulares y los poliedros arquimedianos. En el desarrollo de esta experiencia se les exige a los alumnos poner en práctica la actividad demostrativa en un contexto favorable para la visualización y manipulación de los poliedros. Este ambiente propicio de trabajo se da gracias a la incorporación de materiales y recursos que facilitan la exploración del mundo poliédrico.

2. FUNDAMENTACIÓN

“Se ha dicho que la mejor forma de aprender sobre los poliedros es construirlos y después, observarlos, compararlos, transformarlos y modificarlos” (Guillén Soler, 1997, p. 11).

Teniendo presente esta observación nos propusimos la elaboración de una secuencia didáctica, que no sólo permita ampliar los conocimientos de los alumnos acerca de los poliedros, sino que además les ofrezca la oportunidad de construir la definición de los sólidos arquimedianos.

“La actividad de clasificar es una de las características esenciales de cualquier rama del pensamiento humano y, en particular, una actividad fundamental de las matemáticas” (Guillén, 1997, p.23). Es así que, en primera instancia, nuestra intención es, que mediante la observación de ciertos modelos de sólidos, los alumnos se involucren en una posible clasificación según el cumplimiento de sólo dos de las tres condiciones que forman la definición de poliedro regular convexo.

Analizando la bibliografía consultada hemos decidido definir a un poliedro regular o platónico como aquel poliedro convexo que cumple las siguientes condiciones:

(1) sus caras son polígonos regulares

(2) sus caras son iguales

(3) sus ángulos poliedros son iguales

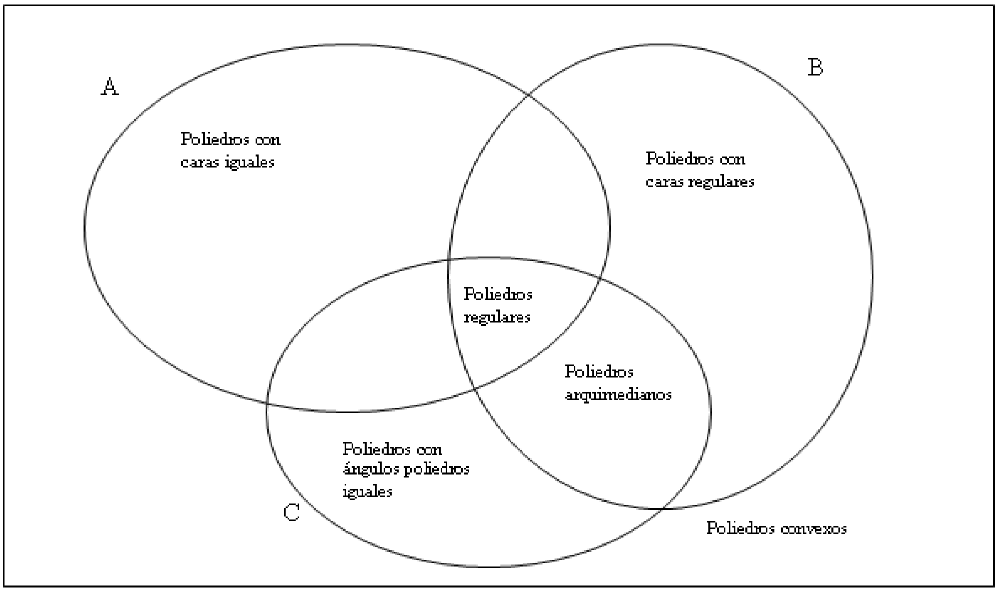
Si consideramos como universo a los poliedros convexos y definimos los siguientes conjuntos:

A= {poliedros convexos con caras iguales}

B= {poliedros convexos con caras regulares}

C= {poliedros convexos con ángulos poliedros iguales}

Utilizando un diagrama de Venn, tenemos:



Mediante la observación de las intersecciones de los conjuntos y sus complementos se logra la exploración y clasificación de sólidos mediante ciertas características en común.

