Un problema de evolución en el grupo de Heisenberg

Raúl Emilio Vidal

Facultad de Matemática, Astronomía y Física
Universidad Nacional de Córdoba
FaMAF - CIEM Córdoba

Jornadas de geometría diferencial y teoría de Lie, Rosario

Introducción

Empecemos con una introducción de los problemas a tratar.

Introducción

Empecemos con una introducción de los problemas a tratar.

Consideremos que $u : \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ representa la densidad de una población simple, en el punto x y tiempo t.

Introducción

Empecemos con una introducción de los problemas a tratar.

Consideremos que $u : \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ representa la densidad de una población simple, en el punto x y tiempo t.

Sea J un núcleo radial, no negativo con $\int_{\mathbb{R}^n} J(x)\, dx = 1$, tal que $J(x - y)$ representa la función de densidad de probabilidad de desplazamiento de la posición y en la posición x.

Introducción

Empecemos con una introducción de los problemas a tratar.

Consideremos que $u : \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ representa la densidad de una población simple, en el punto x y tiempo t.

Sea J un núcleo radial, no negativo con $\int_{\mathbb{R}^n} J(x)\,dx = 1$, tal que $J(x-y)$ representa la función de densidad de probabilidad de desplazamiento de la posición y en la posición x.

Entonces

$$J * u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} J(x-y)u(y,t)\,dy,$$

representa la tasa a la que los individuos llegan a la posición x desde todos los otros lugares en el tiempo t, y

$$-u(x,t) = -\int_{\mathbb{R}^n} J(y-x)u(x,t)\,dy,$$

representa la tasa a la que los individuos migran desde la posición x a todos los otros lugares en el tiempo t.

Luego la densidad u satisface la siguiente ecuación

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} J(y-x)(u(y,t)-u(x,t))\,dy \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases}$$

Luego la densidad u satisface la siguiente ecuación

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} J(y-x)(u(y,t)-u(x,t))\,dy \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases}$$

Esta ecuación tiene muchas propiedades similares a la ecuación clásica del calor: las soluciones estacionarias acotadas son constantes, un principio máximo es válido. Sin embargo, generalmente existe un efecto de no regularizador.

Luego la densidad u satisface la siguiente ecuación

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} J(y-x)(u(y,t)-u(x,t))\,dy \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases}$$

Esta ecuación tiene muchas propiedades similares a la ecuación clásica del calor: las soluciones estacionarias acotadas son constantes, un principio máximo es válido. Sin embargo, generalmente existe un efecto de no regularizador.

Chasseigne-Chaves-Rossi estudían el problema de difusión no local, con una condición inicial no negativa

$$u(\cdot,0) = u_0(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n),$$

donde $J \in C(\mathbb{R}^n)$.

Aplican la transformada de Fourier obteniendo

$$\widehat{u}_t(\xi, t) = (\widehat{J * u - u})(\xi, t) = (\widehat{J}(\xi) - 1)\widehat{u}(\xi, t),$$

Aplican la transformada de Fourier obteniendo

$$\widehat{u}_t(\xi,t) = (\widehat{J * u -} u)(\xi,t) = (\widehat{J}(\xi) - 1)\widehat{u}(\xi,t),$$

luego

$$\widehat{u}(\xi,t) = e^{(\widehat{J}(\xi)-1)t}\,\widehat{u_0}(\xi).$$

Aplican la transformada de Fourier obteniendo

$$\widehat{u}_t(\xi, t) = (\widehat{J * u -} u)(\xi, t) = (\widehat{J}(\xi) - 1)\widehat{u}(\xi, t),$$

luego

$$\widehat{u}(\xi, t) = e^{(\widehat{J}(\xi)-1)t}\widehat{u_0}(\xi).$$

Con esta formula explícita para la solución e hipótesis adecuadas para J determinan el decaimiento y comportamiento asintótico en norma infinito de la solución.

