Álgebras de Heisenberg asociadas a álgebras de división y las álgebras de Lie simples

Mauro Subils

CONICET / FCEIA - Universidad Nacional de Rosario

Jornadas de Geometría diferencial y Teoría de Lie en Rosario
31 de Agosto de 2017

Trabajo en conjunto con Aroldo Kaplan

Content

1. Álgebras de tipo divH
2. Álgebras de Lie simples y subálgebras parabólicas
3. Distribuciones de tipo constante
4. Prolongación de Tanaka
5. Geometrías parabólicas

Álgebras de tipo divH

Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es **graduada** si

$$\mathfrak{g} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}^i$$

con

$$[\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^j] \subseteq \mathfrak{g}^{i+j}$$

.

Un álgebra de Lie graduada

$$\mathfrak{g} = \sum_{i=-1}^{-n} \mathfrak{g}^i$$

se dice *n*-**graduada fundamental** si

$$[\mathfrak{g}^{-1}, \mathfrak{g}^{-i}] = \mathfrak{g}^{-i-1}$$

En particular, $\mathfrak{g}$ es nilpotente.

Álgebras de tipo divH

Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es **graduada** si

$$\mathfrak{g} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}^i$$

con

$$[\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^j] \subseteq \mathfrak{g}^{i+j}$$

.
Un álgebra de Lie graduada

$$\mathfrak{g} = \sum_{i=-1}^{-n} \mathfrak{g}^i$$

se dice *n*-**graduada fundamental** si

$$[\mathfrak{g}^{-1}, \mathfrak{g}^{-i}] = \mathfrak{g}^{-i-1}$$

En particular, $\mathfrak{g}$ es nilpotente.

El álgebra de Heisenberg de dimensión $2n+1$ es un álgebra de Lie 2-graduada fundamental que puede describirse de dos formas diferentes:

$$\mathfrak{h} = (\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n) \oplus \mathbb{R}$$
$$[x + y + t, \hat{x} + \hat{y} + \hat{t}] = \sum (x_i \hat{y}_i - \hat{x}_i y_i)$$

$$\mathfrak{h} = \mathbb{C}^n \oplus Im(\mathbb{C})$$
$$[x + t, x' + t'] = Im(\sum x_i \bar{x}'_i)$$

El álgebra de Heisenberg de dimensión $2n+1$ es un álgebra de Lie 2-graduada fundamental que puede describirse de dos formas diferentes:

$$\mathfrak{h} = (\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n) \oplus \mathbb{R}$$
$$[x + y + t, \hat{x} + \hat{y} + \hat{t}] = \sum (x_i \hat{y}_i - \hat{x}_i y_i)$$

$$\mathfrak{h} = \mathbb{C}^n \oplus Im(\mathbb{C})$$
$$[x + t, x' + t'] = Im(\sum x_i \bar{x}'_i)$$

$\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ son **álgebras de división reales**, es decir, son espacios vectoriales reales con un producto bilineal con identidad y donde todo elemento no nulo es inversible. Además, poseen una norma $|\cdot|$ que verifica:

$$|a.b| = |a|.|b|$$

Teorema (Hurwitz, 1898)

Las únicas algebras de división reales normadas son $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ y $\mathbb{O}$.

$\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ son **álgebras de división reales**, es decir, son espacios vectoriales reales con un producto bilineal con identidad y donde todo elemento no nulo es inversible. Además, poseen una norma $|\cdot|$ que verifica:

$$|a.b| = |a|.|b|$$

Teorema (Hurwitz, 1898)

Las únicas algebras de división reales normadas son $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ y $\mathbb{O}$.

