CÓMO DIVIDIR EN ÁREAS IGUALES.
Un problema de la vida cotidiana

RESULTADO DE UNA EXPERIENCIA
Articulación Universidad - Escuela Media

D'Agostini, Viviana Paula dago@fceia.unr.edu.ar
(Profesora de Enseñanza Media y Superior en Matemática. FCEIA - IPS)

Demti, Graciela Viviana demti@fceia.unr.edu.ar
(Profesora de Enseñanza Media y Superior en Matemática. FCEIA)

Pérez, Mariana del Valle mperez@fceia.unr.edu.ar
(Profesora de Enseñanza Media y Superior en Matemática. FCEIA)

Resumen

La resolución de problemas es uno de los principales objetivos del proceso de aprendizaje, dado que implica un conocimiento en acción.

En el presente artículo, se discuten los procesos de resolución de un problema de la vida cotidiana, de naturaleza geométrica, no rutinario, y presentado con un estilo narrativo. Mediante un estudio exploratorio, se analiza la resolución efectuada por una muestra de 120 estudiantes ingresantes a las carreras de ingeniería, buscando identificar las estrategias que los estudiantes desarrollaron para resolver el problema y la forma en que comunicaron la solución, como así también los posibles sesgos en la interpretación de premisas y las características que orientaron su razonamiento.

Palabras Claves

Problema - Aprendizaje - Geometría - Cotidiano - Narrativo

I. Introducción

Un problema es aquel cuya solución no es evidente, no surge por aplicación directa de ningún resultado conocido, sino que para resolverlo es preciso poner en juego conocimientos diversos, matemáticos o no, y buscar relaciones nuevas entre ellos; permite múltiples enfoques y genera diversas soluciones; posee el criterio de relevancia: vínculo entre la situación propuesta y el mundo real.

Los problemas no rutinarios generan obstáculos a los estudiantes, y requieren de un pensamiento tanto crítico como creativo.

El texto narrado, que emplea principalmente un lenguaje coloquial, tiene una correspondencia más cercana a la experiencia cotidiana que los textos técnico-expositivos.

El proceso de resolución de problemas activa el conocimiento previo, con lo cual facilita el nuevo aprendizaje; integra el conocimiento de distintas disciplinas e imita las maneras de transferirlo a situaciones del mundo real, logrando un aprendizaje más significativo, y por ende, más fácil de recordar; permite al estudiante aprender sobre su propio proceso de aprendizaje y aumenta la capacidad para procurar un aprendizaje autónomo; incrementa los niveles de comprensión y provoca satisfacción por el logro obtenido.

George Pólya, matemático pionero en esta temática, plantea la Resolución de Problemas (*Método de los Cuatro Pasos)* como una serie de procedimientos que, en realidad, utilizamos y aplicamos en cualquier campo de la vida cotidiana. Para resolver cualquier tipo de problema definimos las siguientes cuatro etapas:

- Lectura e interpretación del problema:

En este paso es fundamental que el estudiante entienda “todo” lo que dice el problema, y si fuera necesario que lo replantee con sus propias palabras. Que distinga los datos (numéricos o no) necesarios para la resolución, de los datos superfluos que no aportan nada. Que analice las condiciones del problema y toda la información contenida (si es suficiente, no redundante ni contradictoria). Que tenga bien claro cuáles son las incógnitas y a dónde pretende llegar.

- Búsqueda de un plan:

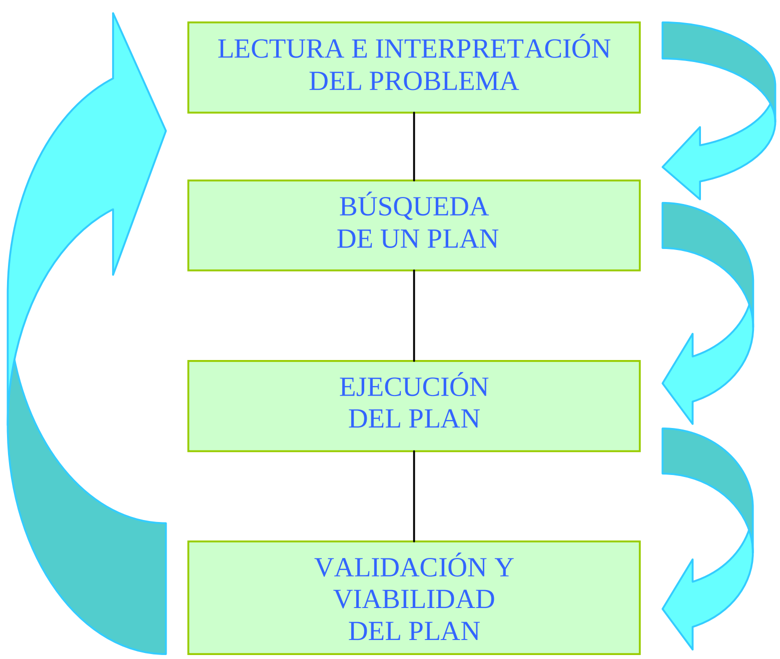
Una vez que el estudiante tiene claro de que datos dispone y a dónde quiere llegar, puede concebir un plan en base a recordar problemas similares que haya resuelto, determinando si la forma de resolución de esos problemas análogos o bien sus resultados se pueden utilizar en esta situación; buscando relaciones con otros resultados útiles, definiciones, teoremas y propiedades; subdividiendo el problema en sub-problemas más simples; haciendo un esquema de la situación que le ayude a visualizarla y/o a tener en vista los casos posibles.

- Ejecución del plan:

En esta etapa el estudiante implementa la o las estrategias que escogió (planteo de ecuaciones, fórmulas, propiedades, simetrías) hasta solucionar completamente el problema o hasta que la misma acción le sugiera tomar un nuevo curso. Es importante que examine todos los detalles y que distinga la diferencia entre percibir que un razonamiento o paso es correcto y por otro lado, poder demostrar que es correcto.

- Validación y viabilidad del plan:

En esta última fase, llamada también *visión retrospectiva*, es muy importante que el estudiante se detenga a observar qué fue lo que hizo; que interprete la solución propuesta, como así también el método utilizado, y reflexione si es correcta y si tiene forma de validarla, si es un caso particular o uno general, si hay otras soluciones posibles y si alguna es más simple; si es viable en cuanto a si satisface los requerimientos del problema. Este paso permite una retroalimentación para resolver futuras situaciones: Pólya plantea que cuando se resuelve un problema (que es en sí el objetivo inmediato), también se están creando habilidades posteriores para resolver cualquier tipo de problema, y tanto la solución como el método utilizado pueden convertirse en una nueva herramienta.



II. Método

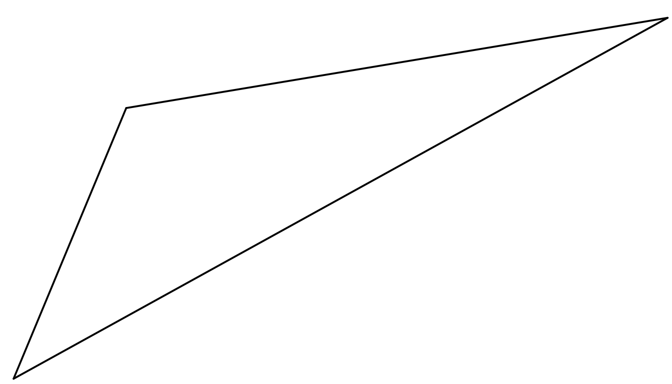
Sujetos: Los participantes eran 120 estudiantes, que asistían al curso de ingreso 2010 de las carreras de ingeniería de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario y que participaron de la experiencia en forma voluntaria.

Los estudiantes pertenecían a cuatro comisiones: comisión 1 (24 estudiantes), comisión 7 (36 estudiantes), comisión 11 (37 estudiantes) y comisión 14 (23 estudiantes).

