Álgebras de Lie con estructuras Vaisman

Marcos Origlia

1 de Septiembre 2017
Rosario

(trabajo en conjunto con Adrián Andrada)

Universidad Nacional de Córdoba – CIEM (CONICET)

- M denotará una variedad C^∞.
- una estructura compleja J es un tensor $J : TM \longrightarrow TM$ tal que $J_p^2 = -\operatorname{Id}$ y $J[X, Y] = J[JX, JY] + [JX, Y] + [X, JY]$.
- una métrica hermitiana g en (M, J) es una métrica tal que $g(X, Y) = g(JX, JY)$, para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.
- J y g determinan una 2-forma dada por $\omega(X, Y) = g(JX, Y)$, llamada la forma de Kähler.
- (M^{2n}, J, g) es una variedad de Kähler si ω satisface $d\omega = 0$.

Se dice que una variedad hermitiana (M^{2n}, J, g) es localmente conforme Kähler (LCK) si existe una 1-forma cerrada θ definida globalmente en M tal que

$$d\omega = \theta \wedge \omega$$

En este caso θ está determinada por

$$\theta = -\frac{1}{n-1}(\delta\omega) \circ J.$$

Definición

Sea (M, J, g) una variedad LCK, se dice que g es una métrica Vaisman si la forma de Lee θ es paralela con respecto a la conexión de Levi-Civita de (M, g).

Si J y g son invariantes a izquierda $\Rightarrow \omega$ y θ resultan invariantes a izquierda. Entonces

$$d\omega = \theta \wedge \omega, \qquad \omega \in \Lambda^2 \mathfrak{g}^*, \quad \theta \in \mathfrak{g}^*$$

$$\{\text{LCK o LCS invariantes en } G\} \leftrightsquigarrow \{\text{LCK o LCS en } \mathfrak{g}\}$$

Si J y g son invariantes a izquierda $\Rightarrow$ ω y θ resultan invariantes a izquierda. Entonces

$$d\omega = \theta \wedge \omega, \qquad \omega \in \Lambda^2 \mathfrak{g}^*, \quad \theta \in \mathfrak{g}^*$$

$$\{\text{LCK o LCS invariantes en } G\} \leftrightsquigarrow \{\text{LCK o LCS en } \mathfrak{g}\}$$

Un subgrupo $\Gamma \subset G$ se dice *lattice o retículo* si Γ es discreto y co-compacto, i.e., $\Gamma \backslash G$ es una variedad compacta.

En esta charla estudiaremos las estructuras Vaisman "invariantes" en $\Gamma \backslash G$, donde la estructura Vaisman proviene de una estructura invariante a izquierda en G, o equivalentemente, una estructura en su álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Interesan los G unimodulares, porque tienen chances de tener lattices. Llamaremos solvariedad a $\Gamma \backslash G$ con G soluble.

Otras estructuras geométricas

Una almost contact metric structure en un algebra de Lie $\mathfrak{h}$ es un cuadruple $(\langle \cdot , \cdot \rangle, \phi, \xi, \eta)$, donde $\langle \cdot , \cdot \rangle$ es un prod. interno en $\mathfrak{g}$, ϕ es un endomorfismo $\phi : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$, y $\xi \in \mathfrak{h}$, $\eta \in \mathfrak{h}^*$ satisfacen:

- $\eta(\xi) = 1$,
- $\phi^2 = -\operatorname{Id} + \eta \otimes \xi$,
- $\langle \phi x, \phi y\rangle = \langle x, y\rangle - \eta(x)\eta(y)$, para todo $x, y \in \mathfrak{h}$.

La 2-forma fundamental Φ asociada a $(\langle \cdot , \cdot \rangle, \phi, \xi, \eta)$ se define por $\Phi(x, y) = \langle \phi x, y\rangle$, para $x, y \in \mathfrak{h}$. Una almost contact metric structure se dice:

- *Sasakiana* si $N_\phi = -d\eta \otimes \xi$ y $d\eta = 2\Phi$;
- *coKähler* si $d\eta = d\Phi = 0$ y $N_\phi = -d\eta \otimes \xi$. Equivalentlemente, ϕ es paralela.

$$N_\phi(x, y) = [\phi x, \phi y] + \phi^2[x, y] - \phi([\phi x, y] + [x, \phi y]).$$

Las estructuras CoKähler son llamadas también "cosymplecticas" por algunos autores.