Por ejemplo, podemos considerar a los poliedros regulares convexos o sólidos platónicos como aquellos que pertenecen a los tres conjuntos a la vez, es decir, aquellos que pertenecen a $A \cap B \cap C$.

De manera similar, se forja la definición de poliedros arquimedianos "sólidos que tienen todas las caras regulares y todos los vértices iguales" (Guillén, 1997, p. 111) como los poliedros convexos que pertenecen a los conjuntos B y C pero no a A, es decir, los que pertenecen a $B \cap C \cap \overline{A}$.

Para la exploración y construcción de los sólidos, la secuencia se encuentra apoyada alrededor de lo que Rico (2000) llama organizadores. Si bien, el organizador que más se destaca es el denominado: materiales y recursos, se encuentra mayor presencia de materiales didácticos que "se distinguen de los recursos porque inicialmente, se diseñan con fines educativos" (Coriat, 2000, p.159), estos son el Polydron y el software Cabri 3D.

Uno de los objetivos de esta secuencia es caracterizar y clasificar los procedimientos desarrollados por los alumnos para explicar y validar sus producciones. El fin de la caracterización de los procedimientos de validación, es observar si las exploraciones empíricas que ofrecen la manipulación del software y de materiales, afecta al tipo de demostración realizada. Cabe destacar que los alumnos con los que se lleva a cabo las actividades, han desarrollado mecanismos de demostración basados en la argumentación de las construcciones.

Para la clasificación de los procesos de validación, "utilizaremos el término *demostración* en un sentido amplio, de modo que incluya cualquier tipo de argumento o justificación elaborado para convencer de la veracidad de una afirmación matemática" (Rodriguez, 2006, p. 22)

En acuerdo con Samper Caicedo, Camargo Uribe y Perry Carrasco (2006), la demostración es una actividad que combina dos procesos relacionados:

1- El proceso conformado por acciones tendientes a producir una conjetura

2- El proceso conformado por acciones tendientes a producir una justificación.

Esta clasificación y sus subniveles, es una teoría muy desarrollada y estudiada por Samper y su equipo de investigación; la cuál será utilizada como base para la caracterización de los procesos de validación de los alumnos, cuestión que es obviada en este documento debido a que están fuera de los fines del mismo.

3. DESARROLLO

Cada una de las actividades de las que consta la secuencia se lleva a cabo en las clases de la Cátedra de Geometría Euclídea Espacial (año 2010) del profesorado en Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral. Actualmente, el grupo posee 19 alumnos.

Esta materia consta de 3 clases semanales de una duración de 2 horas cada una, estos módulos corresponden a la teoría, la práctica convencional y la práctica en Cabri 3D. Los módulos utilizados para el desarrollo de esta secuencia son los de práctica convencional y práctica en Cabri 3D.

Debido al origen de los datos necesarios para llevar a cabo el estudio en cuestión se presenta el dilema de la selección de las herramientas de recolección de información que cumplan el rol de brindar de manera, lo más fehaciente posible, los procedimientos llevados a cabo por los alumnos en la resolución de las actividades.

En un primer momento se consideró la posibilidad de tener acceso a las producciones de los alumnos, pero las resoluciones de los alumnos brindan el producto final de la tarea realizada y no son suficientes evidencia acerca de los procedimientos llevados a cabo por los estudiantes para obtener dicha solución.

Frente a esta situación se resolvió repartir a los estudiantes “cuadernos de notas”, en los que se pedirán que escriban todas aquellas resoluciones, demostraciones informales, justificaciones sobre las decisiones tomadas y construcciones (si están hechas en Cabri se pedirá el nombre del archivo) que le permitieron arribar a la verdadera solución de la actividad.

Además, para sistematizar, ordenar y estructurar la recolección de la información en las computadoras, se creó una dirección de correo electrónico en la que los alumnos deben enviar los archivos cuyo nombre contengan numeración que haga referencia al orden de creación de los mismos.

