ENTRE LO EXACTO Y LO APROXIMADO. *Una experiencia áulica*

Braccialarghe, D., Emmanuele, D., González, M.I., Introcaso, B.

Grupo GIEM Rosario, Dpto. de Matemática, Escuela de Formación Básica – Fac.de Cs. Exactas, Ingeniería y Agrim.. Universidad Nacional de Rosario. Av. Pellegrini 250, 2000 Rosario (Santa Fe).

RESUMEN

En este trabajo se analiza, a través de una experiencia áulica, si el alumno de primer año de las carreras de Ingeniería es capaz de diferenciar simbólicamente lo que es igual de lo que es aproximado. A partir de las respuestas a un problema donde se pide calcular (o aproximar) áreas, encontramos que lo que los alumnos expresan simbólicamente no tiene en cuenta la diferencia entre igual y aproximado. Aunque consideramos que muy probablemente los alumnos sepan que la solución que formulan no es exacta, ellos no lo manifiestan. Pensamos que el origen de esta falta de rigurosidad debe buscarse en la experiencia que traen de su escolarización previa, tanto en lo que hace a una idea de la Matemática que no admite aproximaciones (miradas como ambigüedades), como en su "costumbre" de encontrar problemas en los que los resultados sean siempre números "limpios" (generalmente números enteros pequeños).

Palabras clave: experiencia áulica – el símbolo igual – aproximación

INTRODUCCIÓN

Este trabajo se lleva a cabo en el marco del proyecto "La significación de los contenidos conceptuales en la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo en las carreras de Ingeniería y Agrimensura" que desarrollamos en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Rosario. En este contexto realizamos un análisis de las dificultades de los estudiantes de primer año de las carreras de Ingeniería en las materias de Cálculo al enfrentar lo que consideramos problemas "no esperables" a pesar de ser problemas aparentemente sencillos, de fácil lectura y relacionados con situaciones factibles (Introcaso et al., 2010). A la par del objetivo central de ese trabajo, las respuestas permitieron detectar que los alumnos confundieron una aproximación con un cálculo exacto. A la luz de lo antedicho nos propusimos analizar si el alumno da, en general, valor a los símbolos (en especial nos centramos en el símbolo igual) así como su capacidad para discernir si está trabajando en forma exacta o aproximada.

El término aproximación es utilizado en cualquier contexto, pero en Matemática conlleva una idea precisa: se trata de sustituir un ente matemático por otro suficientemente 'próximo' al que se llama una “aproximación” del primero. La aproximación pasa a ser importante cuando avanza sobre la mera estimación para tener una idea del error.

Así mismo, nos planteamos una serie de cuestiones que han quedado abiertas pero que consideramos merecen ser analizadas. Por ejemplo:

- A pesar de existir un dominio del Análisis Matemático denominado Teoría de la Aproximación, cuyo objeto es la búsqueda de aproximaciones a funciones suficientemente generales mediante otras más sencillas (por ejemplo desde el punto de vista computacional), como las aproximaciones polinómicas, los splines, las aproximaciones racionales, las ondículas, etc., y a pesar de tener todas ellas numerosas aplicaciones en el ámbito de la Ingeniería, no es frecuente encontrar estos temas en el desarrollo de las materias de Cálculo.
- Los libros de Matemática en todos los niveles parecen, en general, soslayar la importancia de diferenciar entre una igualdad y una aproximación.
- En la escuela primaria se trabaja sobre la practicidad del cálculo mental para resolver operaciones exactas: se logra que el alumno realice cálculos exactos con rapidez a partir de la aplicación de propiedades de las operaciones (si tiene que resolver: 32500 – 19000 hará, posiblemente: 32500 – 20000 y le sumará 1000) pero esta situación es dejada de lado en la escuela media y por ende, no se profundiza para cálculos aproximados.
- Los docentes "acomodamos" los problemas para que las operaciones sean entre números enteros o racionales.
- El error en las mediciones parece dominio sólo de la Física; no es tenido en cuenta en el ámbito de la Matemática.
- Distanciamos lo real de lo matemático haciendo que decaiga la posibilidad de motivar al alumno con situaciones reales.

En este trabajo, y sólo con la intención de estudiar si los alumnos pueden discernir cuándo es posible realizar el cálculo de un área en forma exacta y cuándo es necesario apelar a una aproximación en virtud de la disponibilidad o no de datos y herramientas adecuadas, comenzamos proponiendo a alumnos ingresantes a carreras de Ingeniería la situación que se describe a continuación.

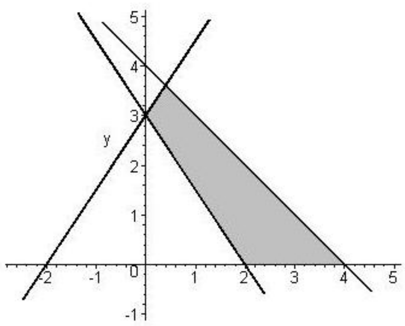
DESCRIPCIÓN DE LA EXPERIENCIA

La experiencia se planteó a dos grupos diferentes de alumnos: uno de alumnos de primer año de las carreras de Ingeniería Civil e Ingeniería Eléctrica de la Universidad Nacional de Rosario (grupo A); y otro de alumnos de primer año de la carrera de Ingeniería Química de la Universidad Tecnológica Nacional Regional Rosario (grupo B). Los trabajos fueron realizados por los alumnos sin intervención de los docentes y las respuestas fueron entregadas a los mismos. En el primer caso se contó con 20 resoluciones, y en el segundo con 26.