Relación con las estructuras sasakianas

Sea $\mathfrak{g} = \mathbb{R}A \ltimes \ker\theta$, donde $\theta(A) = 1$.

Lemma

$(J, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ es Vaisman si y sólo si ad_A es un operador antisimétrico de $\mathfrak{g}$.

Proposition

Si $(\mathfrak{g}, J, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ es Vaisman entonces $\ker\theta$ tiene una estructura sasakiana.

Relación con las estructuras sasakianas

Sea $\mathfrak{g} = \mathbb{R}A \ltimes \ker\theta$, donde $\theta(A) = 1$.

Lemma

$(J, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ es Vaisman si y sólo si ad_A es un operador antisimétrico de $\mathfrak{g}$.

Proposition

Si $(\mathfrak{g}, J, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ es Vaisman entonces $\ker\theta$ tiene una estructura sasakiana.

Reciprocamente, sea $(\mathfrak{h}, \langle\cdot\,,\cdot\rangle, \phi, \eta, \xi)$ un álgebra de Lie sasakiana.

$$\mathfrak{g} = \mathbb{R}A \ltimes_D \mathfrak{h},$$

con D derivación antisimétrica de $\mathfrak{h}$, $D(\xi) = 0$ y $D\phi = \phi D$. Definimos $J|_{\ker\eta} := \phi|_{\ker\eta}$, $JA = \xi$, y extendemos $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ a $\mathfrak{g}$ tal que $\langle A, \mathfrak{h}\rangle = 0$ y $|A| = 1 \Rightarrow (J, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ es una estructura Vaisman en $\mathfrak{g}$.

Relación con las estructuras sasakianas

Sea $\mathfrak{g} = \mathbb{R}A \ltimes \ker\theta$, donde $\theta(A) = 1$.

Lemma

$(J, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ es Vaisman si y sólo si ad_A es un operador antisimétrico de $\mathfrak{g}$.

Proposition

Si $(\mathfrak{g}, J, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ es Vaisman entonces $\ker\theta$ tiene una estructura sasakiana.

Reciprocamente, sea $(\mathfrak{h}, \langle \cdot\,, \cdot \rangle, \phi, \eta, \xi)$ un álgebra de Lie sasakiana.

$$\mathfrak{g} = \mathbb{R}A \ltimes_D \mathfrak{h},$$

con D derivación antisimétrica de $\mathfrak{h}$, $D(\xi) = 0$ y $D\phi = \phi D$. Definimos $J|_{\ker\eta} := \phi|_{\ker\eta}$, $JA = \xi$, y extendemos $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ a $\mathfrak{g}$ tal que $\langle A, \mathfrak{h} \rangle = 0$ y $|A| = 1 \Rightarrow (J, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ es una estructura Vaisman en $\mathfrak{g}$.

Theorem

Hay una correspondencia uno a uno entre estructuras Vaisman en $\mathfrak{g}$ y estructuras sasakianas en $\ker\theta$.

Ahora asumimos $\mathfrak{g}$ unimodular.

Lemma

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie soluble unimodular con una estructura Vaisman $(J, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$. Entonces $JA \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Más aún $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \subset \operatorname{span}\{A, JA\}$.

Corolario

Toda álgebra de Lie unimodular soluble que admite una estructura Sasakiana tiene centro no trivial.

$$\ker\theta = \mathbb{R}JA \overset{\perp}{\oplus} \mathfrak{k},$$

$$X, Y \in \mathfrak{k}: \qquad [X, Y] = \omega(X, Y)JA + [X, Y]_{\mathfrak{k}},$$

Usando un resultado en [AFV'09], $(\mathfrak{k}, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{k}}, J|_{\mathfrak{k}}, \langle \cdot\,, \cdot \rangle|_{\mathfrak{k}})$ es Kähler.