Teorema

Sea u solución del problema anterior con u_0, $\widehat{u_0}$ en $L^1(\mathbb{R}^n)$. Si existe $A > 0$ tal que

$$\widehat{J}(\xi) = 1 - A|\xi|^\alpha + O(|\xi|^\alpha), \qquad \xi \longrightarrow 0,$$

entonces el comportamiento asintótico de $u(x,t)$ viene dado por

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} t^{n/\alpha} \max_x |u(x,t) - v(x,t)| = 0,$$

donde v es la solución del problema parabólico $v_t(x,t) = -A(-\Delta)^{\alpha/2} v(x,t)$, con condición inicial $v(x,0) = u_0(x)$. Es mas, tenemos

$$\|u(.,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq Ct^{-\frac{n}{\alpha}}.$$

El perfil asintótico viene dado por

$$\lim_{t \to \infty} \max_y |t^{n/\alpha} u(t^{1/\alpha} y, t) - \|u_0\|_{L^\infty} G_A(y)|$$

donde G_A satisface que $\widehat{G_A}(\xi) = e^{-A|\xi|^\alpha}$

Luego, como se conserva la masa, por interpolación obtienen

$$\|u(.,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(.,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{p}} \|u(.,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{1}{p}} \leq \tilde{C} t^{-\frac{n}{\alpha}(1-\frac{1}{p})}.$$

Luego, como se conserva la masa, por interpolación obtienen

$$\|u(.,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(.,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{p}} \|u(.,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{1}{p}} \leq \tilde{C} t^{-\frac{n}{\alpha}(1-\frac{1}{p})}.$$

Esta clase de problemas se generalizar considerando la siguiente ecuación

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} J(x,y) G(u(y,t) - u(x,t))\, dy, \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{1}$$

Luego, como se conserva la masa, por interpolación obtienen

$$\|u(.,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(.,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{p}} \|u(.,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{1}{p}} \leq \tilde{C} t^{-\frac{n}{\alpha}(1-\frac{1}{p})}.$$

Esta clase de problemas se generalizar considerando la siguiente ecuación

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} J(x,y) G(u(y,t) - u(x,t))\, dy, \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{1}$$

Para $G(s) = s$, dependiendo de la forma de J soluciones de diferentes problemas que involucran la ecuación (1) tienen comportamiento similar a diferentes ecuaciones elípticas.

Andreu-Vaillo, Mazón, Rossi y Toledo-Melero consideran $G(s) = |s|^{p-2}s$ y $J(x, y)$ simétrico no negativo. Demostraron este problema tiene una única solución no negativa, integrable y acotada con

$$||u(\cdot, t)||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq ||u(\cdot, 0)||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} := M > 0.$$

Respecto al comportamiento asintótico de la solución en infinito Ignat y Rossi estudian el caso para el cual el operador no es convolución, es decir la ecuación

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} J(x,y)|u(y,t)-u(x,t)|^{p-2}(u(y,t)-u(x,t))\,dy \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases}$$

donde J es simétrico.

Respecto al comportamiento asintótico de la solución en infinito Ignat y Rossi estudian el caso para el cual el operador no es convolución, es decir la ecuación

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} J(x,y)|u(y,t)-u(x,t)|^{p-2}(u(y,t)-u(x,t))\,dy \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases}$$

donde J es simétrico.

Estudiando estimaciones para el funcional de energía

$$\langle A_{p,\epsilon}u, u\rangle := \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} J_\epsilon(y-x)|u(y,t)-u(x,t)|^p dydx.$$

Demuestran

Teorema

Sea $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ *y* $2 \leq p \leq n$. *Para* $1 \leq q < \infty$ *la solución del problema verifica*

$$||u(.,t)||_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq Ct^{-\left(\frac{n}{n(p-2)+p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right)}$$

para todo t *suficientemente grande.*

Demuestran

Teorema

Sea $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ *y* $2 \leq p \leq n$. *Para* $1 \leq q < \infty$ *la solución del problema verifica*

$$||u(.,t)||_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq Ct^{-\left(\frac{n}{n(p-2)+p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right)}$$

para todo t *suficientemente grande.*

Es el mismo comportamiento asintótico que el obtenido para el problema de difusión del $p-$Laplaciano.