Para $\mathbb{A} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ y $\mathbb{O}$, se definen naturalmente álgebras 2-graduadas fundametales por:

$$\mathfrak{h}_n(\mathbb{A}) = (\mathbb{A}^n \oplus \mathbb{A}^n) \oplus \mathbb{A}$$

$$[x + y + t, x' + y' + t'] = \sum (x_i y_i' - x_i' y_i)$$

$$\mathfrak{h}'_{p,q}(\mathbb{A}) = (\mathbb{A}^p \oplus \mathbb{A}^q) \oplus Im(\mathbb{A})$$

$$[x + y + t, x' + y' + t'] = -\Im(\sum_j x_j \bar{x}_j' + \sum_k \bar{y}_k' y_k).$$

Para $\mathbb{A} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ y $\mathbb{O}$, se definen naturalmente álgebras 2-graduadas fundametales por:

$$\mathfrak{h}_n(\mathbb{A}) = (\mathbb{A}^n \oplus \mathbb{A}^n) \oplus \mathbb{A}$$
$$[x + y + t, x' + y' + t'] = \sum (x_i y_i' - x_i' y_i)$$

$$\mathfrak{h}'_{p,q}(\mathbb{A}) = (\mathbb{A}^p \oplus \mathbb{A}^q) \oplus Im(\mathbb{A})$$
$$[x + y + t, x' + y' + t'] = -\Im(\sum_j x_j \bar{x}_j' + \sum_k \bar{y}_k' y_k).$$

Definición

*Denominamos **álgebras de tipo divH** (o $\mathfrak{h}(\mathbb{A})$) a:*

1. $\mathfrak{h}_n(\mathbb{R}) = \mathfrak{h}'_{p,n-p}(\mathbb{C})$ *(Álgebra de Heisenberg real)*
2. $\mathfrak{h}_n(\mathbb{C})$ *(Álgebra de Heisenberg complexificada)*
3. $\mathfrak{h}'_{p,q}(\mathbb{H})$
4. $\mathfrak{h}_n(\mathbb{H})$
5. $\mathfrak{h}'_{1,0}(\mathbb{O})$
6. $\mathfrak{h}_1(\mathbb{O})$

Definición

Denominamos ***álgebras de tipo divH*** *(o $\mathfrak{h}(\mathbb{A})$) a:*

1. $\mathfrak{h}_n(\mathbb{R}) = \mathfrak{h}'_{p,n-p}(\mathbb{C})$ $(2n, 1)$
2. $\mathfrak{h}_n(\mathbb{C})$ $(4n, 2)$
3. $\mathfrak{h}'_{p,q}(\mathbb{H})$ $(4(p+q), 3)$
4. $\mathfrak{h}_n(\mathbb{H})$ $(8n, 4)$
5. $\mathfrak{h}'_{1,0}(\mathbb{O})$ $(8, 7)$
6. $\mathfrak{h}_1(\mathbb{O})$ $(16, 8)$

Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{-1} \oplus \mathfrak{g}^{-2}$ una algebra de Lie 2-graduada fundamental.

Definition

- $\mathfrak{g}$ se dice **no singular** si *ad* $X : \mathfrak{g}^{-1} \to \mathfrak{g}^{-2}$ es sobre para todo $X \in \mathfrak{g}^{-1}$ no nulo.
- $\mathfrak{g}$ es de **tipo Heisenberg** (o **tipo H**) si existe un producto interno graduado tal que los operadores $J_z : \mathfrak{g}^{-1} \to \mathfrak{g}^{-1}$ definidos por:

$$< [x, y], z >_{\mathfrak{g}^{-2}} = < J_z x, y >_{\mathfrak{g}^{-1}}$$

verifican:

$$J_z^2 = -|z|^2 Id$$

Álgebras de tipo divH $\subset$ Álgebras de tipo H $\subset$ Álgebras no singulares

Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{-1} \oplus \mathfrak{g}^{-2}$ una algebra de Lie 2-graduada fundamental.

Definition

- $\mathfrak{g}$ se dice **no singular** si *ad* $X : \mathfrak{g}^{-1} \to \mathfrak{g}^{-2}$ es sobre para todo $X \in \mathfrak{g}^{-1}$ no nulo.
- $\mathfrak{g}$ es de **tipo Heisenberg** (o **tipo H**) si existe un producto interno graduado tal que los operadores $J_z : \mathfrak{g}^{-1} \to \mathfrak{g}^{-1}$ definidos por:

$$< [x, y], z >_{\mathfrak{g}^{-2}} = < J_z x, y >_{\mathfrak{g}^{-1}}$$

verifican:

$$J_z^2 = -|z|^2 Id$$

Álgebras de tipo divH $\subset$ Álgebras de tipo H $\subset$ Álgebras no singulares

Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{-1} \oplus \mathfrak{g}^{-2}$ una algebra de Lie 2-graduada fundamental.