Finalmente para complementar la recolección de información se pidió permiso a los alumnos para efectuar la grabación y filmación de las conversaciones y discusiones grupales que lleven a la elaboración de las resoluciones.

La secuencia consta de las siguientes actividades, para ser resueltas en grupos de no más de 3 integrantes:

Actividad I

Se define poliedro regular o platónico al poliedro convexo que cumple las siguientes condiciones:

- sus caras son polígonos regulares (1)
- sus caras son iguales (2)
- sus ángulos poliedros son iguales (3)

Utiliza el Polydron[1] y realiza ejemplos de poliedros convexos que cumplan sólo dos de esas condiciones.

[1] El Polydron es un material didáctico formado por un conjunto de polígonos de distintos tamaños realizados en plástico que poseen bisagras para unirse y formar poliedros. Los tipos de polígonos que lo forman son: triángulos equiláteros (dos tamaños), triángulos isósceles acutángulos, triángulos isósceles rectángulos, cuadrados, rectángulos, pentágonos regulares, hexágonos regulares, octógonos regulares.

Describe los poliedros construidos (número de caras, aristas vértices, tipo de caras, número de aristas que concurren en un vértice, etc.).

Actividad II

1- Construir un tetraedro regular.

Trazar un plano por los puntos medios de las aristas.

Determinar y justificar cuál es la sección producida por ese plano en el tetraedro.

Considerar todos los casos.

2- Realizar la actividad anterior con un octaedro regular.

Actividad III

Dibujar tres segmentos distintos a, b, c. Construir un ortoedro cuyos lados sean a, b, c. Con dos planos paralelos a una de sus caras dividirlo en tres paralelepípedos congruentes. La construcción debe resistir el arrastre

Actividad IV

Para esta actividad utilizarán el poliedro de acetato proporcionado, al que le llamarán poliedro inicial y los poliedros fabricados en cartulina a los que llamarán poliedro final[2].

En CABRI 3D, partiendo del poliedro inicial, obtengan cada sólido final. Describan y argumenten cada paso seguido para obtener el resultado pedido.

Una vez obtenido cada "poliedro final", construyan un esquema que organice para su comparación el número de caras, aristas y vértices de cada sólido trabajado. Respondan:

1- Según los datos recabados en la tabla, ¿pueden hallar alguna/as relación/es entre los números de caras, aristas y vértices del "poliedro inicial" y el "poliedro final"? Justifiquen adecuadamente.

2- El poliedro obtenido, ¿es convexo?, justifiquen; ¿cumple la relación de Euler?, verifiquen.

Atendiendo a las condiciones de la definición de poliedro regular y arquimediano, decidan si alguno de los sólidos truncados es arquimediano. Justifiquen adecuadamente su respuesta

3.1 Análisis didáctico de la propuesta

Por razones de espacio pautados para la entrega de este trabajo, decidimos adjuntar sólo el análisis didáctico de la primera actividad, como así también su desarrollo completo en la sección siguiente y la conclusiones parciales en el apartado 4.

3.1.1 Objetivos de la actividad I:

- Revisar la definición de poliedros regulares.

[2] Se entregará por grupo uno de los siguientes sólidos: Tetraedro regular, Cubo u Octaedro regular realizado en acetato transparente donde una de sus caras está abierta y según el poliedro regular entregado, tres poliedros truncados de cartulina, los cuales encajan en el de acetato, permitiendo conjeturar tipos y medidas de los cortes a realizar para obtenerlos. Tanto los poliedros regulares como los truncados son realizados por el docente a partir de los desarrollos planos obtenidos en el software.

- Promover la interpretación de sus condiciones mediante la búsqueda de ejemplos de poliedros que cumplan algunas de ellas.
- Introducir la definición de poliedro arquimediano y compararla con la de poliedro regular.