Problema de difusión en el grupo de Heisenberg, preliminares

Problema de difusión en el grupo de Heisenberg, preliminares

Consideramos el grupo de Heisenberg $\mathbb{H}_n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ con la ley dada por,

$$(x, y, s).(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{s}) = (x + \tilde{x}, y + \tilde{y}, s + \tilde{s} + \frac{1}{2}(x\tilde{y} - y\tilde{x}))$$

Problema de difusión en el grupo de Heisenberg, preliminares

Consideramos el grupo de Heisenberg $\mathbb{H}_n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ con la ley dada por,

$$(x, y, s).(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{s}) = (x + \tilde{x}, y + \tilde{y}, s + \tilde{s} + \frac{1}{2}(x\tilde{y} - y\tilde{x}))$$

Sea $\{X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n, S\}$ la base canónica del álgebra de Lie asociada, $\mathfrak{h}_n$,donde $X_j = \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{y_j}{2}\frac{\partial}{\partial s}$, $Y_j = \frac{\partial}{\partial y_j} + \frac{x_j}{2}\frac{\partial}{\partial s}$, y $S = \frac{\partial}{\partial s}$.

Problema de difusión en el grupo de Heisenberg, preliminares

Consideramos el grupo de Heisenberg $\mathbb{H}_n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ con la ley dada por,

$$(x, y, s).(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{s}) = (x + \tilde{x}, y + \tilde{y}, s + \tilde{s} + \frac{1}{2}(x\tilde{y} - y\tilde{x}))$$

Sea $\{X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n, S\}$ la base canónica del álgebra de Lie asociada, $\mathfrak{h}_n$,donde $X_j = \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{y_j}{2}\frac{\partial}{\partial s}$, $Y_j = \frac{\partial}{\partial y_j} + \frac{x_j}{2}\frac{\partial}{\partial s}$, y $S = \frac{\partial}{\partial s}$.

Consideramos el sublaplaciano L:

$$L = \sum_{j=1}^{n} X_j^2 + Y_j^2.$$

En coordenadas

$$L = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_j^2} \right) + \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial s^2} \sum_{j=1}^{n} \left(x_j^2 + y_j^2 \right) + \frac{\partial}{\partial s} \sum_{j=1}^{n} \left(x_j \frac{\partial}{\partial y_j} - y_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right)$$

Destacamos que el Grupo de Heisenberg $\mathbb{H}_n$ es un grupo homogéneo. Sean $\{\delta_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ los automorfismos dados por las dilataciones de $\mathbb{H}_n$ definidas por $\delta_r(z,s) = (r^{\frac{1}{2}}z, rs)$.

Destacamos que el Grupo de Heisenberg $\mathbb{H}_n$ es un grupo homogéneo. Sean $\{\delta_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ los automorfismos dados por las dilataciones de $\mathbb{H}_n$ definidas por $\delta_r(z,s) = (r^{\frac{1}{2}}z, rs)$.

El grupo unitario $U(n)$ actua en forma natural en $\mathbb{H}_n$, si $g \in U(n)$ $g.(z,s) = (gz,s)$. Denotamos por $S(\mathbb{H}_n)^{U(n)}$ y $L^1(\mathbb{H}_n)^{U(n)}$ a los subespacios de las funciones Schwartz y de $L^1(\mathbb{H}_n)$ invariantes por la acción de $U(n)$. Como $(L^1(\mathbb{H}_n)^{U(n)}, *)$ es una subálgebra conmutativa su espectro Σ viene dado por una familia de funciones esféricas $\{\varphi_{\lambda,k}\}_{\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\},k\in\mathbb{N}} \cup \{\eta_r\}_{r\in\mathbb{R}^{\geq 0}}$ asociadas al par de Gelfand $(U(n),\mathbb{H}_n)$.

Destacamos que el Grupo de Heisenberg $\mathbb{H}_n$ es un grupo homogéneo. Sean $\{\delta_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ los automorfismos dados por las dilataciones de $\mathbb{H}_n$ definidas por $\delta_r(z,s) = (r^{\frac{1}{2}}z, rs)$.

El grupo unitario $U(n)$ actua en forma natural en $\mathbb{H}_n$, si $g \in U(n)$ $g.(z,s) = (gz,s)$. Denotamos por $S(\mathbb{H}_n)^{U(n)}$ y $L^1(\mathbb{H}_n)^{U(n)}$ a los subespacios de las funciones Schwartz y de $L^1(\mathbb{H}_n)$ invariantes por la acción de $U(n)$. Como $(L^1(\mathbb{H}_n)^{U(n)}, *)$ es una subálgebra conmutativa su espectro Σ viene dado por una familia de funciones esféricas $\{\varphi_{\lambda,k}\}_{\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\},k\in\mathbb{N}} \cup \{\eta_r\}_{r\in\mathbb{R}^{\geq 0}}$ asociadas al par de Gelfand $(U(n), \mathbb{H}_n)$.