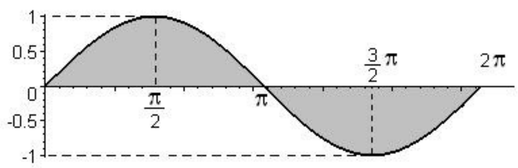
Enunciado del problema:

¿Podría calcular (o aproximar) el área de la región sombreada en cada caso?

(a)



(b)



Respuestas

Grupo A

Apartado a)

15 alumnos obtienen los valores que buscan midiendo la figura dibujada; 11 de ellos no aclaran que esto los lleva a obtener un valor aproximado.

1 alumno deduce las medidas de los lados de uno de los triángulos usando trigonometría, para después terminar aproximando el área (sin decir que se trata de una aproximación).

1 alumno busca los puntos de intersección de las rectas trabajando a partir de las ecuaciones de las mismas, y luego calcula el área en forma exacta.

3 alumnos no resuelven el problema.

Apartado b)

12 alumnos consideran que la región se trata de la unión de dos semicírculos: 8 de ellos dicen que los círculos son de radio 1 y 4 que son de radio $\frac{\pi}{2}$. De entre estos 12, 5 no aclaran que se trata de una aproximación y uno establece que $\pi = 180$. Uno de los que considera que el radio es $\frac{\pi}{2}$ explica: “Se puede observar en la gráfica que dicha función es la función seno. La gráfica del seno queda constituida luego de hacer varias operaciones con la circunferencia trigonométrica. Con lo cual puedo deducir que el área encerrada dentro de los semiciclos es el área de una circunferencia”

7 alumnos consideran que el área puede obtenerse a partir del área de triángulos; de entre ellos 3 no aclaran que se trata de una aproximación, y uno de ellos dice que los triángulos son de base 180 y altura 1 y expresa que el área del triángulo es 90 (agrega entre paréntesis π), pero como la otra es negativa el área total es 0.

1 alumno no responde.

Grupo B

Apartado a)

La mayoría de los grupos obtienen los datos a utilizar en el cálculo del área, midiendo sobre la figura o “intuyendo” valores.

Un grupo de alumnos busca el valor de los ángulos interiores y exteriores de la figura.

Un grupo de dos alumnas busca las ecuaciones de las rectas que contienen a los lados de la figura pero no concluyen.

En general todos los grupos dan una respuesta aproximada, pero sin aclarar que se trata de una aproximación. Utilizan el símbolo “=”.

Apartado b)

4 grupos expresan que se podría calcular de manera aproximada la superficie buscando la superficie de triángulos. En general confunden “igual” con “aproximado” cuando escriben que el triángulo **<u>es</u>** la cuarta parte de la superficie. 1 grupo obtiene el área de este triángulo (reemplazando $\frac{\pi}{2}$ por 0.78) y luego escribe que el resultado final es aproximado (dicha aproximación proviene de la desestimación de parte de la superficie pero no del redondeo efectuado). Otro grupo propone calcular el área del triangulo isósceles con vértice en $\frac{\pi}{2}$ y

luego sumarle la superficie de un semicírculo de radio 1. No es claro pero muestra idea de aproximar mediante el cálculo de áreas de figuras conocidas.

1 grupo escribe: “solución aproximada” y a continuación expresa: Área = ... sin tener en cuenta el valor del igual cuando lo escribe.

1 grupo utiliza integrales para decir que es la única manera de tener el valor del área

2 grupos contestan “no se puede“, no teniendo en cuenta que en el enunciado figuraba también la posibilidad de aproximar.

18 grupos no responden.

ALGUNAS REFLEXIONES SOBRE LAS RESPUESTAS

En general los grupos entienden que el área de la figura (a), delimitada por segmentos de recta, puede calcularse con los datos presentados. La mayoría de los alumnos presenta, sin embargo, una respuesta aproximada. Lo que expresan simbólicamente no tiene en cuenta la diferencia entre igual y aproximado: se redondean los valores de los ángulos, se calcula la longitud de algún lado de un triángulo utilizando el Teorema de Pitágoras expresando el mismo con decimales pero manteniendo el signo igual, consideran “a ojo” un valor entre 3 y 4 como 3,5 sin expresar que se trata de una aproximación. Consideramos que muy probablemente los alumnos que dan una solución al problema sepan que no se trata de una solución exacta, pero no lo manifiestan.

Destacamos además que dos grupos de alumnos adjuntan a cada medida una unidad de medida de longitud, mostrando la necesidad de posicionarse en las mismas para hablar de área o longitud.