Al concluir la actividad se realiza una puesta en común de los resultados obtenidos y discusión de los mismos. Definiendo: *A los poliedros convexos que cumplen sólo las condiciones (1) y (3) de la definición de poliedro regular se los denomina Poliedros Arquimedianos.*

Una vez presentada la definición formal se discuten de manera oral los siguientes interrogantes: ¿Todo sólido regular es arquimediano?, ¿Todo sólido arquimediano es regular?

3.1.2 Procedimientos esperados

Posibles poliedros con caras polígonos regulares (1) e iguales (2) pero ángulos poliedros no iguales (3):

- No es posible construir un poliedro convexo con cuadrados ya que este cumpliría con las tres condiciones a la vez.

- Con triángulos equiláteros se pueden formar deltaedros que no sean el tetraedro, octaedro e icosaedro, porque estos cumplen las tres condiciones a la vez.

- Con pentágonos regulares no se puede ya que cumplen las tres condiciones a la vez.

- Con hexágonos regulares no se puede pues con tres en un vértice forman un ángulo de 360º, quedando en un mismo plano.

- Con octógonos regulares no se puede pues tres de ellos en un vértice suman un ángulo de 405º.

Posibles poliedros con caras polígonos regulares (1) y ángulos poliedros iguales (3) pero las caras no son iguales (2):

- Prismas con bases regulares (triángulo equilátero, pentágono regular, hexágono regular, octógono regular)[3] y caras laterales cuadrados. Se excluye el cubo, ya que este cumple las tres condiciones a la vez.

- Antiprismas con bases regulares (cuadrado, pentágono regular, hexágono regular, octógono regular) y caras laterales triángulos equiláteros. Se excluye el octaedro regular, ya que este cumple las tres condiciones a la vez.

- Sólidos arquimedianos, el octaedro truncado formado por hexágonos y cuadrados. El tetraedro truncado, el cuboctaedro, el cubo truncado, entre otros.

Posibles poliedros con caras iguales (2) y ángulos poliedros iguales (3) pero caras no regulares (1):

-Tetraedro no regular cuyas caras son triángulos isósceles acutángulos iguales.

[3] Sólo se consideran estos polígonos pues son los que se incluyen en el material disponible.

3.1.3 Posibles dificultades, errores o paradas

* Una de las posibles dificultades es que leyendo la consigna no adviertan que los sólidos a construir deben cumplir sólo dos condiciones, lo que llevaría la construcción de los sólidos platónicos como ejemplo de la actividad.

* Un posible obstáculo en la resolución de la actividad es en referencia a la condición 3, debido a la novedad del concepto de ángulo poliedro. Es posible que se construyan sólidos que no posean ángulos poliedros iguales.

* Es posible que no encuentren poliedros que cumplan sólo las condiciones 2 y 3 debido a las figuras que posee el Polydron.

* Es posible que construyan poliedros que no sean convexos.

3.2 Implementación de la Actividad I

La primera actividad, se llevó a cabo la semana del comienzo de las clases. Cabe destacar que los alumnos tenían como conocimientos previos los contenidos de la Geometría Euclídea Plana y escaso conocimiento de los elementos básicos de la Geometría Euclídea Espacial.

Debido a que en la consigna de esta primera actividad no se involucra el uso de Cabri 3D, la misma se realizó en la práctica convencional. Durante el desarrollo de la misma, se registró la clase en una cámara digital, a fin de recoger evidencia sobre la discusión grupal y la exposición de los ejemplos realizados por los alumnos.

Una vez, que los alumnos han podido construir ejemplares de los sólidos pedidos, se realizó una exposición oral guiada por la docente.

En el debate se exponen las razones que comprueban la pertenencia del sólido a la categoría para la cual fue construido.

Los poliedros construidos con caras polígonos regulares (1) e iguales (2) pero ángulos poliedros no iguales (3) son: poliedro cóncavo con caras triángulos equiláteros (dos octaedros unidos por una cara) (ver fotos 1 y 2) que aunque cumple las tres condiciones pedidas, no cumple con la convexidad. También se construyeron una bipirámide pentagonal (formada por dos pirámides pentagonales unidas por la base) con caras triángulos equiláteros y una bipirámide triangular (formada por dos pirámides triangulares unidas por la base) con caras triángulos equiláteros que cumplen con la consigna.