Diseño de la investigación: Cabe describir al presente estudio como exploratorio. Su objetivo es explorar los patrones de razonamiento y las estrategias que los estudiantes desarrollan para resolver el siguiente problema:

Raúl les dijo a sus cuatro nietos que había estado cortando el pasto de su jardín, pero como estaba muy cansado no había terminado y les pide entonces que terminen de cortar el sector restante. Cuando los chicos se dispusieron a hacer el trabajo, se encontraron con un sector triangular.

Disponiendo de una soga que alcanza para cubrir cuatro veces el perímetro del sector, ¿cómo hicieron los chicos para dividirse el trabajo por igual?



Se presentó el problema[1] impreso en una hoja a los estudiantes; se les solicitó que resolvieran individualmente el mismo y que subrayaran las palabras del enunciado que creyeran relevantes para su resolución. Se les pidió, además, que escribieran "todo" lo que pudieran. Ningún docente presente intervino ni interactuó con ningún alumno en su resolución. Tuvieron 30 minutos para realizar esta tarea.

Cabe destacar que el curso dedica un capítulo a geometría donde se repasan los conceptos (ya dados en el colegio) necesarios para la resolución del problema planteado.

[1] El problema está basado en un enunciado similar del libro *Matemática 2*. (Amenedo, M. y otros)

Primeramente, en dos de las comisiones (1 y 7, con un total de 60 estudiantes) se presentó el problema sin gráfico (en noviembre de 2009) y posteriormente, en las otras dos (comisiones 11 y 14, sumando también 60 estudiantes) se planteó el problema con el gráfico de un triángulo escaleno en una posición no tradicional (en febrero de 2010), que representa el sector triangular involucrado en el mismo.

III. Análisis y Resultados de la Experiencia

Realizaremos el análisis de la resolución del problema de acuerdo a las cuatro etapas definidas anteriormente.

- **Lectura e interpretación del problema**. El trabajo a realizar debe dividirse por igual entre cuatro chicos, por lo tanto se desea que cada uno corte el césped de una región de igual área que el resto, disponiendo de una soga para fraccionar el terreno.

Se detalla en la siguiente tabla las palabras claves subrayadas por los estudiantes.

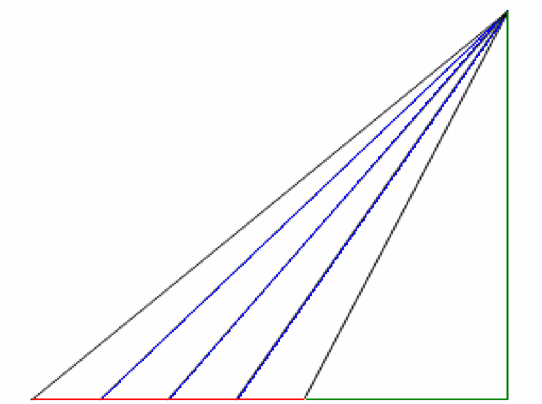
Tabla 1

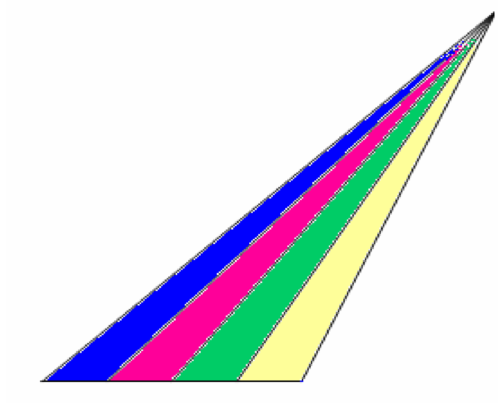
Palabras subrayadas	Comisión 1 (24 estud.)		Comisión 7 (36 estud.)		Comisión 11 (37 estud.)		Comisión 14 (23 estud.)		Total	
	Nº de estud	% de estud	Nº de estud	% de a estud	Nº de estud	% de estud	Nº de estud	% de estud	Nº de estud	% de estud
cuatro nietos	12	50	18	50	20	54.05	13	56.52	63	52.50
sector triangular	10	41.66	16	44.44	22	59.45	17	73.91	65	54.17
cuatro veces el perímetro	13	54.16	14	38.88	24	64.86	17	73.91	68	56.67
trabajo por igual	3	12.49	4	11.11	13	35.13	8	34.78	28	23.33
sector restante	1	4.16	3	8.33	6	16.21	2	8.69	12	10.00
una soga	4	16.66	3	8.33	10	27.02	11	47.83	28	23.33
cortando	1	4.16	0	0	0	0	0	0	1	0.83
estaba muy cansado	0	0	0	0	1	2.70	0	0	1	0.83
terminen de cortar	0	0	0	0	0	0	1	4.34	1	0.83
NINGUNA PALABRA	7	29.16	17	47.22	4	10.81	4	17.39	32	26.67