Definition

- $\mathfrak{g}$ se dice **no singular** si *ad* $X : \mathfrak{g}^{-1} \to \mathfrak{g}^{-2}$ es sobre para todo $X \in \mathfrak{g}^{-1}$ no nulo.
- $\mathfrak{g}$ es de **tipo Heisenberg** (o **tipo H**) si existe un producto interno graduado tal que los operadores $J_z : \mathfrak{g}^{-1} \to \mathfrak{g}^{-1}$ definidos por:

$$< [x, y], z >_{\mathfrak{g}^{-2}} = < J_z x, y >_{\mathfrak{g}^{-1}}$$

verifican:

$$J_z^2 = -|z|^2 Id$$

Álgebras de tipo divH $\subset$ Álgebras de tipo H $\subset$ Álgebras no singulares

Álgebras de Lie simples y subálgebras parabólicas

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie simple real. Una subálgebra $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ se dice parabólica si existe una graduación:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{-n} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}^{-1} \oplus \mathfrak{g}^{0} \oplus \mathfrak{g}^{1} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}^{n}$$

tal que:

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{g}^{-n} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}^{-1}$$

es fundamental y

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{g}^{-n} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}^{-1} \oplus \mathfrak{g}^{0}$$

En dicho caso, $\mathfrak{n}$ es el nilradical de $\mathfrak{p}$.

Álgebras de Lie simples y subálgebras parabólicas

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie simple real. Una subálgebra $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ se dice parabólica si existe una graduación:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{-n} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}^{-1} \oplus \mathfrak{g}^{0} \oplus \mathfrak{g}^{1} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}^{n}$$

tal que:

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{g}^{-n} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}^{-1}$$

es fundamental y

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{g}^{-n} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}^{-1} \oplus \mathfrak{g}^{0}$$

En dicho caso, $\mathfrak{n}$ es el nilradical de $\mathfrak{p}$.

Las álgebras de Lie compactas no tienen subálgebras parabólicas no triviales.

El álgebra simple $\mathfrak{so}(1, n)$ tiene una única subálgebra parabólica no trivial (salvo conjugación) y su nilradical es abeliano.

Las demás álgebras simples no compactas tienen al menos un parabólico no trivial cuyo nilradical no es abeliano.

Las álgebras de Lie compactas no tienen subálgebras parabólicas no triviales.

El álgebra simple $\mathfrak{so}(1, n)$ tiene una única subálgebra parabólica no trivial (salvo conjugación) y su nilradical es abeliano.

Las demás álgebras simples no compactas tienen al menos un parabólico no trivial cuyo nilradical no es abeliano.

Las álgebras de Lie compactas no tienen subálgebras parabólicas no triviales.

El álgebra simple $\mathfrak{so}(1, n)$ tiene una única subálgebra parabólica no trivial (salvo conjugación) y su nilradical es abeliano.

Las demás álgebras simples no compactas tienen al menos un parabólico no trivial cuyo nilradical no es abeliano.

Teorema

(a) *Toda algebra de Lie simple no compacta no isomorfa a* $\mathfrak{so}(1, n)$ *tiene una única subalgebra parabólica con nilradical no singular (salvo conjugación).*

(b) *Los nilradicales son exactamente las algebras de tipo* $\mathfrak{h}(\mathbb{A})$*.*