El laplaciano L y el operador S son los generadores de la subálgebra de $\mathcal{U}(\mathfrak{h}_n)$ de operderadores invariantes por izquierda y por la acción de $U(n)$.

Las funciones esféricas son autofunciones conjuntas de estos operadores

$$\begin{cases} L\varphi_{\lambda,k} = -|\lambda|(2k+n)\varphi_{\lambda,k}, \\ \\ iS\varphi_{\lambda,k} = \lambda\varphi_{\lambda,k}. \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} L\eta_r = -r^2\eta_r, \qquad r \in \mathbb{R}, r \geq 0 \\ \\ iS\eta_r = 0. \end{cases}$$

El espectro de $(L^1(\mathbb{H}_n)^{U(n)}, *)$ lo podemos identificar con los autovalores conjuntos de las funciones esféricas

$$\Sigma = \{(\lambda, |\lambda|(2k+n)) : \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, k \in \mathbb{N}\} \cup \{r \in \mathbb{R}, r \geq 0\}$$

El espectro de $(L^1(\mathbb{H}_n)^{U(n)}, *)$ lo podemos identificar con los autovalores conjuntos de las funciones esféricas

$$\Sigma = \{(\lambda, |\lambda|(2k+n)) : \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, k \in \mathbb{N}\} \cup \{r \in \mathbb{R}, r \geq 0\}$$

Decimos que una función $g \in L^1(\Sigma)$ si

$$\|g\|_{L^1(\Sigma)} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} |g(\lambda, k)| \, |\lambda|^n d\lambda < \infty.$$

Si $f \in L^1(\mathbb{H}_n)^{U(n)}$ se define su transformada esférica $\widehat{f} : \Sigma \to \mathbb{C}$ como

$$\widehat{f}(k, \lambda) = \int_{\mathbb{H}_n} f(x, y, s) \varphi_{\lambda,k}(-x, -y, -s) \, dx \, dy \, ds,$$
$$\widehat{f}(0, r) = \int_{\mathbb{H}_n} f(z, s) \eta_r(-z, -s) \, dz \, ds.$$

Si $f \in L^1(\mathbb{H}_n)^{U(n)}$ y $\widehat{f} \in L^1(\Sigma)$ vale la siguiente formula de inversión

$$f(z,s) = \sum_{k\geq 0} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\lambda,k)\varphi_{\lambda,k}(z,s)|\lambda|^n d\lambda.$$

Si $f \in L^1(\mathbb{H}_n)^{U(n)}$ y $\widehat{f} \in L^1(\Sigma)$ vale la siguiente formula de inversión

$$f(z,s) = \sum_{k\geq 0} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\lambda,k)\varphi_{\lambda,k}(z,s)|\lambda|^n d\lambda.$$

Las funciones esféricas nos permiten escribir la descomposición espectral de $-L$, y por lo tanto, para $0 < \alpha \leq 1$ podemos definir al Laplaciano fraccionario como

$$(-L)^\alpha f(z,s) = \sum_{k\geq 0} \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^\alpha (2k+n)^\alpha \widehat{f}(\lambda,k)\varphi_{\lambda,k}(z,s)|\lambda|^n d\lambda.$$

Resultados

Consideremos un dominio Ω acotado con frontera suave. Sea $J : \mathbb{H}_n \to \mathbb{H}$ una función continua, no negativa invariante por la ación de $U(n)$ con $\displaystyle\int_{\mathbb{H}_n} J(z,s)\, dzds = 1$ y $sop(J) \subset B(0,1)$.

Resultados

Consideremos un dominio Ω acotado con frontera suave. Sea $J : \mathbb{H}_n \to \mathbb{H}$ una función continua, no negativa invariante por la ación de $U(n)$ con $\displaystyle\int_{\mathbb{H}_n} J(z,s)\, dzds = 1$ y $sop(J) \subset B(0,1)$.