- **Búsqueda de un plan**. En base a la interpretación que el estudiante haya hecho sobre el problema buscará resultados similares, esquemas, relaciones que le permitan acercarse a la resolución del mismo, visualizando los casos posibles.

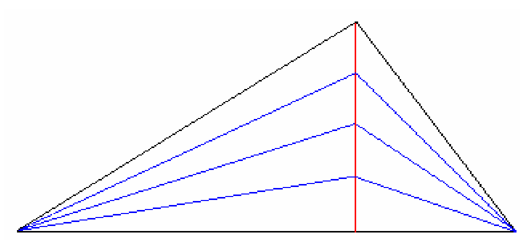
- **Ejecución del plan**. A continuación se presentan todas las estrategias de resolución válidas planteadas por los estudiantes.

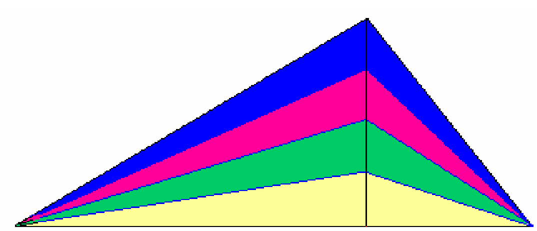
Estrategia 1: Tomando la soga se mide la longitud de un lado del terreno triangular. Se divide esa longitud en cuatro partes iguales y se las marca en el terreno. Los chicos pueden usar la soga, desde el vértice opuesto hasta la base para delimitar el sector que le toca cortar el césped a cada uno, armando cuatros triángulos que tienen igual área, ya que tienen la misma base porque así se construyeron y la misma altura.



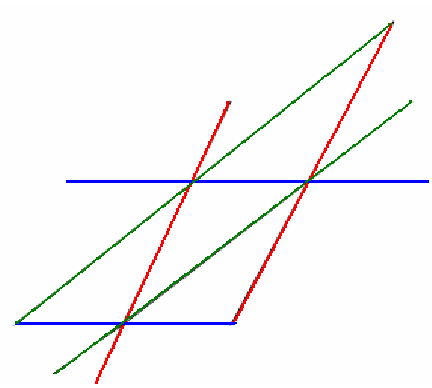


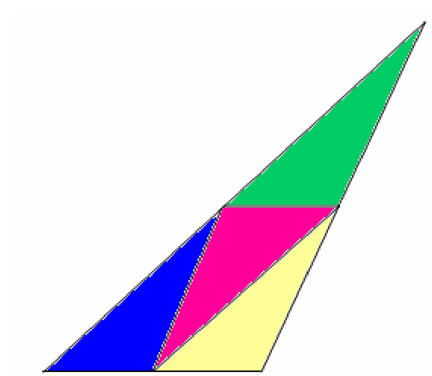
Estrategia 2: Con la ayuda de la soga se traza una altura del triángulo y se la divide en cuatro partes iguales, desde cada vértice se arman cuatro triángulos que resultarán de igual área.