$\mathfrak{h}'_n(\mathbb{C})$	$\mathfrak{sl}(n+2,\mathbb{R})$, $\mathfrak{su}(p,n+2-p)$, $\mathfrak{sp}(2n+2,\mathbb{R})$, $\mathfrak{so}(q,n+4-q)$, $\mathfrak{so}^*(2n+4)$ para n par, EI, EII, $EIII$ para $n=10$ EV, EVI, $EVII$ para $n=16$, $EVIII$, EIX para $n=28$ FI para $n=7$, G para $n=2$
$\mathfrak{h}_n(\mathbb{C})$	$\mathfrak{sl}(n+2,\mathbb{C})$, $\mathfrak{so}(n+4)$, $\mathfrak{sp}(2n+2,\mathbb{C})$, E_6 para $n=10$, E_7 para $n=16$, E_8 para $n=28$ F_4 para $n=7$, G_2 para $n=2$
$\mathfrak{h}'_{p,q}(\mathbb{H})$	$\mathfrak{sp}(p+1,q+1)$
$\mathfrak{h}_n(\mathbb{H})$	$\mathfrak{sl}(n+2,\mathbb{H})$
$\mathfrak{h}'_{1,0}(\mathbb{O})$	FII
$\mathfrak{h}_1(\mathbb{O})$	EIV

Distribuciones de tipo constante

Sea $\mathcal{D}$ una distribución en una variedad *M* tal que $[\mathcal{D},\mathcal{D}] = TM$.
Toda 1-forma λ nunca nula en *M* tal que $\lambda(\mathcal{D}) = 0$ define una 2-forma ω_λ en $\mathcal{D}$ por:

$$\omega_\lambda(X, Y) = \lambda([X, Y]) \quad \text{for } X,\ Y \in \mathcal{D}$$

La distribución se dice **fat** si ω_λ es no-degenerada para todo λ.

Distribuciones de tipo constante

Sea $\mathcal{D}$ una distribución en una variedad M tal que $[\mathcal{D}, \mathcal{D}] = TM$.
Toda 1-forma λ nunca nula en M tal que $\lambda(\mathcal{D}) = 0$ define una 2-forma ω_λ en $\mathcal{D}$ por:

$$\omega_\lambda(X, Y) = \lambda([X, Y]) \quad \text{for } X,\ Y \in \mathcal{D}$$

La distribución se dice **fat** si ω_λ es no-degenerada para todo λ.

Para cada $x \in M$ el espacio vectorial

$$\mathfrak{n}(x) = \mathcal{D}(x) \oplus \frac{TM(x)}{\mathcal{D}(x)}$$

tiene una estructura natural de álgebra de Lie 2-graduada fundamental.

El álgebra de Lie $\mathfrak{n}(x)$ se denomina el **símbolo** de $\mathcal{D}$ en x.

Observación

Una distibución es fat si y sólo si su símbolo es no singular en cada punto

Para cada $x \in M$ el espacio vectorial

$$\mathfrak{n}(x) = \mathcal{D}(x) \oplus \frac{TM(x)}{\mathcal{D}(x)}$$

tiene una estructura natural de álgebra de Lie 2-graduada fundamental.

El álgebra de Lie $\mathfrak{n}(x)$ se denomina el **símbolo** de $\mathcal{D}$ en x.

Observación

Una distibución es fat si y sólo si su símbolo es no singular en cada punto

Para cada $x \in M$ el espacio vectorial

$$\mathfrak{n}(x) = \mathcal{D}(x) \oplus \frac{TM(x)}{\mathcal{D}(x)}$$

tiene una estructura natural de álgebra de Lie 2-graduada fundamental.

El álgebra de Lie $\mathfrak{n}(x)$ se denomina el **símbolo** de $\mathcal{D}$ en x.

Observación

Una distibución es fat si y sólo si su símbolo es no singular en cada punto

Fijada un álgebra de Lie fundamental $\mathfrak{n} = \mathfrak{g}^{-1} \oplus \mathfrak{g}^{-2}$, una distribución $\mathcal{D}$ se dice **de tipo constante** $\mathfrak{n}$ si para cada x el símbolo $\mathfrak{n}(x)$ es isomorfo a $\mathfrak{n}$.

Si fijamos $\mathfrak{n} = \mathfrak{g}^{-1} \oplus \mathfrak{g}^{-2}$ y consideramos el grupo de Lie simplemente conexo N con álgebra de Lie $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{g}^{-1}$ genera una distribución en N de tipo constante $\mathfrak{n}$ a la que denominamos **distribución estandar de tipo** $\mathfrak{n}$.