Más aún, $\mathfrak{g}$ unimodular $\Rightarrow$ $\mathfrak{k}$ unimodular.

Por un resultado en [Hano'57], $(\mathfrak{k}, \langle \cdot\,, \cdot \rangle|_{\mathfrak{k}})$ es plana.

Relación con las Kähler planas

Theorem

Hay una correspondencia uno a uno entre álgebras de Lie solubles unimodulares con estructuras Vaisman y pares $(\mathfrak{k}, D)$ donde $\mathfrak{k}$ es un álgebra de Lie Kähler plana y D es una derivación antisimétrica de $\mathfrak{k}$ que conmuta con su estructura compleja.

Dicha correspondencia está dada por

$$\mathfrak{g} = \mathbb{R}A \ltimes_D (\mathbb{R}JA \oplus_\omega \mathfrak{k}),$$

Equivalentlemente $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}(D, \omega)$ es la doble extención de $\mathfrak{k}$ por el para (D, ω).

Proposition (Milnor, BDF)

Si $(\mathfrak{k}, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ *es un álgebra de Lie plana. Entonces* $\mathfrak{k} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{k}'$ *y*

(a) $\mathfrak{k}' = [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]$ *y* $\mathfrak{h}$ *son abelianas.*

(b) $\mathrm{ad} : \mathfrak{h} \to \mathfrak{so}(\mathfrak{k}')$ *es inyectiva y* $\mathfrak{k}'$ *tiene dimensión par.*

(c) $\mathrm{ad}_x = \nabla_x$ *para* $x \in \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{h}$.

(d) $\nabla_x = 0$ *sii* $x \in \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{k}'$.

Con esta descripción de $\mathfrak{k}$ obtenemos la siguiente obstrucción para la existencia de estructuras Vaisman.

Proposition (Milnor, BDF)

Si $(\mathfrak{k}, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ *es un álgebra de Lie plana. Entonces* $\mathfrak{k} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{k}'$ *y*

(a) $\mathfrak{k}' = [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]$ *y* $\mathfrak{h}$ *son abelianas.*

(b) $\mathrm{ad} : \mathfrak{h} \to \mathfrak{so}(\mathfrak{k}')$ *es inyectiva y* $\mathfrak{k}'$ *tiene dimensión par.*

(c) $\mathrm{ad}_x = \nabla_x$ *para* $x \in \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{h}$.

(d) $\nabla_x = 0$ *sii* $x \in \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{k}'$.

Con esta descripción de $\mathfrak{k}$ obtenemos la siguiente obstrucción para la existencia de estructuras Vaisman.

Theorem

Si $\mathfrak{g}$ *es un álgebra de Lie unimodular soluble que admite una estructura Vaisman, entonces los autovalores de los operadores* ad_x *con* $x \in \mathfrak{g}$ *son todos imaginarios (algunos son ceros).*

Un álgebra de Lie que satisface esta condición se llama tipo I.

Relación con álgebras de Lie coKähler

Ya sabemos que

$$\mathfrak{g} = \mathbb{R}A \ltimes_D (\mathbb{R}JA \oplus_\omega \mathfrak{k}),$$

donde $(\mathfrak{k}, J, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ es un álgebra de Lie Kähler plana y D una derivación antisimétrica de $\mathfrak{k}$ que conmuta con J.

Theorem

El algebra de Lie $\mathfrak{d} = \mathbb{R}A \ltimes_D \mathfrak{k}$ admite una estructura coKähler $(\langle \cdot\,, \cdot \rangle|_{\mathfrak{d}\times\mathfrak{d}}, \phi, \xi, \eta)$, donde $\phi \in \mathrm{End}(\mathfrak{d})$ está definido por $\phi(aA + x) = Jx$ for $a \in \mathbb{R}$, $x \in \mathfrak{k}$, y $\eta := \theta|_{\mathfrak{d}}$, $\xi := A$.