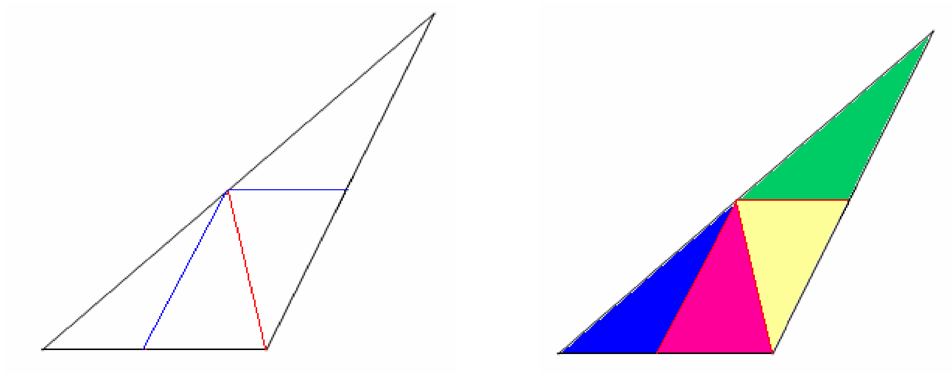


Estrategia 3: Se traza por el punto medio de un lado del triángulo las rectas paralelas a los otros dos lados. Y luego la recta paralela al primer segmento (al que se le tomó el punto medio) que pasa por el punto medio de alguno de los otros dos lados, (cualquiera ya que pasará por ambos puntos medios); proyección paralela de una recta sobre otra. Obteniendo:

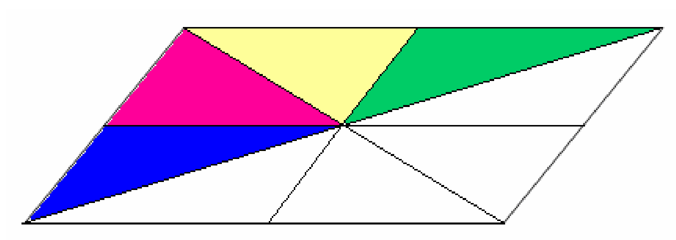




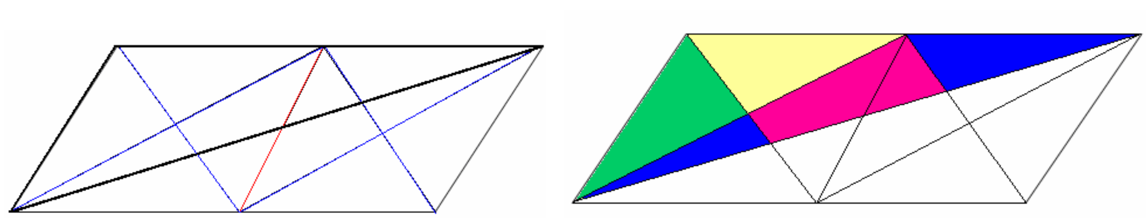
Estrategia 4: Unir un vértice al punto medio del segmento opuesto y luego unir este punto con los puntos medios de cada uno de los otros dos lados. Los cuatros triángulos en los que quedó dividido el terreno tienen igual área.



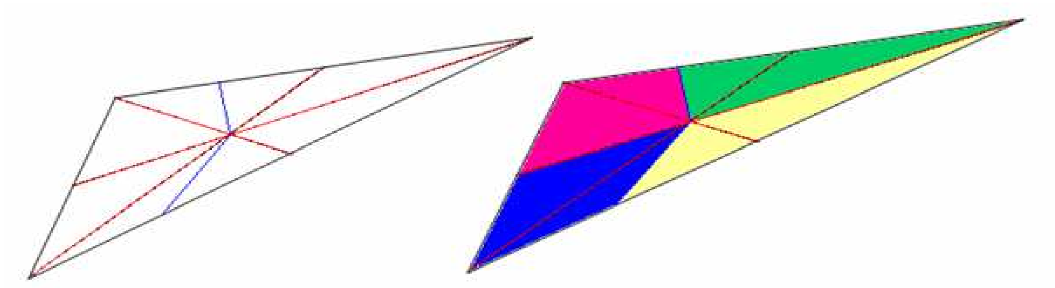
Equivalentemente se construye un paralelogramo a partir del triángulo dado, se trazan las diagonales y las rectas paralelas a cada lado que pasan por el punto en el que se cortan las diagonales (cortarán a los lados en su punto medio), resultando:



Estrategia 5: Dado el triángulo armar un paralelogramo. Desde el punto medio de uno de los lados trazar el segmento paralelo a los otros dos lados. Trazar las diagonales de los dos nuevos paralelogramos formados.