Respecto del apartado (b), la mayoría del los alumnos del grupo A obtiene una respuesta aproximada (nuevamente, sin declarar que se trata de una aproximación), mientras que son muy pocos los alumnos del grupo B que encaran el problema. Es de destacar a partir de la identificación $\pi = 180$ se llega, naturalmente, a resultados absolutamente inadecuados, y esto no les llama la atención, enfatizando esta idea de su incapacidad para realizar estimaciones.

CONCLUSIONES

La comparación es un proceso psíquico básico. Comparar es encontrar las semejanzas entre las partes o cualidades de los objetos y, al mismo tiempo, establecer sus diferencias. El proceso de comparación se soporta en otros dos procesos psíquicos: el análisis y la síntesis. El análisis nos permite dividir o separar mentalmente el todo, en sus partes, en sus cualidades o en sus signos aislados. La síntesis es la combinación mental de las partes, cualidades o signos aislados en el todo. Estas tienen su origen en la actividad práctica.

No sabemos concluyentemente si en los alumnos el proceso de comparación ha sido completamente asimilado al proceso de identificación, aunque es notorio el abuso muy descuidado que hacen del símbolo =. Parecería que la forma de pensamiento que utilizan es la *semejanza* (figura que rigió el pensamiento y el saber del siglo XVI y aún principios del siglo XVII) como el hecho de que "la gráfica de la función seno se asemeja a la circunferencia", en lugar del *discernimiento* (que se establece como la forma de pensamiento en la época clásica, durante el siglo XVII) (Emmanuele, 2009) ya que justamente no se preocupan en poner de manifiesto las diferencias existente entre las áreas de esas gráficas. Pero evidentemente no les "choca" el igual cuando representan: "π = 3.14". Sí les resulta absurdo, sin embargo: "2 + 2 = 3.98", lo que nos lleva a pensar en la posibilidad de analizar en futuros trabajos si el problema radica justamente en los irracionales.

Es muy probable que esta desvirtuación (aproximado es lo mismo que igual) haya sido favorecida (y hasta provocada) por el excesivo énfasis que se pone tanto en la Escuela Primaria como en la Media sobre un modo típico de resolución de problemas en Matemática que está relacionado más que nada con la aplicación de una fórmula o método algorítmico de cálculo, y muy poco, o nada, con la resolución de problemas a partir de la reflexión y de los conocimientos propios de los alumnos en ese estado, previo a la adquisición de un conocimiento posterior (Introcaso, 2010).

En trabajos previos (por ejemplo González et al., 2009) concluimos – entre otras cuestiones – que el alumno tiende a pensar en términos estáticos y no dinámicos (límite es frontera, tope, borde, final, valor máximo, una recta) y que no piensa, en general, en acercamiento o tendencia. Pensamos que hay una concepción general de la Matemática que le impide desarrollar una capacidad para estimar.

Como mencionan Vicente et al. (2008) existen presupuestos ocultos que gobiernan (implícita o tácitamente) la interacción docente-alumno al enfrentar la resolución de problemas, y entre ellos están que "cada problema tiene una única respuesta correcta, y ésta es precisa y numérica”, y que “la solución final, e incluso algún resultado intermedio, implica números “limpios” (generalmente números enteros pequeños)”.

En función de poder “devolver al alumno la iniciativa” y la capacidad de proponer resultados provisionales, consideramos importante que las aproximaciones, el estudio de procesos convergentes y divergentes, la capacidad de analizar la precisión del trabajo, ocupen un lugar en las clases de Análisis Matemático de las carreras de Ingeniería.

Por último queremos dejar sentada nuestra idea: consideramos que el acento puesto en los aspectos excesivamente numéricos y formales de la aritmética, da lugar a una visión de la misma que no es la real, y que el acomodar los problemas reduciendo el campo de los números con que trabajamos no permite visualizar la utilidad del aprendizaje de los mismos.

REFERENCIAS

- Emmanuele, D. “La matemática y las ciencias humanas en el triedro de los saberes de Foucault”. En CD-ROM Congreso de Filosofía. Conmemoración del Primer Congreso Nacional de Filosofía 1949-2009. Fac de Filosofía y Letras. U.N de cuyo. Septiembre de 2009. ISBN 978-950-774-175-3.
- González, M.I., Introcaso, B., Braccialarghe, D., Emmanuele, D. 2009. *¿Tenemos en cuenta los docentes los conocimientos e ideas previas de los alumnos? Un estudio contextualizado al Análisis Matemático de una variable*. Reunión de Educación Matemática (Unión Matemática Argentina), Mar del Plata (Argentina), Septiembre de 2009. Publicado en Revista de Educación Matemática (FAMAF – UNC) en línea en http://www.famaf.unc.edu.ar/rev_edu/documents/vol_25/prop_13.pdf
- Introcaso, B., Braccialarghe, D., Emmanuele, D., González, M.I. 2010. *Las clases de cálculo y los problemas no esperables. Una experiencia áulica*. 4ª Jornada de Educación Matemática FCEIA-IPS, Rosario (Argentina), Junio de 2010.
- Vicente, S., Van Dooren, W. y Verschaffel, L. 2008. *Utilizar las matemáticas para resolver problemas reales.* Cultura y Educación Vol. 20 Nº 4 pp. 391-406.