Vamos a considerar el núcleo rescalado dado por

$$J^{\epsilon}(z,s) = \frac{2C_1^{-1}}{\epsilon^{2n+2}} \delta_{\epsilon^{-2}} J\,(z,s) = \frac{2C_1^{-1}}{\epsilon^{2n+2}} J\left(\frac{z}{\epsilon}, \frac{s}{\epsilon^2}\right)$$

Resultados

Consideremos un dominio Ω acotado con frontera suave. Sea $J : \mathbb{H}_n \to \mathbb{H}$ una función continua, no negativa invariante por la ación de $U(n)$ con $\displaystyle\int_{\mathbb{H}_n} J(z,s)\, dzds = 1$ y $sop(J) \subset B(0,1)$.

Vamos a considerar el núcleo rescalado dado por

$$J^{\epsilon}(z,s) = \frac{2C_1^{-1}}{\epsilon^{2n+2}} \delta_{\epsilon^{-2}} J\,(z,s) = \frac{2C_1^{-1}}{\epsilon^{2n+2}} J\left(\frac{z}{\epsilon}, \frac{s}{\epsilon^2}\right)$$

y el problema de Dirichlet asociado

$$\begin{cases} u_t^{\epsilon}(z,s,t) = \dfrac{1}{\epsilon^2} J^{\epsilon} * u(z,s,t) - u(z,s,t), & para\ (z,s) \in \Omega\ y\ t > 0, \\ u^{\epsilon}(z,s,t) = g(z,s,t), & para\ (z,s) \notin \Omega\ y\ t > 0, \\ u^{\epsilon}(z,s,0) = u_0(z,s), & para\ (z,s) \in \Omega. \end{cases}$$

Si además J es simétrico en la variable s y cumple que $\displaystyle\int_{\mathbb{H}_n} J(z,s)x_j^2\, dzds = C_1$, $\displaystyle\int_{\mathbb{H}_n} J(z,s)y_j^2\, dzds = C_1$, $\displaystyle\int_{\mathbb{H}_n} J(z,s)s^2\, dzds = C_1$. Se prueba

Si además J es simétrico en la variable s y cumple que $\displaystyle\int_{\mathbb{H}_n} J(z,s)x_j^2\,dzds = C_1$, $\displaystyle\int_{\mathbb{H}_n} J(z,s)y_j^2\,dzds = C_1$, $\displaystyle\int_{\mathbb{H}_n} J(z,s)s^2\,dzds = C_1$. Se prueba

Theorem

Sea Ω un dominio acotado $C^{2+\alpha}$ para algún $0<\alpha<1$. Sea $v \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Omega}\times[0,T])$ la solución del problema de Dirichlet asociado a la ecuación del calor y sea u^ϵ la solución de nuestro problema recalado con J^ϵ como se definio anteriormente. Entonces existe $C = C(T)$ tal que

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u^\epsilon(\cdot,\cdot,t) - v(\cdot,\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \le C\,\epsilon^\alpha, \qquad \text{cuando} \qquad \epsilon \to 0.$$

El problema de Dirichlet asociado a la ecuación del calor es

$$\begin{cases} v_t(z,s,t) = Lv(z,s,t), & \text{para } (z,s) \in \Omega \text{ y } t > 0, \\ v_t(z,s,t) = g(z,s,t), & \text{para } (z,s) \in \partial\Omega \text{ y } t > 0, \\ v(z,s,0) = u_0(z,s), & \text{para } (z,s) \in \Omega. \end{cases}$$

El problema de Dirichlet asociado a la ecuación del calor es

$$
\begin{cases}
v_t(z,s,t) = Lv(z,s,t), & \text{para } (z,s) \in \Omega \text{ y } t > 0, \\
v_t(z,s,t) = g(z,s,t), & \text{para } (z,s) \in \partial\Omega \text{ y } t > 0, \\
v(z,s,0) = u_0(z,s), & \text{para } (z,s) \in \Omega.
\end{cases}
$$

Para demostrar este resultado es importante que bajo estas hipótesis nuestro problema satisface un principio de comparación, esto se da al ser J simétrico en todas sus variables.

Respecto al problema de Cauchy la ecuación q estudiamos es la siguiente

$$\begin{cases} u_t(z,s,t) = J * u(z,s,t) - u(z,s,t), \\ u(z,s,0) = u_0(z,s). \end{cases}$$

donde $J : \mathbb{H}_n \to \mathbb{R}$ es una función no negativa invariante por la ación de $U(n)$ con $\int_{\mathbb{H}_n} J(z,s)\, dzds = 1$.