Fijada un álgebra de Lie fundamental $\mathfrak{n} = \mathfrak{g}^{-1} \oplus \mathfrak{g}^{-2}$, una distribución $\mathcal{D}$ se dice **de tipo constante** $\mathfrak{n}$ si para cada x el símbolo $\mathfrak{n}(x)$ es isomorfo a $\mathfrak{n}$.

Si fijamos $\mathfrak{n} = \mathfrak{g}^{-1} \oplus \mathfrak{g}^{-2}$ y consideramos el grupo de Lie simplemente conexo N con álgebra de Lie $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{g}^{-1}$ genera una distribución en N de tipo constante $\mathfrak{n}$ a la que denominamos **distribución estandar de tipo** $\mathfrak{n}$**.**

Definición

Un **automorfismo infinitesimal** de una distribución $\mathcal{D}$ es un campo vectorial X tal que

$$[X, \mathcal{D}] \subset \mathcal{D}$$

Los automorfismos infinitesimales están generados por grupos monoparamétricos de automorfismos de la distribución y forman un álgebra de Lie que denotamos $AutInf(\mathcal{D})$.

Prolongación de Tanaka

Sea $\mathfrak{n} = \bigoplus_{i<0} \mathfrak{g}^i$ un álgebra de Lie fundamental. La **prolongación de Tanaka** de $\mathfrak{n}$ es un álgebra de Lie graduada

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}^i(\mathfrak{n}) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}^i,$$

que satisface:

1. $\mathfrak{g}^i(\mathfrak{n}) = \mathfrak{g}^i$ para cada $i \leq 0$;
2. si $X \in \mathfrak{g}^i(\mathfrak{n})$ con $i > 0$ satisface $[X, \mathfrak{g}_{-1}] = 0$, luego $X = 0$;
3. $\mathfrak{g}$ es el álgebra graduada maximal que satisface 1 y 2.

$\mathfrak{n}$ es **de tipo finito** si $\mathfrak{g}$ tiene dimensión finita.

Theorem [Tanaka, 70]

Sea $\mathcal{D}$ una distribución de tipo constante $\mathfrak{n}$. Si $\mathfrak{n}$ es de tipo finito entonces el álgebra de Lie de automorfismos infinitesimales de $\mathcal{D}$ es de dimensión finita y su dimensión es $\leq \dim \mathfrak{g}$. La igualdad se da si y sólo si $\mathcal{D}$ es localmente isomorfa a la distribución estandar de tipo $\mathfrak{n}$, y *AutInf*$(\mathcal{D})$ es isomorfa a $\mathfrak{g}$.

$\mathfrak{n}$ es **de tipo finito** si $\mathfrak{g}$ tiene dimensión finita.

Theorem [Tanaka, 70]

Sea $\mathcal{D}$ una distribución de tipo constante $\mathfrak{n}$. Si $\mathfrak{n}$ es de tipo finito entonces el álgebra de Lie de automorfismos infinitesimales de $\mathcal{D}$ es de dimensión finita y su dimensión es $\leq \dim \mathfrak{g}$. La igualdad se da si y sólo si $\mathcal{D}$ es localmente isomorfa a la distribución estandar de tipo $\mathfrak{n}$, y $\mathit{AutInf}(\mathcal{D})$ es isomorfa a $\mathfrak{g}$.

Proposición

Para toda álgebra de Lie no singular $\mathfrak{n}$ cuyo grupo de automorfismos áctua irreduciblemente en $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$, las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. $\mathfrak{n}$ es el nilradical de una subálgebra parabólica de un álgebra de Lie simple;
2. $\mathfrak{n}$ tiene prolongación de Tanaka no trivial;
3. $\mathfrak{n}$ es de tipo divH.

Geometrías parabólicas

Las geometrías parabólicas son estructuras geométricas en variedades que "deforman" las variedades de bandera G/P donde G es un grupo semisimple y P es un subgrupo parabólico.