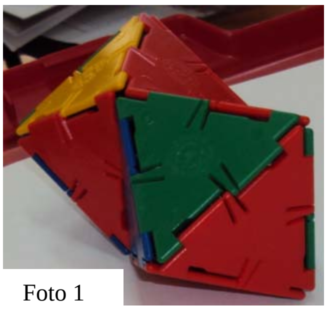


Foto 1

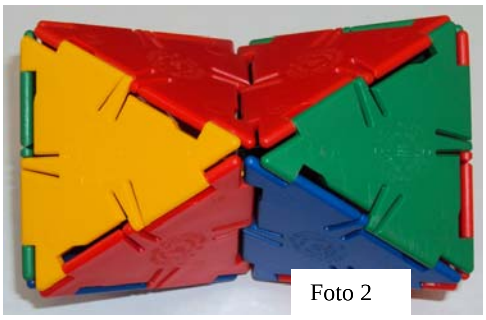


Foto 2

Los ejemplos construidos por los estudiantes con caras polígonos regulares (1) y ángulos poliedros iguales (3) pero las caras no iguales (2) son: un poliedro convexo cuyas caras son triángulos equiláteros y cuadrados pero que un ángulo poliedro está formado por triángulo-triángulo-cuadrado-cuadrado y otro por triángulo-cuadrado-triángulo-cuadrado, es decir, sus ángulos poliedros no son iguales (ver foto 3).

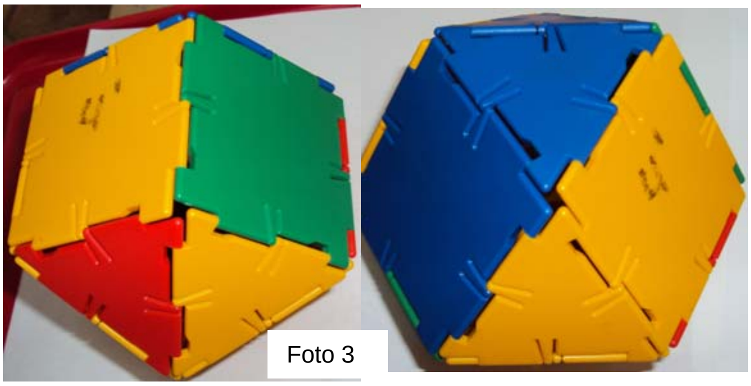


Foto 3

Otros poliedros construidos son: antiprisma cuadrangular (caras ocho triángulos equiláteros y dos cuadrados), prisma triangular y pentagonal (con caras regulares) y tetraedro truncado (caras cuatro hexágonos regulares y cuatro triángulos equiláteros) que cumplen las condiciones pedidas. (ver foto 4).

Foto 4

Los poliedros hallados por los alumnos con caras iguales (2) y ángulos poliedros iguales (3) pero caras no regulares (1) son: un octaedro no regular formado con triángulos isósceles rectángulos iguales (ver foto 6) donde un ángulo poliedro está formado por dos ángulos planos de 90º y dos de 45º y otro ángulo poliedro está formado por cuatro ángulos planos de 45º, por lo que no se cumple la igualdad de los ángulos poliedros. También presentaron otro octaedro no regular formado con triángulos isósceles acutángulos que tampoco respeta la igualdad de

Foto 5

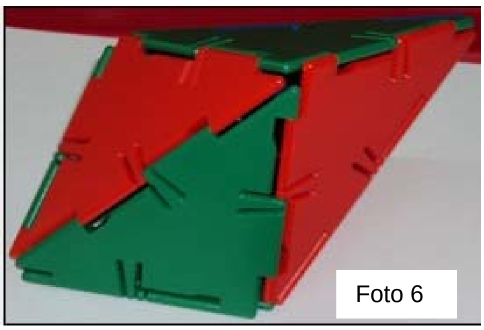


Foto 6

ángulos poliedros. Tres grupos presentaron un tetraedro formado por triángulos isósceles acutángulos (ver foto 5) que cumple todas las condiciones pedidas.