Y $(\mathfrak{d}, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ también es plana.

Theorem

Además, si Φ denota la 2-forma fundamental en $\mathfrak{d}$ asociada a esta estructura coKähler, entonces $\mathfrak{g}$ es isomorfa a la extensión central $\mathfrak{d}_\Phi(JA)$.

Relación con las LSA (left-symmetric algebras)

Una estructura LSA en un álgebra de Lie $\mathfrak{a}$ es un producto bilineal $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{a}$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$, que satisface

$$[x, y] = x \cdot y - y \cdot x \tag{1}$$

y

$$x \cdot (y \cdot z) - (x \cdot y) \cdot z = y \cdot (x \cdot z) - (y \cdot x) \cdot z, \tag{2}$$

para todo $x, y, z \in \mathfrak{a}$.

Theorem

Sea $(\mathfrak{h}, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ un álgebra de Lie plana y sea β una 2-forma paralela con respecto a la conexión de Levi-Civita ∇ de $\langle \cdot , \cdot \rangle$ (por lo tanto β es cerrada). Entonces la extensión central $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_\beta(\xi)$ admite una estructura LSA definida por

$$(a\xi + x) \cdot (b\xi + y) = \frac{1}{2}\beta(x, y)\xi + \nabla_x y, \quad a, b \in \mathbb{R},\ x, y \in \mathfrak{h}.$$

Como consecuencia obtenemos:

Corolario

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie unimodular soluble.

1. *Si $\mathfrak{g}$ tiene una estructura Vaisman, entonces $\mathfrak{g}$ admite una estructura LSA.*
2. *Si $\mathfrak{g}$ admite una estructura Sasakian, entonces $\mathfrak{g}$ admite una estructura LSA.*

Ejemplo: Oscillator solvmanifolds

Comenzamos con el álgebra de Lie abeliana $\mathfrak{k} = \mathbb{R}^{2n}$ con la estructura Kähler canónica $(J, \langle\cdot\,,\cdot\rangle, \omega)$, $Je_i = f_i$ y sea $\omega = \sum_{i=1}^{n} e^i \wedge f^i$.
Consideramos la extensión central

$$\mathfrak{s} = \mathbb{R}\xi \oplus_\omega \mathfrak{k} \cong \mathfrak{h}_{2n+1}$$

Definimos $\mathfrak{g}$ mediante el producto semidirecto

$$\mathfrak{g} = \mathbb{R}A \ltimes_E \mathfrak{h}_{2n+1}$$

donde la acción de A sobre $\mathfrak{h}_{2n+1}$ está dada por la matriz

$$E = \mathrm{ad}_A = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & 0 & -a_1 & & & \\ & a_1 & 0 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 0 & -a_n \\ & & & & a_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Denotamos por $\mathfrak{g}_{(a_1,\ldots,a_n)}$ a esta álgebra de Lie.

Consideramos el homomorfismo de grupos de Lie $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow Aut(H_{2n+1})$

$$\varphi(t) = e^{tE} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \cos(a_1 t) & -\sin(a_1 t) & & & \\ & \sin(a_1 t) & \cos(a_1 t) & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \cos(a_n t) & -\sin(a_n t) \\ & & & & \sin(a_n t) & \cos(a_n t) \end{pmatrix}, \text{ donde } H_{2n+1} \text{ es}$$

$\mathbb{R}^{2n+1}$ junto con el producto dado por

$$(z, x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) \cdot (z', x'_1, y'_1, \ldots, x'_n, y'_n) =$$
$$=(z + z' + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} (x_j y'_j - x'_j y_j), x_1 + x'_1, \ldots, y_n + y'_n).$$

Luego G es el producto semidirecto entre $\mathbb{R}$ y H_{2n+1} dado por φ, de esta manera obtenemos el grupo de Lie simplemente conexo

$$G = G_{(a_1,\ldots,a_n)} = \mathbb{R} \ltimes_{\varphi} H_{2n+1},$$

con álgebra de Lie $Lie(G) = \mathfrak{g}_{(a_1,\ldots,a_n)}$.