Respecto al problema de Cauchy la ecuación q estudiamos es la siguiente

$$\begin{cases} u_t(z,s,t) = J * u(z,s,t) - u(z,s,t), \\ u(z,s,0) = u_0(z,s). \end{cases}$$

donde $J : \mathbb{H}_n \to \mathbb{R}$ es una función no negativa invariante por la ación de $U(n)$ con $\displaystyle\int_{\mathbb{H}_n} J(z,s)\, dzds = 1$.

Aplicamos la transformada de esférica obteniendo

$$\begin{cases} \widehat{u}_t(k,\lambda,t) = (\widehat{J} - 1)\widehat{u}(k,\lambda,t), \\ \widehat{u}(k,\lambda,0) = \widehat{u}_0(k,\lambda). \end{cases}$$

Respecto al problema de Cauchy la ecuación q estudiamos es la siguiente

$$\begin{cases} u_t(z,s,t) = J * u(z,s,t) - u(z,s,t), \\ u(z,s,0) = u_0(z,s). \end{cases}$$

donde $J : \mathbb{H}_n \to \mathbb{R}$ es una función no negativa invariante por la ación de $U(n)$ con $\displaystyle\int_{\mathbb{H}_n} J(z,s)\, dzds = 1$.

Aplicamos la transformada de esférica obteniendo

$$\begin{cases} \widehat{u}_t(k,\lambda,t) = (\widehat{J} - 1)\widehat{u}(k,\lambda,t), \\ \widehat{u}(k,\lambda,0) = \widehat{u}_0(k,\lambda). \end{cases}$$

Luego

$$\widehat{u}(k,\lambda,t) = e^{(\widehat{J}-1)t}\widehat{u}_0(k,\lambda).$$

Se demuestra que si $u_0 \in L^1(\mathbb{H}_n)^{U(n)}$ y $\widehat{u_0} \in L^1(\Sigma)$ y J satisface las hipótesis de arriba. Entonces existe una única solución $u \in C^0([0,\infty), L^1(\mathbb{H}_n)^{U(n)})$ del problema de Cauchy dada por:

$$\widehat{u}(\lambda, k, t) = e^{(\widehat{J}(\lambda,k)-1)t}\,\widehat{u_0}(\lambda, k).$$

Se demuestra que si $u_0 \in L^1(\mathbb{H}_n)^{U(n)}$ y $\widehat{u_0} \in L^1(\Sigma)$ y J satisface las hipótesis de arriba. Entonces existe una única solución $u \in C^0([0,\infty), L^1(\mathbb{H}_n)^{U(n)})$ del problema de Cauchy dada por:

$$\widehat{u}(\lambda, k, t) = e^{(\widehat{J}(\lambda,k)-1)t}\,\widehat{u_0}(\lambda, k).$$

Ahora si además pedimos que $J \in \mathcal{S}(\mathbb{H}_n)^{U(n)}$ existe solución fundamental, la cual no es regularizante.

Se demuestra que si $u_0 \in L^1(\mathbb{H}_n)^{U(n)}$ y $\widehat{u_0} \in L^1(\Sigma)$ y J satisface las hipótesis de arriba. Entonces existe una única solución $u \in C^0([0,\infty), L^1(\mathbb{H}_n)^{U(n)})$ del problema de Cauchy dada por:

$$\widehat{u}(\lambda, k, t) = e^{(\widehat{J}(\lambda,k)-1)t}\widehat{u_0}(\lambda, k).$$

Ahora si además pedimos que $J \in \mathcal{S}(\mathbb{H}_n)^{U(n)}$ existe solución fundamental, la cual no es regularizante.