Los alumnos han podido construir poliedros que ejemplifican todas las categorías. La pertenencia o no de cada sólido a la categoría para la que fue construido es lo que se discutió en la exposición. A lo largo del debate fueron surgiendo cuestiones muy ricas acerca de los ángulos poliedros, como identificarlos, si se pueden medir, como compararlos.

Una vez, que los alumnos pudieron visualizar y manipular el concepto de ángulo poliedro para la comprobación de la igualdad de los ángulos poliedros de un sólido, se llevaron a cabo distintos procedimientos:

- La construcción con el material de casquetes que representaban un vértice del poliedro. Este casquete era superpuesto sobre cada uno de los vértices restantes, para comprobar empíricamente si los ángulos poliedros eran iguales entre si.
- Se identificaban los ángulos planos de los polígono con alguna medida en particular y se observaban que en cada vértice concurran los mismos “ángulos planos” en igual posición.

Estos procedimientos expusieron que algunos sólidos propuestos para ciertas categorías no cumplían con la condición de tener los ángulos poliedros iguales.

En los modelos construidos por los alumnos se encuentra un sólido arquimediano que surge de truncar al tetraedro. Se aprovechó esta situación para abordar su definición.

De cada uno de los ejemplos de sólidos convexos proporcionados por los alumnos se realizó la exposición del número de aristas, vértices y caras. En la mayoría de los casos los alumnos manifestaron haberlos obtenido contando en el sólido construido.

4. CONCLUSIONES PARCIALES

Una de las primeras apreciaciones que se puede realizar es que la manipulación del material didáctico juega un fuerte papel en la exploración de conceptos tridimensionales. En esta experiencia, esto queda reflejado en las cuestiones que surgieron alrededor del concepto de ángulo poliedro, que sirvió para que los alumnos puedan despejarse de incertidumbres respecto a éste.

El desarrollo de esta primera actividad permitió a los alumnos conocer un poco más acerca de los poliedros, algunas características y la denominación de algunos de los cuerpos construidos que surgen de ciertas clasificaciones de los poliedros convexos como por ejemplo: prismas, antiprismas, deltaedros, poliedros regulares y arquimedianos.

Además, se observa que a la hora de contar el número de vértices, aristas y caras de los modelos realizados, la mayoría de los alumnos se basaron en las construcciones para llevar la cuenta en lugar de aprovechar las características de los polígonos que formaban el poliedro, o de utilizar el Teorema de Euler.

Las mayores dificultades estuvieron en la comparación de los de los ángulos poliedros como era nuestra suposición dado que es un concepto nuevo para ellos.

5. BIBLIOGRAFÍA

- Camargo, L.; Samper, C. y Perry, P. (2006). Una visión de la actividad demostrativa en geometría plana para la educación matemática con el uso de programas de geometría dinámica. [Versión Electrónica]. *Lecturas Matemáticas.* Número especial. 371-383

- Coriat, M (2000). Los organizadores del Currículo de Matemáticas. En L, Rico (coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. (2° edición).(pp.155-177). Barcelona: Horsori.

- Guillén Soler, G. (1997) Poliedros. Madrid, Síntesis.

- Rico, L. (2000). Los organizadores del Currículo de Matemáticas. En L, Rico (coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. (2° edición).(pp.39-59). Barcelona: Horsori.

- Rodríguez Díaz, F. (2006). *Análisis de demostraciones en entornos de lápiz y papel y de Cabri por estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas.* Recuperado el 2 de Febrero del 2010, de SEIEM. Sitio Web: http://www.uv.es/aprengeom/archivos2/RodriguezGutierrez07.pdf