Estrategia 6: Con la soga unir cada vértice con el punto medio del lado opuesto (medianas). Luego unir el punto medio del segmento mitad de un lado con el punto de intersección de los tres segmentos trazados al principio y repetir desde otro lado del triángulo, resultando:



Notar que las estrategias 1 y 3 dividen el sector triangular en regiones triangulares; mientras que las estrategias 2 y 6, en suma de regiones triangulares. En cambio en la estrategia 5 las regiones no son todas triangulares.

Categorías: Las siguientes tablas muestran los resultados obtenidos al analizar las distintas resoluciones de los ingresantes según las categorías descriptas a continuación.

Tabla 2

Enunciado con Gráfico (60 estudiantes)					
Categorías				**Nº de estudiantes**	**% de estudiantes**
1- Planteo solo matemático				10	16.67
2- Relación confusa: perímetro y área				15	25
3- Estrategias erróneas	**a- Conceptos utilizados erróneamente**			6	10
	b- Estrategias no válidas			16	26.67
4- Estrategias válidas	**I) Caso general**	**a) Justifica**	**i) usa soga**	0	0
			ii) no usa soga	0	0
		b) No justifica	**i) usa soga**	3	5
			ii) no usa soga	8	13.34
	II) Caso particular	**a) Justifica**	**i) usa soga**	0	0
			ii) no usa soga	0	0
		b) No justifica	**i) usa soga**	1	1.67
			ii) no usa soga	1	1.67
5- Hoja en blanco				0	0
Total				60	100

Tabla 3

Enunciado sin Gráfico (60 estudiantes)					
Categorías				**Nº de estudiantes**	**% de estudiantes**
1- Planteo solo matemático				4	6.67
2- Relación confusa: perímetro y área				6	10
3- Estrategias erróneas	**a- Conceptos utilizados erróneamente**			2	3.33
	b- Estrategias no válidas			20	33.33
4- Estrategias válidas	**I) Caso general**	**a) Justifica**	**i) usa soga**	0	0
			ii) no usa soga	1	1.67
		b) No justifica	**i) usa soga**	6	10
			ii) no usa soga	9	15
	II) Caso particular	**a) Justifica**	**i) usa soga**	0	0
			ii) no usa soga	0	0
		b) No justifica	**i) usa soga**	5	8.33
			ii) no usa soga	5	8.33
5- Hoja en blanco				2	3.33
Total				60	100

Categorías (Todas las categorías son excluyentes). El estudiante:

1) realiza algún cálculo matemático (plantea área, perímetro, etc.) sin indicar como realiza las mediciones y sin hacer mención del uso de la soga.

2) divide el perímetro en cuatro partes iguales (usando la soga) para repartir a cada chico, no quedando clara la relación entre los conceptos de perímetro y área.

3) presenta una estrategia errónea. Casos: a) Incorrecta utilización de un concepto (bisectriz, mediatriz, etc.). b) Estrategias no válidas y que no conducen a ninguna respuesta (Por ejemplo: tomar medidas del gráfico).

4) presenta alguna de las estrategias válidas para la resolución del problema, divididas en caso general o caso particular, justificándose el uso o no de la soga.

5) entrega la hoja en blanco.

- **Validación y viabilidad del plan**. Entendemos por *validación,* la justificación matemática que muestra que la estrategia ejecutada es correcta. Y por *viabilidad,* el relato del estudiante mostrando que bajo las condiciones del problema su estrategia es posible llevarla a cabo, en este caso con el uso de la soga.

A continuación se presentan datos y análisis ***sólo de las estrategias válidas*** implementadas por los estudiantes.