Definition

Sea $P \subset G$ subgrupo parabólico de un grupo semisimple G, $\mathfrak{p} = Lie(P)$, $\mathfrak{g} = Lie(G)$. Una **geometría parabólica de tipo** (G, P) en M es

1. un P-fibrado principal $p : \mathcal{E} \to M$,
2. una 1-forma $\mathfrak{g}$-valuada $\omega \in \Omega^1(\mathcal{E}, \mathfrak{g})$, llamada *conexión de Cartan*, que verifica:
   1. $(R_h)^*\omega = h^{-1} \cdot \omega$ para todo $h \in H$,
   2. $\omega(X^\dagger(\lambda)) = x$ para todo $x \in \mathfrak{h}$, $\lambda \in \mathcal{E}$,
   3. $\omega(\lambda) : T_\lambda\mathcal{E} \to \mathfrak{g}$ es isomorfismo para cada $\lambda \in \mathcal{E}$.

Geometrías parabólicas

Las geometrías parabólicas son estructuras geométricas en variedades que “deforman” las variedades de bandera G/P donde G es un grupo semisimple y P es un subgrupo parabólico.

Definition

Sea $P \subset G$ subgrupo parabólico de un grupo semisimple G, $\mathfrak{p} = Lie(P)$, $\mathfrak{g} = Lie(G)$. Una **geometría parabólica de tipo** (G, P) en M es

1. un P-fibrado principal $p : \mathcal{E} \to M$,
2. una 1-forma $\mathfrak{g}$-valuada $\omega \in \Omega^1(\mathcal{E}, \mathfrak{g})$, llamada *conexión de Cartan*, que verifica:
   1. $(R_h)^*\omega = h^{-1} \cdot \omega$ para todo $h \in H$,
   2. $\omega(X^\dagger(\lambda)) = x$ para todo $x \in \mathfrak{h}$, $\lambda \in \mathcal{E}$,
   3. $\omega(\lambda) : T_\lambda\mathcal{E} \to \mathfrak{g}$ es isomorfismo para cada $\lambda \in \mathcal{E}$.

Proposición

Una distribución fat soporta a una geometría parabólica si y sólo si es de tipo constante divH.

Por ejemplo,
$G = \mathfrak{sl}(n+2, \mathbb{R})$ estructuras de contacto Lagrangeanas,
$G = \mathfrak{su}(p+1, q+1)$, CR-estructuras partialmente integrables de tipo hipersuperficie de signatura (p, q),
$G = \mathfrak{sp}(2n+2, \mathbb{R})$, estructuras de contacto projectivas,
$G = \mathfrak{sp}(p+1, q+1)$, estructuras de contacto cuaterniónico de signatura (p, q).

Proposición

Una distribución fat soporta a una geometría parabólica si y sólo si es de tipo constante divH.

Por ejemplo,
$G = \mathfrak{sl}(n+2, \mathbb{R})$ estructuras de contacto Lagrangeanas,
$G = \mathfrak{su}(p+1, q+1)$, CR-estructuras partialmente integrables de tipo hipersuperficie de signatura (p, q),
$G = \mathfrak{sp}(2n+2, \mathbb{R})$, estructuras de contacto projectivas,
$G = \mathfrak{sp}(p+1, q+1)$, estructuras de contacto cuaterniónico de signatura (p, q).

- A. Cap and J. Slovák, *Parabolic Geometries I: Background and General Theory*, Mathematical Survey and Monographs, vol. 154, 2009.
- A. Kaplan, M. Subils, *Parabolic nilradicals of Heisenberg type*, arXiv:1608.02663 [math.DG].
- A. Kaplan, M. Subils, *Parabolic nilradicals of Heisenberg type, II*, arXiv:1708.08981 [math.DG].
- N. Tanaka, *On differential systems, graded Lie algebras and pseudogroups*, J. Math. Kyoto Univ. 10, 1-82 (1970).
- K. Yamaguchi, *Differential systems associated with simple graded Lie algebras*, Advanced Studies in Pure Math. **22** (1993) 413-494.

MUCHAS GRACIAS!