Sea $\Gamma_k \subset H_{2n+1}$ para $k \in \mathbb{N}$ el retículo dado por

$$\Gamma_k = \frac{1}{2k}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}.$$

Si $a_i \in \mathbb{Z}$, entonces Γ_k es invariante por los subgrupos generados por $\varphi(\frac{\pi}{2})$, $\varphi(\pi)$ y $\varphi(2\pi)$. Así, tenemos 3 familias de retículos en $G_{(a_1,\ldots,a_n)}$:

$$\Lambda_{k,1} = \frac{\pi}{2}\mathbb{Z} \ltimes \Gamma_k,$$
$$\Lambda_{k,2} = \pi\mathbb{Z} \ltimes \Gamma_k,$$
$$\Lambda_{k,4} = 2\pi\mathbb{Z} \ltimes \Gamma_k.$$

Para cada $\mathfrak{g}_{(a_1,\ldots,a_n)}$ y $\Lambda_{k,i}$ tenemos que

$$M_{k,i} = \Lambda_{k,i} \backslash G_{(a_1,\ldots,a_n)}$$

son solvariedades con estructuras Vaisman y con $\pi_1(M_{k,i}) = \Lambda_{k,i}$.

Calculamos el primer grupo de homología de $\Lambda_{k,j}\backslash G_{(a_1,\ldots,a_n)}$ para $j = 2\pi, \pi, \pi/2$:

• Como $\varphi(2\pi) = \mathrm{Id}$, entonces $\Lambda_{k,2\pi} = 2\pi\mathbb{Z} \times \Gamma_k$, y la solvariedad $\Lambda_{k,2\pi}\backslash G_{(a_1,\ldots,a_n)}$ es isomorfa a la nilvariedad $S^1 \times \Gamma_k\backslash H_{2n+1}$. Luego el primer grupo de homología $H_1(\Lambda_{k,2\pi}\backslash G_{(a_1,\ldots,a_n)}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{2n+1} \oplus \mathbb{Z}_{2k}$ y $b_1 = 2n + 1$.

• Para la familia $\Lambda_{k,\pi}$, la clase de isomorfismos de retículos depende de la paridad a_j, entonces

$$H_1(\Lambda_{k,\pi}\backslash G_{(a_1,\ldots,a_n)}, \mathbb{Z}) = \Lambda_{k,\pi}/[\Lambda_{k,\pi}, \Lambda_{k,\pi}] \cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_{2k}\oplus(\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z})^p\oplus(\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2)^{n-p}.$$

Y el primer número de betti es $b_1 = 2p + 1$.

• Para la familia $\Lambda_{k,\pi/2}$, tenemos $H_1(\Lambda_{k,\frac{\pi}{2}}\backslash G_{(a_1,\ldots,a_n)}, \mathbb{Z})$ es

$$\Lambda_{k,\frac{\pi}{2}}/[\Lambda_{k,\frac{\pi}{2}}, \Lambda_{k,\frac{\pi}{2}}] \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{2k} \oplus (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})^c \oplus (\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2)^d \oplus (\mathbb{Z}_2)^{n-(c+d)}.$$

y $b_1 = 2c + 1$.

A. Andrada, M. Origlia, Vaisman solvmanifolds and relations with other geometric structures. En preparación.

G. Bazzoni, Vaisman nilmanifolds, preprint 2016, arXiv:1605.02792v1.

C. Bock, On low-dimensional solvmanifolds, preprint 2009, arXiv:0903.2926.

S. Console, G. Ovando, M. Subils, Solvable models for Kodaira surfaces, *Mediterr. J. Math.* **12** (2015), 187–204.

H. Kasuya, Vaisman metrics on solvmanifolds and Oeljeklaus-Toma manifolds, *Bull. London Math. Soc.* **45** (2013), 15–26.

H. Sawai, Locally conformal Kähler structures on compact nilmanifold with left-invariant complex structures, *Geom. Dedicata* **125** (2007), 93–101.

MUCHAS GRACIAS!!!