Tabla 4

Estrategias válidas (Con y sin gráfico)			**Nº de estud.**	**% de estud.**
I) Caso general	**a) Justifica**	**i) usa soga**	0	0
		ii) no usa soga	1	2.56
	b) No justifica	**i) usa soga**	9	23.07
		ii) no usa soga	17	43.58
II) Caso particular	**a) Justifica**	**i) usa soga**	0	0
		ii) no usa soga	0	0
	b) No justifica	**i) usa soga**	6	15.38
		ii) no usa soga	6	15.38
Total			39	100

De los 120 ingresantes, 39 realizaron alguna estrategia válida (32.50 %).

La cuarta, de las cuatro etapas planteadas para la resolución de problemas, no la completó ningún estudiante. Sólo un ingresante valida su estrategia pero no su viabilidad.

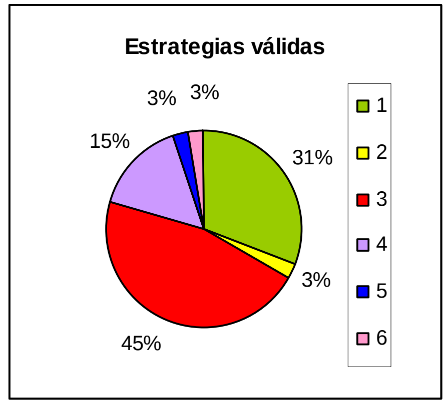
De los estudiantes que analizaron un caso general y no justificaron, (el 65.38%) no verificó la viabilidad del problema mediante el uso de la soga.

De los ingresantes que realizaron un caso particular ninguno justificó; la mitad de éstos no menciona el uso de la soga y el resto sí.

De los 39 estudiantes: 26 pertenecen al grupo sin gráfico y 13 a los que tenían gráfico; realizaron un caso particular el 25.64 % que no tenían gráfico (10 estudiantes) y el 5.12 % que sí tenía gráfico (2 estudiantes). Se evidencia que la mayor cantidad de casos particulares aparecen en los que no tenían gráfico.

Tabla 5

Estrategias válidas	Nº de estudiantes Etapas 1, 2 y 3	Nº de estudiantes Etapa 4		Nº total de estudiantes
		Validación	Viabilidad	
1	5	1	6	12
2	1	0	0	1
3	13	0	5	18
4	2	0	4	6
5	1	0	0	1
6	1	0	0	1
Total	23	1	15	39



IV. Conclusiones y Reflexiones finales

Generalmente se trabaja con los mal llamados problemas que sólo requieren aplicación mecánica de un algoritmo de resolución. A los estudiantes les interesa obtener un resultado, sin verificar la coherencia de su respuesta; no analizan ni discuten estrategias.

De los 120 estudiantes que participaron en la experiencia sólo uno demostró que su estrategia era matemáticamente correcta pero no verificó que la misma fuera posible en el contexto del problema. La estrategia más utilizada por los ingresantes es la tercera, no siendo la más fácil de demostrar y de llevar a cabo; a nuestro entender la más sencilla sería la primera.

Es necesario discutir diversas estrategias para poder elegir la óptima; pensar en las soluciones viables y analizar las conexiones con otros temas. Para ello resulta favorable presentar un problema de tipo real y concreto, a partir del cual puedan emerger conceptos, propiedades y relaciones.

Se observa que el 38 % de los estudiantes realizó estrategias correctas analizando un caso particular cuando no se les daba una representación gráfica en el enunciado.

Resolver problemas del mundo real enfrenta a la toma de decisiones, cultiva el espíritu crítico y convoca a la reflexión. El estudiante aprende a aplicar los conocimientos adquiridos en situaciones reales y le permite afrontar obstáculos, tanto teóricos como prácticos, en su vida; se fortalece tanto en conocimiento como en habilidades, actitudes y valores.

Bibliografía

- Amenedo, M.; Carranza, S.; Diñeiro, M.; Grau, J.; Latorre, M. (1996). *Matemática 2*. Santillana. Buenos Aires.

- Pólya, G. (1990). *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas. México.