Lemma

Consideremos el dato inicial $u_0 = \delta_0$ (la delta de Dirac en el grupo $\mathbb{H}_n$). Entonces la solución fundamental del problema de Cauchy puede descomponerse por

$$w(z, s, t) = e^{-t}\delta_0 + \nu(z, s, t),$$

donde $\nu(z, s, t)$ es una función suave. Es mas, si u es una solución del problema de Cauchy con dato inicial una función $u_0 \in L^1(\mathbb{H}_n)^{U(n)}$ entonces se puede escribir como

$$u(z, s, t) = w * u_0(z, s, t).$$

Ahora estableceremos los resultados respecto al comportamiento asintótico cuando t tiende a infinito

Theorem

Sea u la solución del problema del Cauchy con $u_0 \in L^1(\mathbb{H}_n)^{U(n)}$ y $\widehat{u_0} \in L^1(\Sigma)$. Asumimos que J sastiface las mismas hipótesis anteriores y además satisface

$$\widehat{J}(\lambda, k) = 1 - (|\lambda|(2k+n))^{\alpha} + o((|\lambda|(2k+n))^{\alpha}),$$
$$\textit{con} \qquad \lim_{|\lambda|(2k+n)\to 0} \frac{o((|\lambda|(2k+n))^{\alpha})}{(|\lambda|(2k+n))^{\alpha}} = 0.$$

Entonces el comportamiento asintótico de $u(z,s,t)$ está dado por

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} t^{\frac{n+1}{\alpha}} \max_{(z,s)} |u(z,s,t) - v(z,s,t)| = 0,$$

donde v es solución del problema parabólico del $(-L)^{\alpha}$ en el grupo Heisenberg.

El problema parabólico de $(-L)^\alpha$ está dado por

$$\begin{cases} v_t(z,s,t) = -(-L)^\alpha v(z,s,t), \\ v(z,s,0) = u_0(z,s), \end{cases}$$

El problema parabólico de $(-L)^\alpha$ está dado por

$$\begin{cases} v_t(z,s,t) = -(-L)^\alpha v(z,s,t), \\ v(z,s,0) = u_0(z,s), \end{cases}$$

Observar que en las hipótesis del teorema J no es simétrico en la variable s pero pedimos que u_0 sea invariante por $U(n)$ que es una hipótesis fuerte.

El perfil asintótico esta dado por:

Theorem

$$\lim_{t\longrightarrow\infty}\max_{(z,s)}\left|t^{\frac{n+1}{\alpha}}\delta_{t^{\alpha}}u(z,s,t)-G_{u_0}(z,s)\right|=0,$$

donde $G_{u_0}(z,s)$ *sastiface* $\widehat{G_{u_0}}(\lambda,k)=e^{-|\lambda|^{\alpha}(2k+n)^{\alpha}}\widehat{u_0}(0,k)$.

Este resultado es diferente al análogo en $\mathbb{R}^n$, donde el perfil es de la forma $G_A\|u_0\|_{L^\infty}$ donde G_A satisface que $\widehat{G_A}(\xi)=e^{-A|\xi|^{\alpha}}$.

Theorem

Además,

$$\|u(\cdot,\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{H}_n)} \leq Ct^{-\frac{(n+1)}{\alpha}},$$

y para $2 < p < \infty$ *por interpolación tenemos,*

$$\|u(\cdot,\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{H}_n)} \leq Ct^{-\frac{(n+1)}{\alpha}\frac{p-2}{p}}.$$

Si en las hipótesis además pedimos que J sea simétrica en la variable s podemos intepolar desde L^1 pues la ecuación conservaría la masa.

Bibliografía

- E. Chasseigne, M. Chaves and J. D. Rossi, *Asymptotic behavior for nonlocal diffusion equations*, Journal de mathématiques pures et appliquées, **86(3)**, (2006), 271-291.
- G.B. Folland, *Subelliptic estimates and function spaces on nilpotent Lie groups.* Ark. Mat. **13(2)**, (1975), 161–207.
- L. Ignat, J. D. Rossi, *Decay estimates for nonlocal problems via energy methods*, J. Math. Pures Appl. **92** (2009), 163–187.
- U. Kaufmann, J. D. Rossi and R. E. Vidal, *Decay bounds for nonlocal evolution equation in Orlicz spaces*, Annals of Functional Analysis, Duke University Press. **7(2)**, (2016), 261–269.
- R. Strichartz, *L^p harmonic analysis and Radon transforms on the Heisenberg group.* J. of Funct. Analyisis, **96(2)**, (1991), 350–406.
- R. E. Vidal, *Nonlocal heat equations in the Heisenberg group.* Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA, **24(5)**, (2017), 57.

¡Gracias
por la atención!

Donde esta Santiago Maldonado?

Aparición con vida, El ESTADO es responsable!!